18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Achtundsiebzigster Band.

78

Berlin, 1874.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des achtundsiebzigsten Bandes.

Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen. Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn. . . . . Seite 1

Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. Von Herrn *Mertens* in Krakau. — 46

Ueber die allgemeine Möglichkeit der conformen Abbildung einer von Geraden begrenzten ebenen Figur in eine Halbebene. Von Herrn *Schläfli* in Bern. . . . . — 63

Zur Theorie der zusammengesetzten Gruppen. Von Herrn *E. Netto*. . . . — 81

Ueber die Vertauschung von Argument und Parameter in den Integralen der linearen Differentialgleichungen. Von Herrn *G. Frobenius*. . . . . — 93

Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen. Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E. . . . . — 97

Geometrischer Beweis des *Sylvester*schen Satzes: „Jede quaternäre cubische Form ist darstellbar als Summe von fünf Cuben linearer Formen.“ Von Demselben. . . . . — 114

Darstellung quaternärer biquadratischer Formen als Summen von zehn Biquadraten. Von Demselben. . . . . — 123

Zur Theorie der inneren Reibung. Von Herrn *Oskar Emil Meyer* in Breslau. — 130

Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten elastischen Schale. Von Herrn *H. Aron*. . . . . — 136

Zwei Erzeugnisse krumm-geometrischer Gebilde. Von Herrn *Milinowski* in Tilsit. . . . . — 175

Zur Geometrie der ebenen Curven dritter Ordnung. Von Demselben. . — 177

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. (Fortsetzung der Bd. 74, 75 und 76 dieses Journals erschienenen Abhandlungen.) Von Herrn *L. W. Thomé*. — 223

Reduction der Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids auf das Variationsproblem eines einfachen Integrals, und Bestimmung der Bewegung für den Grenzfall eines unendlichen elliptischen Cylinders. Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn. . . . . — 245

Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Dritte Abhandlung. Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern. Von Herrn *H. Helmholtz*. . . . Seite 273
Extrait d'une lettre de M. *Ch. Hermite* à M. *Borchardt* sur la transformation des formes quadratiques ternaires en elles-mêmes. . . . . — 325
Beweis eines Satzes der Elasticitätslehre. Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn a. Rh. — 329
Ueber die Abbildung durch algebraische Functionen. Anhang zur Abhandlung Bd. 77, S. 339 ff. dieses Journals. Von Herrn *L. Fuchs* in Göttingen. . . — 338
Ueber den Werth einiger Integrale. Von Herrn *Stern* in Göttingen. . . . — 340
Ueber die Kugelflächen, welche den Poltetraëdern einer Fläche zweiten Grades umschrieben werden können. Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E. . . . . — 345

Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Die Flächen, welche bei gegebener Begrenzung den kleinsten Inhalt haben, oder die Minimalflächen, fallen nach einer von *Meusnier* herrührenden Bemerkung mit den Flächen zusammen, bei welchen in jedem Punkte das Aggregat der reciproken Werthe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleich Null ist. Ein Punkt im Raume sei durch die drei beliebigen Coordinaten x_1, x_2, x_3 bestimmt, das Quadrat des von dem Punkte (x_1, x_2, x_3) ausgehenden Linearelements werde gleich der Form $2f(dx)$ oder

$$a_{1,1}dx_1^2+a_{2,2}dx_2^2+a_{3,3}dx_3^2+2a_{2,3}dx_2dx_3+2a_{3,1}dx_3dx_1+2a_{1,2}dx_1dx_2$$

der drei Differentiale dx_1, dx_2, dx_3, die Gleichung der Fläche heisse $y_1 = \text{const.}$ Dann hat sowohl die Gleichung für die Hauptkrümmungshalbmesser, wie auch der Ausdruck für den Inhalt eines Stückes der Fläche die Eigenschaft, bei einer beliebigen Transformation der erwähnten Form der drei Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 mittelst Einführung neuer Variabelen und bei der Ersetzung der Gleichung $y_1 = \text{const.}$ durch eine beliebige äquivalente Gleichung sich mitzuändern; und diejenige Invariante dieser Combination, welche das Aggregat der reciproken Werthe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser in dem Punkte (x_1, x_2, x_3) darstellt, muss verschwinden, sobald der Inhalt eines Stückes der Fläche bei gegebener Begrenzung ein Minimum werden soll.

Zu der Combination einer beliebigen wesentlich positiven quadratischen Form $f(dx) = \frac{1}{2}\sum_{a,b} a_{a,b}dx_a dx_b$ der n Differentiale dx_a, bei welcher die Determinante $|a_{a,b}| = \triangle$ nicht identisch verschwindet, mit einem System von l beliebigen von einander unabhängigen constant zu setzenden Functionen y_α der Variabelen x_a, wo die Buchstaben a, b, ... die Reihe der Zahlen von 1 bis n, die Buchstaben α, β, ... die Reihe der Zahlen von 1 bis l durchlaufen, und $l < n$ ist, gehören gewisse Begriffe, die den Grundbegriffen der Theorie der Krümmung einer Fläche entsprechen, und die in den Aufsätzen: *Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen*, erste und zweite Mittheilung, dieses Journal Bd. 71, p. 274 bis 295, erörtert sind.

Mittelst des Zeichens der Variation δ werde aus der Form $f(dx)$ und den l Functionen y_α die Gleichung

$$-\delta f(dx) + d\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} \delta x_{\mathfrak{a}} = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \delta y_\alpha$$

gebildet; nachdem auf beiden Seiten derselben die Factoren der n Variationen $\delta x_{\mathfrak{a}}$ einander gleich gesetzt sind, füge man zu den betreffenden n Gleichungen die aus den l Gleichungen

$$dy_\beta = 0$$

folgenden l Gleichungen

$$d^2 y_\beta = 0$$

hinzu, und bestimme sowohl die n Grössen $d^2 x_{\mathfrak{a}}$, wie auch die l Grössen λ_α als ganze homogene Functionen des zweiten Grades von den Differentialen $dx_{\mathfrak{b}}$. Dann erscheint die Function

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha} \lambda_\alpha \delta y_\alpha = \lambda(dx)$$

als eine nach den Differentialen $dx_{\mathfrak{b}}$ quadratische, nach den Variationen δy_α lineare Form, die den Kern der angeführten Untersuchungen ausmacht.

Für diese Form $\lambda(dx)$ wird ein Problem *de maximis et minimis* aufgestellt, bei dem die Grössen $dx_{\mathfrak{a}}$ als veränderlich, die Grössen δy_α als fest gelten. Man verlangt, dass das erste in Bezug auf die Grössen $dx_{\mathfrak{a}}$ genommene Differential der Form $\lambda(dx)$ zum Verschwinden gebracht werde, während die Form $f(dx)$ einen festen Werth erhält, und die l Gleichungen

$$dy_\alpha = 0$$

bestehen. Demgemäss müssen die n nach den Grössen $dx_{\mathfrak{a}}$ genommenen Ableitungen des Ausdruckes

$$-\lambda(dx) + \omega f(dx) + \sum_{\alpha} \vartheta_\alpha dy_\alpha,$$

wo ω und ϑ_α unbestimmte Factoren bedeuten, gleich Null werden. Diese n Gleichungen und die l Gleichungen $dy_\alpha = 0$ zusammen sind ein System von $n+l$ homogenen linearen Gleichungen in Bezug auf die n Grössen $dx_{\mathfrak{a}}$ und die l Grössen ϑ_α. Die Determinante dieses Systems von $n+l$ Gleichungen, $D(\omega)$, welche in Bezug auf die Grösse ω vom $(n-l)^{\text{ten}}$ Grade ist und die nach dem gegenwärtig üblichen Algorithmus mit Hinzufügung des Factors (-1) gebildet werden soll, sei folgendermassen dargestellt:

$$D(\omega) = D_0 \omega^{n-l} + D_1 \omega^{n-l-1} + \cdots + D_{n-l}.$$

Alsdann zieht die Auflösung des Problems *de maximis et minimis* die Gleichung

$$D(\omega) = 0$$

nach sich, zu jeder Wurzel dieser Gleichung gehört eine Bestimmung der Grössen dx_a, und dieser Bestimmung entspricht die Gleichung

$$\omega = \frac{\lambda(dx)}{f(dx)}.$$

Die Function $\lambda(dx)$ erlaubt eine anschauliche mechanische Interpretation. Wenn $\frac{n}{3}$ eine ganze Zahl ist, und wenn $x_1, x_2, x_3; x_4, x_5, x_6; \ldots x_n$ als die Coordinaten von $\frac{n}{3}$ Massenpunkten aufgefasst werden, auf welche keine beschleunigenden Kräfte wirken, die aber den l Bedingungsgleichungen $y_\alpha = \text{const.}$ unterworfen sind, wenn dt das Element der Zeit und $2f\left(\frac{dx}{dt}\right)$ das thatsächlich geltende Mass der lebendigen Kräfte des bewegten Massensystems ausdrückt, so verwandelt sich die Forderung, dass die erste Variation des Integrales

$$\int f\left(\frac{dx}{dt}\right) dt$$

unter der Voraussetzung der Gleichungen $y_\alpha = \text{const.}$ zum Verschwinden gebracht werde, in die *Hamilton*sche Gestalt des in Rede stehenden Bewegungsproblems, und der Ausdruck $\frac{\sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha}{dt^2} = \frac{2\lambda(dx)}{dt^2}$ wird gleich der Summe der Momente der sämmtlichen Drucke, die der durch die Wahl der Grössen δy_α bestimmten virtuellen Verschiebung des Massensystems entsprechen. Das bezeichnete Variationsproblem correspondirt zugleich mit der Erweiterung der mechanischen Begriffe, die in dem Aufsatze: *Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist,* in diesem Journal Band **74**, p. 116 bis 149, auseinandergesetzt ist.

Der Character der Function $\lambda(dx)$, zu der Form $f(dx)$ und dem System Gleichungen $y_\alpha = \text{const.}$ covariant zu sein, wird in dem Falle, dass $l = 1$ ist, oder dass nur *eine* Function y_1 vorliegt, nicht aufgehoben, wenn man die Grösse δy_1 durch den Ausdruck $\sqrt{(1,1)}$ ersetzt, wo die Bezeichnungen

$$(1,1) = \sum_{a,b} \frac{A_{a,b}}{\Delta} \frac{\partial y_1}{\partial x_a} \frac{\partial y_1}{\partial x_b},$$

$$\Delta = |a_{a,b}|,$$

$$A_{a,b} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{a,b}}$$

gebraucht sind. Durch die Voraussetzung, dass die Form $f(dx)$ gleich der *besonderen* Form

$$\tfrac{1}{2}\Sigma dx_a^2$$

sei, wird

$$(1,1) = \sum_a \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_a}\right)^2,$$

und geht der Ausdruck $\frac{\lambda(dx)}{f(dx)}$ in den negativ genommenen reciproken Werth der Grösse über, welche Hr. *Kronecker* in seiner zweiten Abhandlung *über Systeme von Functionen mehrer Variabeln*, Monatsb. der Berliner Academie v. Aug. 1869 p. 692, mit ϱ bezeichnet, ferner das aufgestellte Problem *de maximis et minimis* in dasjenige Problem, welches Hr. *Kronecker* für die Grösse ϱ betrachtet. Die oben erwähnte Gleichung $D(\omega) = 0$ liefert durch die Substitution $\omega = -\frac{1}{\varrho}$ die ausgezeichneten $n-1$ Werthe der Grösse ϱ. Für $n=3$ wird ϱ nach den zu Anfang eingeführten Bezeichnungen der Krümmungshalbmesser der Fläche $y_1 = \text{const.}$ in demjenigen Normalschnitt, bei welchem die rechtwinkligen Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes der Fläche beziehungsweise die Incremente dx_1, dx_2, dx_3 erhalten, und die Gleichung $D\left(-\frac{1}{\varrho}\right) = 0$ determinirt den grössten und den kleinsten Werth des Krümmungshalbmessers.

Es schien mir nun wünschenswerth, zu prüfen, ob der im Eingange erwähnte Zusammenhang des Aggregats der reciproken Werthe der Hauptkrümmungshalbmesser mit dem Wesen der Minimalflächen erhalten bleibe, wenn der vorhin allgemein definirten Function $\lambda(dx)$ ein Integral gegenüber gestellt wird, welches dem Ausdrucke für den Inhalt eines Flächenstücks entspricht. Wenn man die Form $f(dx)$ durch die Einführung eines neuen Systems von unabhängigen Variabelen transformirt, von denen die l gegebenen Functionen y_α einen Theil, $n-l$ beliebige andere Functionen $y_{l+1}, y_{l+2}, \ldots y_n$ den anderen Theil bilden, so entsteht eine Form $g(dy)$ der Differentiale $dy_1, dy_2, \ldots dy_n$, welche sich durch Constantsetzen der Variabelen y_α und Nullsetzen der Differentiale dy_α in eine Form $\overline{g(dy)}$ der Differentiale $dy_{l+1}, dy_{l+2}, \ldots dy_n$ verwandelt. Die Determinante der Form $\overline{2g(dy)}$ heisse $\overline{E}$, dann hat das $(n-l)$fache Integral

$$A = \int \sqrt{\overline{E}}\, dy_{l+1}\, dy_{l+2} \ldots dy_n$$

die Eigenschaft, von der Wahl der Variabelen $y_{l+1}, \ldots y_n$ unabhängig zu

sein, und, bei der für $n=3$, $l=1$ angeführten Bedeutung von $f(dx)$ und $y_1=\text{const.}$, den Inhalt eines Stückes der Fläche $y_1=\text{const.}$ auszudrücken. Dieses Integral kann auch durch $n-l$ beliebige Variabele $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots x_n$ unter den n Variabelen x_a dargestellt werden, und nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$A=\int\sqrt{D_0}\frac{dx_{l+1}dx_{l+2}\cdots dx_n}{\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial y_l}{\partial x_l}},$$

wo D_0 nach der oben eingeführten Bezeichnung den Coëfficienten von ω^{n-} in der Determinante $D(\omega)$ bedeutet. Das Element dieses Integrales fällt bei der Voraussetzung, dass die Form $f(dx)=\frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$ und die Zahl $l=1$ ist, mit dem Element des Integrales zusammen, welches Hr. *Kronecker* in der ersten Abhandlung *über Systeme von Functionen mehrer Variabelen,* Monatsbericht der Berliner Academie vom März 1869, p. 169, definirt, und *das Element der durch die Gleichung* $y_1=\text{const.}$ *repräsentirten* $(n-1)$*fachen Mannigfaltigkeit* genannt hat.

Ich werfe jetzt die Frage auf, *in welche Abhängigkeit müssen die Grössen* $x_1, x_2, \ldots x_l$ *von den Grössen* $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots x_n$ *treten, damit die erste Variation des Integrales A gleich Null werde. Das System von l partiellen Differentialgleichungen, welches diese Frage beantwortet, wird erhalten, indem man verlangt, dass der Coefficient von* ω^{n-l-1} *in der Gleichung* $D(\omega)=0$,

$$\frac{D_1}{D_0},$$

welcher eine homogene lineare Function der Variationen δy_a *ist, unabhängig von diesen Variationen verschwinde.* Die Relation zwischen dem Aggregate der reciproken Hauptkrümmungshalbmesser und der Haupteigenschaft der Minimalflächen findet also in der gegebenen Theorie der Function $\lambda(dx)$ und des Integrales A ihre Verallgemeinerung.

Nachdem dieses Resultat gefunden ist, betrachte ich die Voraussetzung, dass die Form $f(dx)=\frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$, und zugleich die Zahl $n-l$, oder die Ordnung des Integrales A, gleich *Zwei* sei. In diesem Falle kann die allgemeine Integration des Systems von partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{D_1}{D_0}=0$$

vollständig absolvirt, und folgendermassen dargestellt werden. *Es sei i die imaginäre Einheit* $\sqrt{-1}$, $p+iq$ *eine complexe Variabele, es seien* $\varphi_1(p+iq)$, $\varphi_2(p+iq)$, ...

$\varphi_n(p+iq)$ complexe Functionen dieser Variabelen, die der einen Bedingung genügen

$$(d\varphi_1(p+iq))^2+(d\varphi_2(p+iq))^2+\cdots+(d\varphi_n(p+iq))^2 = 0,$$

und es bedeute $\Re\varphi_a(p+iq)$ den reellen Theil der Function $\varphi_a(p+iq)$, dann bestehen die n Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \Re\varphi_1(p+iq),\\ x_2 &= \Re\varphi_2(p+iq),\\ &\vdots \quad\quad \vdots\\ x_n &= \Re\varphi_n(p+iq). \end{aligned}$$

Dieses Theorem geht für den Fall $n=3$ in die allgemeine Auflösung des Problems der Minimalflächen über, welche *Riemann* und *Weierstrass* gegeben haben *).

Erste Abtheilung.

1.

Die Betrachtung, deren Ziele im Vorstehenden bezeichnet sind, fange ich mit der Aufstellung der Bedingungen an, unter denen die erste Variation des $(n-l)$ fachen über ein gegebenes Gebiet auszudehnenden Integrals

$$(1.)\qquad A = \int\sqrt{E}\,dy_{l+1}\,dy_{l+2}\ldots dy_n$$

verschwindet. Wenn die wesentlich positive quadratische Form der n Differentiale dx_a

$$(2.)\qquad f(dx) = \tfrac{1}{2}\sum_{a,b} a_{a,b}\,dx_a\,dx_b,$$

deren Determinante $|a_{a,b}| = \Delta$ nicht identisch gleich Null ist, und bei der die adjungirten Elemente mit $A_{a,b}$ bezeichnet werden, durch die Einführung der n unabhängigen Variabelen y_t in die Form der n Differentiale dy_t

$$(3.)\qquad g(dy) = \tfrac{1}{2}\sum_{t,l} e_{t,l}\,dy_t\,dy_l$$

übergeht, und wenn demnach für die Coefficienten $e_{t,l}$ der letzteren die Ausdrücke gelten

$$(4.)\qquad e_{t,l} = \sum_{a,b} a_{a,b}\frac{\partial x_a}{\partial y_t}\frac{\partial x_b}{\partial y_l},$$

so enthalten die Coefficienten der Form $\overline{g(dy)}$ von den $n-l$ Differentialen dy_σ

---

*) Die hier abschliessende Einleitung in die folgende Abhandlung ist bereits der Berliner Academie am 27. Mai 1872 mitgetheilt worden und im Monatsbericht derselben erschienen.

$$(5.) \qquad \overline{g(dy)} = \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau} e_{\sigma,\tau} dy_\sigma dy_\tau,$$

wo die Zeiger σ, τ die Reihe der Zahlen $l+1$, $l+2$, ... n durchlaufen, nur die partiellen Ableitungen der Grössen x_a nach den $n-l$ Variabelen y_σ, und nicht die partiellen Ableitungen dieser Grössen nach den übrigen Variabelen y_α; daher gilt auch das Gleiche von der der Form $\overline{g(dy)}$ zugehörigen Determinante

$$(6.) \qquad \overline{E} = |e_{\sigma,\tau}|.$$

Die Eigenschaft der Form $f(dx)$, wesentlich positiv und von nicht verschwindender Determinante zu sein, überträgt sich auf die Form $g(dy)$ und auch auf die Form $\overline{g(dy)}$, und die Determinante der letzteren $\overline{E}$ ist sicher eine positive Grösse. Wenn die n Variabelen x_a von den $n-l$ Variabelen y_σ so abhängen sollen, dass die erste Variation des Integrals A gleich Null wird, so muss nach den Regeln der Variation eines vielfachen Integrals der Ausdruck

$$(7.) \qquad \sum_a \left(\frac{\partial \sqrt{\overline{E}}}{\partial x_a} - \sum_\sigma \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{\overline{E}}}{\partial \left(\frac{\partial x_a}{\partial y_\sigma} \right)} \right)}{\partial y_\sigma} \right) \delta x_a$$

für unabhängige Werthe der n Variationen δx_a gleich Null sein. Die hier auftretenden partiellen Differentiationen gehören zu zwei verschiedenen Gattungen; bei der einen Gattung wird der Ausdruck $\sqrt{\overline{E}}$ als Function der unabhängig veränderlichen Grössen x_a und $\frac{\partial x_b}{\partial y_\sigma}$ betrachtet, bei der anderen Gattung, welche durch eine Klammer unterschieden ist, gelten die Grössen x_a und $\frac{\partial x_b}{\partial y_\sigma}$ als Functionen von den unabhängig veränderlichen Grössen y_σ.

Das Verschwinden des Ausdrucks (7.) *schliesst ein System von n partiellen Differentialgleichungen in sich, durch dessen vollständige Integration die n Variabelen x_a als Functionen der $n-l$ Variabelen y_σ bestimmt werden.*

Man darf annehmen, dass nach ausgeführter Integration ein System von l Gleichungen zwischen den Variabelen x_a gebildet werde, aus dem die Variabelen y_σ eliminirt sind. Sobald nun die Variabelen x_a als Functionen von $n-l$ Variabelen y_σ und von l Variabelen y_α aufgefasst werden, die zusammen ein System von unabhängigen Variabelen ausmachen, so ist es gestattet, bei dem Variationsproblem des Integrals A den Variabelen y_α beliebige constante Werthe beizulegen, da das Integral A die Grössen y_α nicht enthält. Alsdann determiniren jene l zwischen den Grössen x_a bestehenden Gleichungen die

Abhängigkeit zwischen den l constant zu setzenden Grössen y_α und den Grössen $x_\mathfrak{a}$.

Der Ausdruck (7.) kann verschiedene Gestalten annehmen, welche der Beachtung werth sind. Eine Umgestaltung folgt aus dem Bildungsgesetz des partiellen Differentialquotienten $\dfrac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\sigma}\right)}$. Wenn man die partiellen Differentialquotienten $\dfrac{\partial\overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}}$, wie auch sonst in den entsprechenden Fällen geschehen ist, aus dem allgemeinen Determinantenschema ohne Rücksicht auf die Gleichung $e_{\sigma,\tau}=e_{\tau,\sigma}$ ableitet, so liefern die Gleichungen (4.) die Darstellung

$$(8.)\qquad \frac{\partial\overline{E}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\sigma}\right)} = 2\frac{\partial\overline{E}}{\partial e_{\sigma,l+1}}\sum_\mathfrak{b} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\frac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial y_{l+1}}+\cdots+2\frac{\partial\overline{E}}{\partial e_{\sigma,n}}\sum_\mathfrak{b} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\frac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial y_n}.$$

Multiplicirt man hier beide Seiten mit dem Factor $\dfrac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{t}}$, und summirt nach dem Buchstaben $\mathfrak{a}$, so wird die rechte Seite gleich dem Ausdrucke $2\sum_\tau \dfrac{\partial\overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}}e_{\mathfrak{t},\tau}$, welcher verschwindet, sobald $\mathfrak{t}=\sigma'$ einer von σ verschiedenen Zahl aus der Reihe von $l+1$ bis n ist, dagegen den Werth $2\overline{E}$ annimmt, sobald $\mathfrak{t}=\sigma$ ist. Daher bestehen, je nachdem $\mathfrak{t}$ von der einen oder der anderen Beschaffenheit oder gleich einer Zahl α aus der Reihe von 1 bis l ist, die Gleichungen

$$(9.)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_\mathfrak{a}\frac{\partial\overline{E}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\sigma}\right)}\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_{\sigma'}} = 0, \qquad \sigma\gtrless\sigma', \\ \displaystyle\sum_\mathfrak{a}\frac{\partial\overline{E}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\sigma}\right)}\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\sigma} = 2\overline{E}, \\ \displaystyle\sum_\mathfrak{a}\frac{\partial\overline{E}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\sigma}\right)}\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\alpha} = 2\overline{E}\sum_\tau\frac{\partial\overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}}e_{\alpha,\tau}. \end{cases}$$

Insofern die Grössen $x_\mathfrak{a}$ als Functionen der Variabelen y_σ und y_α aufgefasst werden, lässt sich in (7.) die Variation $\delta x_\mathfrak{a}$ durch den Ausdruck

$$\sum_\mathfrak{t}\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{t}}\delta y_\mathfrak{t} = \sum_\alpha\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\alpha}\delta y_\alpha+\sum_{\sigma'}\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_{\sigma'}}\delta y_{\sigma'}$$

ersetzen.

Für einen beliebigen Werth $\mathfrak{k}$ ist

$$(10.)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_a \left(\frac{\partial \sqrt{\overline{E}}}{\partial x_a} - \sum_\sigma \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{\overline{E}}}{\partial \left(\frac{\partial x_a}{\partial y_\sigma} \right)} \right)}{\partial y_\sigma} \right) \frac{\partial x_a}{\partial y_\mathfrak{k}} \\ &= \sum_a \frac{\partial \sqrt{\overline{E}}}{\partial x_a} \frac{\partial x_a}{\partial y_\mathfrak{k}} + \sum_{a,\sigma} \frac{\partial \sqrt{\overline{E}}}{\partial \left(\frac{\partial x_a}{\partial y_\sigma} \right)} \frac{\partial^2 x_a}{\partial y_\sigma \partial y_\mathfrak{k}} - \sum_{a,\sigma} \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{\overline{E}}}{\partial \left(\frac{\partial x_a}{\partial y_\sigma} \right)} \frac{\partial x_a}{\partial y_\mathfrak{k}} \right)}{\partial y_\sigma}. \end{aligned} \right.$$

Die beiden ersten Aggregate der rechten Seite zusammengenommen stellen den Ausdruck $\frac{\partial (\sqrt{\overline{E}})}{\partial y_\mathfrak{k}}$, bei dem die $y_\mathfrak{k}$ die unabhängigen Veränderlichen sind, explicite dar. Das dritte Aggregat ist in Folge von (9.) für $\mathfrak{k} = \sigma' \gtrless \sigma$ gleich der Null, für $\mathfrak{k} = \sigma$ gleich dem Ausdrucke $-\frac{\partial (\sqrt{\overline{E}})}{\partial y_\sigma}$, für $\mathfrak{k} = \alpha$ gleich dem Ausdrucke

$$-\sum_\sigma \frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{\overline{E}}} \sum_\tau \frac{\partial \overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}} e_{\alpha,\tau} \right)}{\partial y_\sigma}.$$

Aus diesen Gründen wird die linke Seite von (10.) für $\mathfrak{k} = \sigma'$ gleich Null, und der Ausdruck (7.) gleich dem folgenden

$$(11.)\quad \sum_a \left(\frac{\partial \sqrt{\overline{E}}}{\partial x_a} - \sum_\sigma \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{\overline{E}}}{\partial \left(\frac{\partial x_a}{\partial y_\sigma} \right)} \right)}{\partial y_\sigma} \right) \frac{\partial x_a}{\partial y_\alpha} \delta y_\alpha.$$

Durch die Anwendung von (10.) für $\mathfrak{k} = \alpha$ verwandelt sich dagegen der Ausdruck (7.) in den Ausdruck

$$(12.)\quad \sum_\alpha \left(\frac{\partial (\sqrt{\overline{E}})}{\partial y_\alpha} - \sum_\sigma \frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{\overline{E}}} \sum_\tau \frac{\partial \overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}} e_{\alpha,\tau} \right)}{\partial y_\sigma} \right) \delta y_\alpha.$$

Das Verschwinden von (11.) repräsentirt vermöge der Unabhängigkeit der Variationen δy_α ein System von l Gleichungen.

2.

Der Uebergang von der Form $f(dx)$ zu der Form $\overline{g(dy)}$ kann dadurch bewerkstelligt werden, dass an die Stelle von jedem der n Differentiale dx_a

der ersteren der zugeordnete lineare Ausdruck mit den $n-l$ Differentialen dy_σ der letzteren gesetzt wird

$$(13.) \qquad \frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_{l+1}} dy_{l+1} + \frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_{l+2}} dy_{l+2} + \cdots + \frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_n} dy_n .$$

Auf die Transformation einer Form $f(dx)$ in eine Form $g(dy)$ von ebenso vielen Differentialen ist dieses Journal Bd. 70, pag. 72 der Begriff gegründet, *dass die beiden Formen zu derselben Classe gehören.* Nach dieser Anschauung fällt die erwähnte Beziehung der Form $f(dx)$ zu der Form $\overline{g(dy)}$ unter denjenigen Begriff, welchen *Gauss, disquisitiones arithmeticae*, art. 280 für die Beziehung einer ternären quadratischen Form zu einer binären quadratischen Form aufgestellt hat, und der in dem vorliegenden Falle mit dem Namen zu bezeichnen ist, *dass die Form* $\overline{g(dy)}$ *von* $n-l$ *Differentialen durch die Form* $f(dx)$ *von* n *Differentialen dargestellt wird.* *Gauss* erwähnt an der angeführten Stelle die Darstellung von der Determinante der betreffenden binären Form durch die *adjuncta* der zugehörigen ternären; demgemäss ist gegenwärtig die Determinante $\overline{E}$ der Form $\overline{g(dy)}$ durch die von der Form $f(dx)$ herrührenden Grössenverbindungen auszudrücken.

Bei der in (3.) definirten Form $g(dy)$ bezeichne man die Determinante und die adjungirten Elemente folgendermassen

$$(14.) \qquad E = |e_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}|, \quad \frac{\partial E}{\partial e_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}} = E_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}, \quad \frac{E_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{E} = (\mathfrak{k}, \mathfrak{l}).$$

Dann hängen die Coefficienten der *forma adjuncta* von $g(dy)$ mit den Coefficienten der *forma adjuncta* von $f(dx)$ durch die folgenden Gleichungen zusammen, in denen die Grössen $y_\mathfrak{k}$ als Functionen der Grössen $x_\mathfrak{a}$ erscheinen,

$$(15.) \qquad \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\Delta} \frac{\partial y_\mathfrak{k}}{\partial x_\mathfrak{a}} \frac{\partial y_\mathfrak{l}}{\partial x_\mathfrak{b}} = (\mathfrak{k}, \mathfrak{l}).$$

Nach einem bekannten Determinantensatze ist

$$(16.) \qquad \Sigma \pm E_{1,1} E_{2,2} \ldots E_{l,l} = E^{l-1} \Sigma \pm e_{l+1,l+1} e_{l+2,l+2} \cdots e_{n,n},$$

und daher vermöge (6.) und (14.), wenn γ, ε wie α, β die Reihe der Zahlen von 1 bis l durchlaufen,

$$(17.) \qquad |(\gamma, \varepsilon)| = \frac{\overline{E}}{E}.$$

Hier können die Elemente (γ, ε) der linken Seite mit Hülfe von (15.) durch die Coefficienten der *forma adjuncta* von $f(dx)$ dargestellt werden. Das Product der Determinante $|(\gamma, \varepsilon)|$ mit der Determinante Δ ist aber gleich der

mit dem Factor $(-1)^l$ versehenen auf die gegenwärtig übliche Weise gebildeten Determinante des Systems

$$(18.)\qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_l}{\partial x_1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_l}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_l}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_l}{\partial x_1} & \frac{\partial y_l}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_l}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

oder, zufolge der in der Einleitung gegebenen Definition, gleich der Grösse D_0. Denn wenn man das System (18.) mit dem System

$$(19.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{A_{1,1}}{\triangle} & \cdots & \frac{A_{1,n}}{\triangle} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{n,1}}{\triangle} & \cdots & \frac{A_{n,n}}{\triangle} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

dessen Determinante den Werth $\frac{1}{\triangle}$ hat, Reihe für Reihe combinirt, die entsprechenden Glieder multiplicirt, und die Summe nimmt, so resultirt ein System von $(n+l)^2$ Grössen, dessen Determinante gleich dem Product der Determinante $|(\gamma, \varepsilon)|$ in den Factor $(-1)^l$ wird. Somit gilt die Gleichung

$$(20.)\qquad D_0 = \triangle\,|(\gamma, \varepsilon)|,$$

und wegen (17.) die Gleichung

$$(21.)\qquad D_0 = \frac{\triangle\,\overline{E}}{E}.$$

Die so eben aufgestellte Gleichung kommt zur Anwendung, sobald das Integral A durch die Einführung von $n-l$ beliebigen Variabelen $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots x_n$ aus den n Variabelen x_a, als Integrationsvariabelen, transformirt werden soll.

Hiebei ist das positive Element $dy_{l+1}dy_{l+2}\dots dy_n$ durch das Product des positiven Elements $dx_{l+1}dx_{l+2}\dots dx_n$ in den positiven Werth der Determinante

$$\Sigma\pm\left(\frac{\partial y_{l+1}}{\partial x_{l+1}}\right)\dots\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right)$$

zu ersetzen, in welcher die Grössen y_σ als Functionen der Grössen y_α und x_τ betrachtet werden. Für diese Determinante hat *Jacobi* in der Abhandlung *de determinantibus functionalibus*, art. 12., dieses Journal Band 22, pag. 342, die Gleichung angegeben

$$(22.)\qquad \Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial y_n}{\partial x_n}=\Sigma\pm\left(\frac{\partial y_{l+1}}{\partial x_{l+1}}\right)\dots\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right)\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial y_l}{\partial x_l}.$$

Mithin entsteht für das Integral A die Transformation

$$(23.)\qquad A=\int\sqrt{E}\,\frac{\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial y_n}{\partial x_n}}{\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial y_l}{\partial x_l}}\,dx_{l+1}\dots dx_n.$$

Nun sind die Determinanten Δ und E bekanntlich durch die Gleichung verbunden

$$(24.)\qquad E=\Delta\left(\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right)^{-2}.$$

Daher wird der Zähler des Ausdruckes unter dem Integralzeichen in (23.) gleich der Grösse $\sqrt{E}\sqrt{\frac{\Delta}{E}}$, oder nach (21.) gleich der Grösse $\sqrt{D_0}$, und es ergiebt sich die Transformation

$$(25.)\qquad A=\int\sqrt{D_0}\,\frac{dx_{l+1}\dots dx_n}{\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial y_l}{\partial x_l}}.$$

Diese Darstellung des Integrals (1.) enthält die Variabelen y_σ nicht, und bringt somit die Thatsache zur Evidenz, dass der Werth des Integrals (1.) von der Wahl des Systems der y_σ nicht abhängt.

3.

Es ist wünschenswerth, den Ausdruck (7.), von dessen Nullwerden das Verschwinden der ersten Variation des Integrals A bedingt ist, in eine Gestalt zu bringen, welche mit der Gestalt des Integrals A in (25.) harmonirt, und die Abhängigkeit der constant zu setzenden Functionen y_α von den Variabelen x_a hervortreten lässt. Hiebei kann man von der Beobachtung ausgehen, dass, wenn dem Elemente des Integrals (1.) und des

Integrals (25.) das Element $dy_1 dy_2 \dots dy_l$ als Factor beigefügt, und in dem letzteren der Quotient $\frac{dy_1 dy_2 \dots dy_l}{\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial y_l}{\partial x_l}}$ durch das Element $dx_1 dx_2 \dots dx_l$ ersetzt wird, was unzweifelhaft erlaubt ist, die folgende Gleichung zwischen zwei n fachen Integralen entsteht

$$(26.) \qquad \int \sqrt{D_0}\, dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int \sqrt{E}\, dy_1 dy_2 \dots dy_n.$$

Dann wird der angedeutete Zweck mit Hülfe des folgenden allgemeinen Theorems der Variationsrechnung erreicht, das meines Wissens noch nicht ausgesprochen ist.

Theorem. *Es sei F eine Function von den n Variabelen x_a, den n Variabelen y_b, und den $\frac{n(n+1)}{2}$ partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_a}{\partial y_b}$. Indem man in F die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_a}{\partial y_b}$ durch die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial y_t}{\partial x_t}$ ausdrückt, und statt des positiven Elements $dx_1 dx_2 \dots dx_n$ den Quotienten des positiven Elements $dy_1 dy_2 \dots dy_n$ durch den positiven Werth der Functionaldeterminante $\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$ substituirt, gehe das n fache Integral $\int F dx_1 dx_2 \dots dx_n$ in das n fache Integral $\int G dy_1 dy_2 \dots dy_n$ über. Dann besteht für ein System von unabhängigen Variationen δx_a und von correspondirenden Variationen $\delta y_b = \sum_t \frac{\partial y_b}{\partial x_t} \delta x_t$ die identische Gleichung*

$$(27.) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{F} \sum_b \left(\frac{\partial F}{\partial y_b} - \sum_b \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial y_b}{\partial x_b} \right)} \right)}{\partial x_b} \right) \delta y_b \\ &+ \frac{1}{G} \sum_a \left(\frac{\partial G}{\partial x_a} - \sum_t \frac{\partial \left(\frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial x_a}{\partial y_t} \right)} \right)}{\partial y_t} \right) \delta x_a = 0. \end{aligned} \right.$$

Der *Beweis* dieses Theorems ergiebt sich dadurch, dass die beiden Seiten der vorausgesetzten Gleichung

$$(28.) \qquad F dx_1 dx_2 \dots dx_n = G dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

vollständig variirt werden. Bei der mittelst der Charakteristik δ angedeuteten Variation möge jede Variabele x_a das Increment δx_a, jede Variabele y_b das In-

crement $\delta' y_\mathfrak{b}$ erhalten, und zwar werden diese $2n$ Incremente nach dem Vorgange von *Lagrange*, mécanique analytique, première partie, section IV, art. 19, von einander unabhängig angenommen. Um die entsprechende Variation des Elements $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ zu erhalten, darf man für dasselbe, indem die Variabelen $x_\mathfrak{a}$ als Functionen eines beliebigen Systems von unabhängigen Variabelen $z_\mathfrak{t}$ aufgefasst werden, den Ausdruck setzen

$$(29.) \qquad dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial z_1} \frac{\partial x_2}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial z_n} dz_1 dz_2 \ldots dz_n$$

und denselben so variiren, dass die Grössen $z_\mathfrak{t}$ ungeändert bleiben. Dann entsteht nach bekannten Determinantensätzen die Gleichung

$$(30.) \qquad \delta(dx_1 dx_2 \ldots dx_n) = \sum_\mathfrak{a} \frac{\partial \delta x_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{a}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

welche *Lagrange* l. c., section VII, art. 11, für $n = 3$ aufgestellt hat. Demnach gilt die Gleichung

$$(31.) \qquad \left.\begin{array}{r} \delta(F dx_1 dx_2 \ldots dx_n) \\ = \end{array}\right\} \left(\sum_\mathfrak{a} \frac{\partial F}{\partial x_\mathfrak{a}} \delta x_\mathfrak{a} + \sum_\mathfrak{b} \frac{\partial F}{\partial y_\mathfrak{b}} \delta' y_\mathfrak{b} + \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right)} \delta\left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right) \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

welche leicht in die folgende verwandelt wird

$$(32.) \qquad \left.\begin{array}{r} \delta(F dx_1 dx_2 \ldots dx_n) = \sum_\mathfrak{a} \frac{\partial (F \delta x_\mathfrak{a})}{\partial x_\mathfrak{a}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\ + \end{array}\right\} \left(\sum_\mathfrak{b} \frac{\partial F}{\partial y_\mathfrak{b}} \left(\delta' y_\mathfrak{b} - \sum_\mathfrak{a} \frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}} \delta x_\mathfrak{a} \right) + \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right)} \left(\delta\left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right) - \sum_\mathfrak{a} \frac{\partial \left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right)}{\partial x_\mathfrak{a}} \delta x_\mathfrak{a} \right) \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Die beiden Gattungen von partiellen Differentiationen, von denen eine die Grössen $x_\mathfrak{a}$, $y_\mathfrak{b}$, $\frac{\partial y_\mathfrak{c}}{\partial x_\mathfrak{b}}$, die andere die Grössen $x_\mathfrak{a}$ allein als unabhängige Variabele voraussetzt, sind hier, wie in dem oben erwähnten Falle, unterschieden. Wird der Kürze halber die Bezeichnung

$$(33.) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial y_n} = C$$

eingeführt, so hat der partielle Differentialquotient $\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}$ den Ausdruck

$$(33'.) \qquad \frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}} = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial \left(\frac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial y_\mathfrak{b}}\right)}.$$

Dann kann die vollständige Variation $\delta\left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right)$ so abgeleitet werden, dass man zuerst, während die Variabelen $x_\mathfrak{a}$ ruhen, den Variabelen $y_\mathfrak{b}$ die Incremente $\delta' y_\mathfrak{b}$ beilegt, hierauf, während die Variabelen $y_\mathfrak{b}$ ruhen, den Variabelen $x_\mathfrak{a}$ die Incremente $\delta x_\mathfrak{a}$ beilegt, und dann die beiden Resultate addirt. So entsteht der Ausdruck

$$(34.)\quad \begin{cases} \delta\left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right) = \frac{\partial \delta' y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}} - \frac{1}{C^2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}} \frac{\partial C}{\partial\left(\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{t}}\right)} \frac{\partial \delta x_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{t}} \frac{\partial C}{\partial\left(\frac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial y_\mathfrak{b}}\right)} \\ \qquad + \frac{1}{C}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}} \frac{\partial^2 C}{\partial\left(\frac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial y_\mathfrak{b}}\right)\partial\left(\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{t}}\right)} \frac{\partial \delta x_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{t}}, \end{cases}$$

oder, mit Hülfe eines bekannten Determinantensatzes,

$$(34^a.)\quad \delta\left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right) = \frac{\partial \delta' y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}} - \frac{1}{C^2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}} \frac{\partial C}{\partial\left(\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{b}}\right)} \frac{\partial C}{\partial\left(\frac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial y_\mathfrak{t}}\right)} \frac{\partial \delta x_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{t}},$$

oder, durch Benutzung von (33^a.),

$$(35.)\quad \delta\left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right) = \frac{\partial \delta' y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}} - \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}} \frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}} \frac{\partial y_\mathfrak{t}}{\partial x_\mathfrak{b}} \frac{\partial \delta x_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{t}},$$

oder endlich auch

$$(36.)\quad \delta\left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right) = \frac{\partial \delta' y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}} - \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}} \frac{\partial \delta x_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{b}}.$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$(37.)\quad \delta\left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right) - \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial\left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right)}{\partial x_\mathfrak{a}} \delta x_\mathfrak{a} = \frac{\partial\left(\delta' y_\mathfrak{b} - \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}} \delta x_\mathfrak{a}\right)}{\partial x_\mathfrak{b}}.$$

Wenn man jetzt die Ausdrücke

$$(38.)\quad \delta y_\mathfrak{b} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}} \delta x_\mathfrak{a}$$

anwendet, so nimmt die Gleichung (32.) die Gestalt an

$$(39.)\quad \begin{cases} \delta(F dx_1 dx_2 \ldots dx_n) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial(F \delta x_\mathfrak{a})}{\partial x_\mathfrak{a}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\ + \left(\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial F}{\partial y_\mathfrak{b}} (\delta' y_\mathfrak{b} - \delta y_\mathfrak{b}) + \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}} \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial y_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{b}}\right)} \frac{\partial(\delta' y_\mathfrak{b} - \delta y_\mathfrak{b})}{\partial x_\mathfrak{b}} \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \end{cases}$$

und diese verwandelt sich vermöge des für die Variationsprobleme allgemein gebräuchlichen Verfahrens in die folgende

$$(40.)\quad \left\{\begin{aligned}\delta(F\,dx_1dx_2\ldots dx_n) = &\left(\sum_a \frac{\partial(F\delta x_a)}{\partial x_a} + \sum_{b,b} \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial y_b}{\partial x_b}\right)}(\delta' y_b - \delta y_b)\right)}{\partial x_b}\right) dx_1dx_2\ldots dx_n\\ &+\sum_b\left(\frac{\partial F}{\partial y_b} - \sum_b \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial y_b}{\partial x_b}\right)}\right)}{\partial x_b}\right)(\delta' y_b - \delta y_b)\,dx_1dx_2\ldots dx_n.\end{aligned}\right.$$

Die entsprechenden Schritte können bei dem Ausdruck $G\,dy_1dy_2\ldots dy_n$ ausgeführt werden, und liefern mittelst der Ausdrücke

$$(38'.)\qquad \delta' x_t = \sum_t \frac{\partial x_t}{\partial y_t}\delta' y_t$$

das entsprechende Ergebniss

$$(40'.)\quad \left\{\begin{aligned}\delta(G\,dy_1dy_2\ldots dy_n) = &\left(\sum_b \frac{\partial(G\,\delta' y_b)}{\partial y_b} + \sum_{a,t} \frac{\partial\left(\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_t}\right)}(\delta x_a - \delta' x_a)\right)}{\partial y_t}\right) dy_1dy_2\ldots dy_n\\ &+\sum_a\left(\frac{\partial G}{\partial x_a} - \sum_t \frac{\partial\left(\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_t}\right)}\right)}{\partial y_t}\right)(\delta x_a - \delta' x_a)\,dy_1dy_2\ldots dy_n.\end{aligned}\right.$$

Durch bekannte Schlüsse folgt aus der Gleichheit der linken Seiten von (40.) und (40′.), dass diejenigen Bestandtheile der rechten Seiten einander gleich sind, welche respective die Grössen $\delta' y_b - \delta y_b$ und $\delta x_a - \delta' x_a$ linear und nicht differentiirt enthalten, und die verschwinden müssen, wenn die erste Variation des über ein gegebenes Gebiet auszudehnenden Integrals

$$\int F\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \int G\,dy_1\,dy_2\ldots dy_n$$

gleich Null werden soll. Offenbar hängen die Differenzen $\delta' y_b - \delta y_b$ mit den Differenzen $\delta' x_a - \delta x_a$ durch die Gleichungen

$$\delta' y_b - \delta y_b = \sum_a \frac{\partial x_b}{\partial x_a}(\delta' x_a - \delta x_a)$$

zusammen, welche wie die zwischen den δy_b und den δx_a bestehenden Gleichungen (38.) gebildet sind. Da nun in (40.) die Differenzen $\delta' y_b - \delta y_b$, in (40′.) die *entgegengesetzt* genommenen Differenzen $\delta x_a - \delta' x_a$ auftreten, so erzeugt die Combination der bezeichneten Gleichung, die zwischen den nach den $\delta' y_b - \delta y_b$ und den

$\delta x_a - \delta' x_a$ linearen Ausdrücken besteht, mit der Gleichung (28.) das zu beweisende Resultat (27.).

Die Anwendung des soeben begründeten Theorems auf die Gleichung (26.) führt zu dem Ergebniss

$$(41.)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{D_0}} \left(\sum_b \frac{\partial \sqrt{D_0}}{\partial y_b} - \sum_{b,b} \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{D_0}}{\partial \left(\frac{\partial y_b}{\partial x_b} \right)} \right)}{\partial x_b} \right) \delta y_b \\ &+ \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\sum_a \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial x_a} - \sum_{a,l} \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \left(\frac{\partial x_a}{\partial y_l} \right)} \right)}{\partial y_l} \right) \delta x_a = 0. \end{aligned} \right.$$

Hier ist der Ausdruck $\sqrt{E}$ durch die Gleichungen (6.) und (4.) explicite als Function der Coefficienten $a_{c,b}$, welche die Variabelen x_a enthalten, und der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_a}{\partial y_a}$ gegeben. Die nach dem Buchstaben l auszuführende Summation giebt also einen verschwindenden Beitrag, so lange $l = 1, 2, \ldots l$ ist, und geht in die Summation über, welche in (7.) nach dem Buchstaben σ genommen wird. Dagegen ist der Ausdruck D_0 durch die Gleichungen (20.) und (15.) explicite als Function der Verbindungen $\frac{A_{c,b}}{\Delta}$, welche die Variabelen x_a enthalten, und der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial y_a}{\partial x_b}$ gegeben. Demnach treten die Variabelen y_b überhaupt nicht auf, und von den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial y_b}{\partial x_b}$ nur diejenigen, bei denen $b = 1, 2, \ldots l$ ist. *Aus diesen Gründen ergiebt die Gleichung* (41.) *für den Ausdruck* (7.), *nachdem derselbe durch die Grösse* $\sqrt{E}$ *dividirt ist, die folgende Transformation*

$$(42.)\quad \frac{1}{\sqrt{D_0}} \sum_{a,b} \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{D_0}}{\partial \left(\frac{\partial y_a}{\partial x_b} \right)} \right)}{\partial x_b} \delta y_a = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\sum_a \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial x_a} - \sum_{a,\sigma} \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \left(\frac{\partial x_a}{\partial y_\sigma} \right)} \right)}{\partial y_\sigma} \right) \delta x_a .$$

Die linke Seite von (42.), gleich Null gesetzt, bestimmt die gesuchte Abhängigkeit der Grössen y_a von den Variabelen x_a. Der Umstand, dass hier die Variationen δy_a fehlen, stimmt mit der bewiesenen Gleichheit der Ausdrücke (7.) und (11.) überein.

4.

Dem Nachweise des Zusammenhanges, welcher zwischen der linken Seite der Gleichung (42.) und dem in der Einleitung erwähnten auf die Form $\lambda(dx)$ bezüglichen Problem *de maximis et minimis* Statt findet, möge eine *Umformung der für dieses Problem charakteristischen Verbindungen* vorangehen. Wenn man die nach der Grösse dx_a genommene Ableitung des Ausdruckes

$$(43.) \qquad -\lambda(dx) + \omega f(dx) + \sum_{\alpha} \theta_\alpha dy_\alpha$$

mit einer Grösse $d'x_a$ aus einem neuen System von unabhängigen Differentialen multiplicirt, und dann in Bezug auf den Buchstaben a eine Summation vornimmt, so entsteht mittelst der Bezeichnungen

$$(44.) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_a \frac{\partial f(dx)}{\partial dx_a} d'x_a = \frac{1}{2} \sum_{a,b} a_{a,b} dx_a d'x_b = f(dx, d'x), \\ \frac{1}{2} \sum_a \frac{\partial \lambda(dx)}{\partial dx_a} d'x_a = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \lambda_{a,b} dx_a d'x_b = \lambda(dx, d'x), \end{cases}$$

welche dieses Journal Band 71, pag. 288, und Band 72, pag. 16 ebenfalls gebraucht sind, der Ausdruck

$$(45.) \qquad -2\lambda(dx, d'x) + 2\omega f(dx, d'x) + \sum_a \theta_\alpha d'y_\alpha.$$

Derselbe muss, damit dem Problem *de maximis et minimis* genügt werde, verbunden mit den l Gleichungen

$$(46.) \qquad dy_\alpha = 0$$

für jedes System von Differentialen $d'x_a$ verschwinden. Vermöge dieses Factums kann man unter Benutzung eines besonderen Systems von Differentialen $d'x_a$ die l Grössen θ_α, ohne vorhergehende Auflösung der zur Bestimmung der Grösse ω dienenden Gleichung

$$(47.) \qquad D(\omega) = D_0 \omega^{n-l} + D_1 \omega^{n-l-1} + \cdots + D_{n-l} = 0$$

darstellen. Ein System von Differentialen $\delta'x_a$, welches *der Combination einer quadratischen Form $f(\delta'x)$ mit einem System von l constant zu setzenden Functionen y_α zugehörig* ist, ergiebt sich aus der Aufgabe, *dass die vollständige Ableitung des Ausdruckes $(2f(\delta'x))^{\frac{1}{2}}$ in Bezug auf die Grössen $\delta'x_a$ zum Verschwinden gebracht werden soll, während die zugeordneten Grössen $\delta'y_1$, $\delta'y_2$, ... $\delta'y_l$ vorgeschriebene Werthe annehmen.* Diese Aufgabe erzeugt, wenn r_1, r_2, ... r_l zu bestimmende Functionen bedeuten, das System von Gleichungen

$$(48.) \qquad a_{a,1}\delta'x_1 + a_{a,2}\delta'x_2 + \cdots + a_{a,n}\delta'x_n = r_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_a} + r_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_a} + \cdots + r_l \frac{\partial y_l}{\partial x_a}.$$

Dieselbe Aufgabe ist dieses Journal Band 74 pag. 144 für $l = 1$ behandelt worden. Daselbst habe ich den Ausdruck eingeführt, *dass die betreffende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung* $\delta' x_a$ *gegen die Mannigfaltigkeit der* $(n-1)^{ten}$ *Ordnung* $y_1 = \text{const.}$ *mit Rücksicht auf die Form* $2f(\delta' x)$ *normal sei*, und bemerkt, *dass die Gleichung* $2f(\delta x, \delta' x) = 0$ *die Thatsache charakterisire, dass die Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung* δx_a *und die Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung* δx_a *mit Rücksicht auf die Form* $2f(\delta x)$ *gegen einander normal oder orthogonal sind.*

Aus (48.) folgt durch Auflösung das System von Gleichungen

$$(48^a.) \qquad \delta' x_b = \sum_a \frac{A_{a,b}}{\triangle}\Big(r_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_a} + \cdots + r_l \frac{\partial y_l}{\partial x_a}\Big).$$

Dasselbe liefert für die Grössen $\delta' y_\beta = \sum_b \frac{\partial y_\beta}{\partial x_b} \delta' x_b$ die Ausdrücke

$$(49.) \qquad \delta' y_\beta = \sum_{a,b} \frac{A_{a,b}}{\triangle}\Big(r \frac{\partial y_1}{\partial x_a} + \cdots + r_l \frac{\partial y_l}{\partial x_a}\Big) \frac{\partial y_\beta}{\partial x_b},$$

welche nach (15.) gleich den folgenden sind

$$(49^a.) \qquad \delta' y_\beta = (1, \beta) r_1 + (2, \beta) r_2 + \cdots + (l, \beta) r_l.$$

Nun habe man, wie dieses Journal Bd. 71, pag. 277,

$$(15^a.) \qquad [\alpha, \beta] = \frac{\partial \log |(\gamma, \varepsilon)|}{\partial (\alpha, \beta)},$$

dann ergiebt sich durch Auflösung

$$(49^b.) \qquad r_a = [\alpha, 1] \delta' y_1 + \cdots + [\alpha, l] \delta' y_l,$$

und die Grössen $\delta' x_b$ werden durch die gegebenen Werthe $\delta' y_\gamma$ folgendermassen ausgedrückt

$$(50.) \qquad \delta' x_b = \sum_{a,\alpha,\gamma} \frac{A_{a,b}}{\triangle} [\alpha, \gamma] \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_a} \delta' y_\gamma.$$

Ferner folgt aus (48.) die Gleichung

$$(51.) \qquad 2f(dx, \delta' x) = \sum_{a,b} a_{a,b} dx_a \delta' x_b = \sum_{\alpha,\gamma} [\alpha, \gamma] dy_\alpha \delta' y_\gamma.$$

Wenn bei dem Werthe $n = 3$ die Form $2f(dx)$ als das Quadrat des von dem Punkte (x_1, x_2, x_3) ausgehenden Linearelements im Raume gedeutet wird, so stellen für $l = 2$ die Gleichungen $y_1 = \text{Const.}$ und $y_2 = \text{Const.}$ *eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung* oder *eine Linie* dar, und zwar ist die Mannigfaltigkeit der in (50.) definirten Grössen $\delta' x_b$ gegen die bezeichnete Linie *normal. Demgemäss darf man bei beliebigen Werthen von* n *und* l *sagen, dass die Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung der in* (50.) *definirten*

Grössen $\delta' x_\mathfrak{b}$ mit Rücksicht auf die Form $2f(\delta' x)$ gegen diejenige Mannigfaltigkeit der $(n-l)^{ten}$ Ordnung normal sei, welche durch die l Gleichungen $y_\alpha = \text{Const.}$ für die n Variabelen $x_\mathfrak{a}$ bestimmt wird.

Für diejenigen Werthe, die aus den Ausdrücken (50.) entstehen, sobald alle $\delta' y_\gamma$ mit Ausnahme eines einzigen durch die Null, dieses eine aber durch die Einheit ersetzt wird, werde ich das Zeichen anwenden

$$(52.) \qquad \frac{\delta' x_\mathfrak{b}}{\delta' y_\gamma} = \frac{\delta x_\mathfrak{b}}{\delta y_\gamma} = \sum_{\mathfrak{a},\alpha} \frac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\triangle} [\alpha, \gamma] \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\mathfrak{a}}.$$

Wie leicht einzusehen, hat die Summe

$$\sum_\mathfrak{b} \frac{\delta' x_\mathfrak{b}}{\delta' y_\gamma} \frac{\partial y_{\gamma'}}{\partial x_\mathfrak{b}}$$

den Werth Eins oder Null, je nachdem die aus der Reihe von 1 bis l genommene Zahl γ' gleich γ oder von γ verschieden ist.

Die Substitution der so eben definirten Grössen $\delta' x_\mathfrak{b}$ statt der $d' x_\mathfrak{b}$ in den Ausdruck (45.) bewirkt nach (51.) das Verschwinden des Ausdruckes $f(dx, \delta' x)$, sobald die Gleichungen (46.) in Kraft treten, und daher das Wegfallen der Grösse ω. So entsteht die Gleichung

$$(53.) \qquad -2\lambda(dx, \delta' x) + \sum_\alpha \theta_\alpha \delta' y_\alpha = 0,$$

aus der wegen der Unabhängigkeit der l Grössen $\delta' y_\alpha$ mittelst (52.) die gesuchte Bestimmung der Grössen θ_α hervorgeht

$$(54.) \qquad \theta_\alpha = 2\lambda\left(dx, \frac{\delta' x}{\delta' y_\alpha}\right).$$

Durch die Einsetzung dieser Werthe verwandelt sich (45.) in den Ausdruck

$$(45''.) \qquad -2\lambda(dx, d' x) + 2\sum_\gamma \lambda\left(dx, \frac{\delta' x}{\delta' y_\gamma}\right) d' y_\gamma + 2\omega f(dx, d' x).$$

Man kann leicht erkennen, dass die Forderung des Problems *de maximis et minimis*, dieser Ausdruck solle unabhängig von den Werthen $d' x_\mathfrak{a}$ verschwinden, die l Gleichungen (46.) mit umfasst, sobald der singuläre Fall, dass ω den Werth Null erhalten könne, ausgeschlossen wird. Denn wenn in (45''.) die besonderen Werthe $d' x_\mathfrak{a} = \delta' x_\mathfrak{a}$ eingeführt werden, so verschwindet das Aggregat der beiden ersten Termini, und der übrig bleibende Terminus $2\omega f(dx, \delta' x)$ muss nach jener Forderung gleich Null sein. Da nun nach der Annahme ω nicht Null sein darf, so muss der Factor $f(dx, \delta' x)$ verschwinden. Vermöge der Darstellung in (51.) und der Unab-

hängigkeit der Grössen δy_γ müssen deshalb die Summen $\sum_\alpha [\alpha, \gamma] dy_\alpha$ gleich Null sein, und weil die Determinante der Verbindungen $[\alpha, \gamma]$ nothwendig von Null verschieden ist, so sind die Differentiale dy_α nothwendig gleich Null, wie behauptet worden. Aus dieser Ueberlegung lässt sich schliessen, dass die Grösse ω dem Problem *de maximis et minimis* gemäss bestimmt wird, wenn von dem nach den Systemen dx_a und $d'x_a$ linearen Ausdruck (45ᵃ.) die Determinante der n^{ten} Ordnung $\mathfrak{D}(\omega)$ gebildet und gleich Null gesetzt wird. Weil aber die Grösse ω auch durch die Gleichung (47.) $D(\omega) = 0$ determinirt ist, so können sich die Verbindungen $\mathfrak{D}(\omega)$ und $D(\omega)$ nur durch einen Factor unterscheiden, und es kommt darauf an, denselben zu ermitteln.

Nach der in der Einleitung gegebenen Definition ist die Function $D(\omega)$ die nach dem gegenwärtig üblichen Algorithmus gebildete und hierauf mit dem Factor $(-1)^l$ multiplicirte Determinante des Schemas

$$(55.)\qquad \begin{vmatrix} -\lambda_{1,1}+\omega a_{1,1} & \cdots & -\lambda_{1,n}+\omega a_{1,n} & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_l}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda_{n,1}+\omega a_{n,1} & \cdots & -\lambda_{n,n}+\omega a_{n,n} & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_l}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_l}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn man dieses Schema mit dem Schema

$$(56.)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\delta' x_1}{\delta' y_1} & \cdots & \frac{\delta' x_n}{\delta' y_1} & -\omega[1,1] & \cdots & -\omega[1,l] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\delta' x_1}{\delta' y_l} & \cdots & \frac{\delta' x_n}{\delta' y_l} & -\omega[l,1] & \cdots & -\omega[l,l] \end{vmatrix},$$

dessen Determinante den Werth $\frac{(-\omega)^l}{|(\gamma, \varepsilon)|}$ hat, so verbindet, dass in jeder Combination einer Horizontalreihe des einen und des anderen die gleichstelligen Glieder multiplicirt, und die Producte addirt werden, so resultirt vermöge der

angegebenen Eigenschaften der Ausdrücke $\frac{\delta' x_\mathfrak{b}}{\delta' y_\gamma}$ das Schema

$$(57.)\qquad \begin{vmatrix} -\lambda_{1,1}+\omega a_{1,1} & \cdots & -\lambda_{1,n}+\omega a_{1,n} & -\sum_\mathfrak{c}\lambda_{1,\mathfrak{c}}\frac{\delta' x_\mathfrak{c}}{\delta' y_1} & \cdots & -\sum_\mathfrak{c}\lambda_{1,\mathfrak{c}}\frac{\delta' x_\mathfrak{c}}{\delta' y_l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda_{n,1}+\omega a_{n,1} & \cdots & -\lambda_{n,n}+\omega a_{n,n} & -\sum_\mathfrak{c}\lambda_{n,\mathfrak{c}}\frac{\delta' x_\mathfrak{c}}{\delta' y_1} & \cdots & -\sum_\mathfrak{c}\lambda_{n,\mathfrak{c}}\frac{\delta' x_\mathfrak{c}}{\delta' y_l} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_l}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

dessen Determinante nach bekannten Sätzen mit der in Rede stehenden Determinante des n^{ten} Grades $\mathfrak{D}(\omega)$ zusammenfällt. *Die Determinanten* $D(\omega)$ *und* $\mathfrak{D}(\omega)$ *sind daher durch die Gleichung verbunden*

$$(58.)\qquad \mathfrak{D}(\omega) = \frac{\omega^l D(\omega)}{|(\gamma,\varepsilon)|}.$$

Zugleich hat man nach (47.) für $\mathfrak{D}(\omega)$ die Darstellung

$$(58^a.)\qquad \mathfrak{D}(\omega) = \frac{D_0\omega^n + D_1\omega^{n-1} + \cdots + D_{n-l}\omega^l}{|(\gamma,\varepsilon)|}.$$

Da die Function $\mathfrak{D}(\omega)$, nach den fallenden Potenzen von ω entwickelt, mit dem Ausdruck $\triangle\omega^n$ beginnt, so ist in der vorstehenden Relation auch die Gleichung (20.) enthalten.

5.

Die Formation eines Systems von solchen Grössen, wie sie in (50.) definirt sind, bietet auch eine Handhabe zu einer neuen Darstellung der nach den drei Systemen $dx_\mathfrak{a}$, $d'x_\mathfrak{b}$, δy_α linearen Function $\lambda(dx, d'x)$. Diese Function ist dieses Journal Band 71, pag. 289 durch die Gleichungen definirt

$$(59.)\qquad \begin{cases} 2\lambda(dx, d'x) = -\sum_{\alpha,\gamma}[\alpha,\gamma]\delta y_\alpha \eta_\gamma(dx, d'x), \\ \eta_\gamma(dx, d'x) = -\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\frac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\triangle} f_\mathfrak{a}(dx, d'x)\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\mathfrak{b}} + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\frac{\partial^2 y_\gamma}{\partial x_\mathfrak{a}\partial x_\mathfrak{b}} dx_\mathfrak{a} d'x_\mathfrak{b}, \\ f_\mathfrak{a}(dx, d'x) = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}\left(\frac{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}}}{\partial x_\mathfrak{b}} + \frac{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\partial x_\mathfrak{g}} - \frac{\partial a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}}{\partial x_\mathfrak{a}}\right) dx_\mathfrak{g} d'x_\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Ferner findet sich für die Function $f_\mathfrak{a}(dx, d'x)$ dieses Journal Bd. 72, pag. 16 die Gleichung

$$(59^a.)\qquad \sum_\mathfrak{a}\left(\sum_\mathfrak{c} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} d\, d'x_\mathfrak{c} + f_\mathfrak{a}(dx, d'x)\right)\delta x_\mathfrak{a} = -\delta f(dx, d'x) + df(\delta x, d'x) + d'f(\delta x, dx).$$

Man kann nun dem Ausdrucke $\eta_\gamma(dx, d'x)$ aus (59.) die Gestalt geben

$$\eta_\gamma(dx, d'x) = -\sum_{a,b} \frac{A_{a,b}}{\triangle} f_a(dx, d'x) \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_b} - \sum_b dd'x_b \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_b} + dd'y_\gamma,$$

oder

$$\eta_\gamma(dx, d'x) = -\sum_{a,b} \Big(\sum_c a_{a,c} dd'x_c + f_a(dx, d'x)\Big) \frac{A_{a,b}}{\triangle} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_b} + dd'y_\gamma.$$

Wenn man jetzt mit dem System von l Grössen δy_α, die in $\lambda(dx, d'x)$ linear auftreten, nach dem Typus der Gleichungen (50.) ein System von Grössen δx_a bildet

$$(50^a.) \qquad \delta x_a = \sum_b \frac{A_{a,b}}{\triangle} [\alpha, \gamma] \delta y_\alpha \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_b},$$

so folgt aus dem Vorstehenden die Gleichung

$$(60.) \qquad 2\lambda(dx, d'x) = \sum_a \Big(\sum_c a_{a,c} dd'x_c + f_a(dx, d'x)\Big) \delta x_a - \sum_{\alpha,\gamma} [\alpha, \gamma] \delta y_\alpha dd'y_\gamma.$$

Der erste Bestandtheil der rechten Seite fällt mit der linken Seite von $(59^a.)$ formell zusammen; sobald daher festgesetzt wird, dass die Charakteristiken δ, d, d' normal angewendet werden, und dass zuletzt δx_a durch $(50^a.)$ interpretirt wird, so entsteht, ohne dass eine Zweideutigkeit zu fürchten ist, die Gleichung

$$(60^a.) \quad 2\lambda(dx, d'x) = -\delta f(dx, d'x) + df(\delta x, d'x) + d'f(\delta x, dx) - \sum_{\alpha,\gamma} [\alpha, \gamma] \delta y_\alpha dd'y_\gamma.$$

Um den Ausdruck $(45^a.)$ explicite darzustellen, von dem das für die Form $\lambda(dx)$ gestellte Problem *de maximis et minimis* abhängt, ist die Function $\lambda(dx, \delta'x)$ zu bilden, in der die Grössen $\delta'x_a$ die in (50.) angegebene Bedeutung haben. Wird in $(60^a.)$ das Zeichen d' durch das Zeichen δ' ersetzt, so darf man für $f(dx, \delta'x)$ den Ausdruck in (51.) anwenden, und ebenso mit $f(\delta x, \delta'x)$ und mit $f(\delta x, dx)$ verfahren. Auf diese Weise entsteht die Gleichung

$$(61.) \quad \begin{cases} 2\lambda(dx, \delta'x) = -\frac{1}{2}\delta \sum_{\alpha,\gamma} [\alpha, \gamma] dy_\alpha \delta'y_\gamma + \frac{1}{2} d \sum_{\alpha,\gamma} [\alpha, \gamma] \delta y_\alpha \delta'y_\gamma \\ \qquad + \frac{1}{2}\delta' \sum_{\alpha,\gamma} [\alpha, \gamma] \delta y_\alpha dy_\gamma - \sum_{\alpha,\gamma} [\alpha, \gamma] \delta y_\alpha d\delta'y_\gamma, \end{cases}$$

welche sich folgendermassen zusammenzieht

$$(61^a.) \quad \begin{cases} 2\lambda(dx, \delta'x) = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\gamma} \delta [\alpha, \gamma] dy_\alpha \delta'y_\gamma \\ \qquad + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\gamma} d[\alpha, \gamma] \delta y_\alpha \delta'y_\gamma + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\gamma} \delta' [\alpha, \gamma] \delta y_\alpha dy_\gamma. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich für den in $(45^a.)$ vorkommenden Terminus $2\sum_\gamma \lambda\Big(dx, \frac{\delta'x}{\delta'y_\gamma}\Big) d'y_\gamma$

der Ausdruck

$$(62.)\quad \begin{cases} 2\sum\limits_{\gamma}\lambda\left(dx, \dfrac{\delta' x}{\delta' y_\gamma}\right)d'y_\gamma = -\frac{1}{2}\sum\limits_{\beta,\gamma}\delta[\beta,\gamma]\,dy_\beta d'y_\gamma \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\gamma} d[\alpha,\gamma]\,\delta y_\alpha d'y_\gamma \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\alpha,\beta,\gamma}\dfrac{\partial[\alpha,\beta]}{\partial x_\alpha}\dfrac{\delta' x_\alpha}{\delta' y_\gamma}\delta y_\alpha dy_\beta d'y_\gamma. \end{cases}$$

Für die Verbindung (45″.) *selbst aber resultirt die Transformation*

$$(45'.)\quad \begin{cases} -2\lambda(dx, d'x) - \frac{1}{2}\sum\limits_{\beta,\gamma}\delta[\beta,\gamma]\,dy_\beta d'y_\gamma + \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\gamma} d[\alpha,\gamma]\,\delta y_\alpha d'y_\gamma \\ \qquad + \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\alpha,\beta,\gamma}\dfrac{\partial[\alpha,\beta]}{\partial x_\alpha}\dfrac{\delta' x_\alpha}{\delta' y_\gamma}\delta y_\alpha dy_\beta d'y_\gamma + 2\omega f(dx, d'x). \end{cases}$$

6.

Das Wesen der so eben durchgeführten Transformation prägt sich am deutlichsten aus, sobald die Zahl $l = 1$ ist. Die in (50″.) definirten Grössen δx_a haben dann die Gestalt

$$\delta x_a = \sum_{b}\frac{A_{a,b}}{\Delta}[1,1]\frac{\partial y_1}{\partial x_b}\delta y_1,$$

und sind nur von der *einen* Grösse δy_1 abhängig. Deshalb hebt sich in (62.) das Aggregat

$$-\frac{1}{2}\delta[1,1] + \frac{1}{2}\sum_{a}\frac{\partial[1,1]}{\partial x_a}\frac{\delta' x_a}{\delta' y_1}\delta y_1$$

fort, es wird

$$2\lambda\left(dx, \frac{\delta' x}{\delta' y_1}\right)d'y_1 = \frac{1}{2}d[1,1]\,\delta y_1 d'y_1,$$

und (45′.) verwandelt sich in den Ausdruck,

$$(45''.)\qquad -2\lambda(dx, d'x) + \frac{1}{2}d[1,1]\,\delta y_1 d'y_1 + 2\omega f(dx, d'x).$$

Hier gilt ferner die Gleichung $[1,1] = \dfrac{1}{(1,1)}$. Es möge nun aus den in der Einleitung erwähnten Motiven die Grösse δy_1 durch den Ausdruck $\sqrt{(1,1)}$ ersetzt werden, so entsteht mit Hülfe von (59.) für (45″.) die weitere Umformung

$$(45'''.)\qquad -\frac{1}{\sqrt{(1,1)}}\sum_{a,b}\frac{A_{a,b}}{\Delta}f_a(dx, d'x)\frac{\partial y_1}{\partial x_b} + \sum_{b} d\left(\frac{\dfrac{\partial y_1}{\partial x_b}}{\sqrt{(1,1)}}\right)d'x_b + 2\omega f(dx, d'x),$$

in welcher *die vollständigen Differentiale der Verbindungen* $\dfrac{\dfrac{\partial y_1}{\partial x_b}}{\sqrt{(1,1)}}$ auftreten.

Bei der Voraussetzung, dass $f(dx)$ *eine Form mit constanten Coefficienten* sei, verschwinden nach (59.) die sämmtlichen Functionen $f_a(dx, d'x)$. Es sei jetzt insbesondere

$$(63.) \qquad f(dx) = \tfrac{1}{2} \sum_a dx_a^2,$$

so wird

$$(64.) \qquad (1,1) = \sum_a \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_a}\right)^2,$$

und (45′.) geht in den Ausdruck

$$(45''.) \qquad \sum_b d\left(\frac{\frac{\partial y_1}{\partial x_b}}{\sqrt{(1,1)}}\right) d'x_b + \omega \sum_b dx_b\, d'x_b$$

über. Der obige Ausdruck für die Grösse δx_a zieht sich in den Ausdruck $[1,1]\frac{\partial y_1}{\partial x_b}\delta y_1$ zusammen, und durch die Substitution von $\sqrt{(1,1)}$ für δy_1 in den Ausdruck

$$(65.) \qquad \frac{\frac{\partial y_1}{\partial x_b}}{\sqrt{\sum_a \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_a}\right)^2}} = \xi_b.$$

Das in Betreff der Function $\lambda(dx)$ gestellte Problem *de maximis et minimis* verlangt, wie man gesehen hat, dass (45″.) für ein System von unabhängigen Differentialen $d'x_b$ verschwinde, oder, indem die Grössen ξ_b in (45″.) eingeführt werden, dass die n Gleichungen

$$(66.) \qquad d\xi_b + \omega dx_b = 0$$

befriedigt seien; für die Determinante dieses Systems $\mathfrak{D}(\omega)$, die gleich Null werden muss, besteht nach (58″.) die Relation

$$(67.) \qquad \mathfrak{D}(\omega) = \frac{\omega D(\omega)}{(1,1)} = \frac{D_0\omega^n + D_1\omega^{n-1} + \cdots + D_{n-1}\omega}{(1,1)}.$$

Eine besondere Aufmerksamkeit gebührt den Verbindungen ξ_b, welche die Gleichung

$$(68.) \qquad \sum_b \xi_b^2 = 1$$

erfüllen. Da dem Problem *de maximis et minimis* die Gleichung $y_1 = \text{const.}$ zu Grunde liegt, so kann man voraussetzen, dass vermöge derselben die Variabele x_1 als Function der $n-1$ übrigen Variabelen x_a bestimmt sei; dadurch

treten an die Stelle von (65.) die Gleichungen

$$(65^a.)\qquad \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{1+\sum\limits_\iota \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial x_\iota}\right)^2}} = \xi_1, \\ \dfrac{\dfrac{\partial x_1}{\partial x_\sigma}}{\sqrt{1+\sum\limits_\iota \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial x_\iota}\right)^2}} = \xi_\sigma, \end{cases}$$

und die Grössen ξ_1, ξ_σ dürfen ebenfalls als Functionen der $n-1$ Variabelen x_ι betrachtet werden. Auf diese Weise stellen sich die $n-1$ Gleichungen in (66.), bei denen $\mathfrak{b} = 2, 3, \ldots n$ ist, so dar

$$(69.)\qquad \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_n} dx_n + \omega\, dx_\sigma = 0,$$

und die Gleichung in (66.), bei der $\mathfrak{b} = 1$ ist, wird vermöge der aus der Bedingung $dy_1 = 0$ folgenden Gleichung $\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 + \cdots + \xi_n dx_n = 0$ eine Consequenz der $n-1$ genannten Gleichungen. Bei der gegenwärtigen Umformung des Problems *de maximis et minimis* wird ferner die Grösse ω durch die Forderung bestimmt, *dass die Determinante des* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Grades*

$$(70.)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \omega & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial x_3} + \omega & \cdots & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_n} + \omega \end{vmatrix}$$

den Werth Null erhalte.

Die so eben für die Grösse ω gebildete Gleichung steht in dem Falle, dass $n = 3$ ist, und dass $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ als das Quadrat des von dem Punkte (x_1, x_2, x_3) im Raume ausgehenden Linearelements betrachtet wird, in einer innigen Beziehung zu den Untersuchungen, welche *Gauss* über die Natur der krummen Oberflächen angestellt hat. Die Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind die Cosinus der Winkel, welche eine in dem Punkte (x_1, x_2, x_3) gegen die Fläche $y_1 = \text{const.}$ errichtete Normale mit den rechtwinkligen Axen der x_1, x_2, x_3 macht, und vermitteln die von *Gauss* eingeführte Repräsentation dieser Normale durch einen auf einer Kugelfläche vom Radius Eins gelegenen Punkt, dessen rechtwinklige Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind (*disquisitiones generales circa superficies curvas*, art. 1 u. ff.). In der Determinante des zweiten Grades, die bei den erwähnten Annahmen aus

(70.) hervorgeht,

$$(70^a.) \qquad \omega^2 + \Big(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\Big)\omega + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial x_2},$$

ist *das letzte Glied* gleich dem Ausdrucke für das Product der reciproken Hauptkrümmungshalbmesser, oder für *das Krümmungsmass, in dem Punkte* (x_1, x_2, x_3) *der Fläche* $y_1 = \text{const.}$, den *Gauss* l. c. art. 7 gegeben hat. Dagegen ist *der Factor von* ω gleich dem Ausdrucke für *das Aggregat der reciproken Hauptkrümmungshalbmesser in dem Punkte* (x_1, x_2, x_3) *der Fläche* $y_1 = \text{const.}$, den *Gauss* in der Abhandlung: *principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii*, art. 25, aufgestellt hat. Die Vereinigung dieser beiden Resultate bringt den Ausdruck (70^a.) hervor, von dessen Studium die gegenwärtige Untersuchung ausgegangen ist.

Wenn bei dem allgemeinen für die Form $\lambda(dx)$ gestellten Problem *de maximis et minimis* ω_1 und ω_2 zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $D(\omega) = 0$ sind, und wenn die zu diesen Wurzeln gehörigen Werthsysteme dx_a respective mit $d^{(1)}x_a$ und $d^{(2)}x_a$ bezeichnet werden, so gestattet das dem Problem entsprechende System von Gleichungen die Folgerung, dass der Ausdruck $f(d^{(1)}x, d^{(2)}x) = 0$ ist, oder dass die Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung $d^{(1)}x_a$ und $d^{(2)}x_a$ mit Rücksicht auf die Form $2f(dx)$ gegen einander normal sind*). Bei der Voraussetzung (63.) muss also die Gleichung $\sum_a d^{(1)}x_a\, d^{(2)}x_a = 0$ gelten. Wenn man nun für die den Wurzeln ω_1 und ω_2 zugehörigen in (66.) vorkommenden Differentiale $d\xi_b$ die entsprechende Notation gebraucht, so giebt die Anwendung der Gleichung (66.) für $\omega = \omega_1$ und für $\omega = \omega_2$ und die hierauf folgende Subtraction, weil $\omega_1 - \omega_2$ von Null verschieden ist, die Gleichung

$$(71.) \qquad \sum_a d^{(1)}\xi_a\, d^{(2)}\xi_a = 0.$$

Für $n = 3$ und bei der erwähnten geometrischen Deutung werden ω_1 und ω_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $D(\omega) = 0$. Die Differentiale $d^{(1)}x_a$ und $d^{(2)}x_a$ entsprechen den Directionen auf der Fläche $y_1 = \text{const.}$, bei denen die Normalschnitte den grössten und den kleinsten Krümmungshalbmesser zeigen, oder, was dasselbe ist, den Anfangselementen der beiden von dem Punkte (x_1, x_2, x_3) ausgehenden *Krümmungslinien*, und diese Directionen stehen vermöge der Gleichung $\sum_a d^{(1)}x_a\, d^{(2)}x_a = 0$ auf einander senkrecht. Wenn nun

*) Dieser Satz ist ausgesprochen in dem *extrait de six mémoires etc.*, IV., *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, rédigé par M.M. *G. Darboux* et *J. Houël*, tome 4, 1873.

die auf den Krümmungslinien der Fläche fortschreitenden Normalen nach dem erwähnten *Gauss*ischen Princip durch das correspondirende Fortschreiten des Punktes (ξ_1, ξ_2, ξ_3) auf der Kugelfläche von dem Radius Eins abgebildet werden, so lehrt die Gleichung (71.) für $n = 3$, dass die betreffenden beiden auf der Kugelfläche bestimmten Linearelemente ebenfalls auf einander senkrecht stehen. Zugleich repräsentirt diese Gleichung bei einem beliebigen Werthe der Zahl n die Ausdehnung des in Rede stehenden Satzes auf einen Raum von n Dimensionen, bei dem das Quadrat des Linearelements durch die Form $\sum_a dx_a^2$ ausgedrückt wird. Diese Ausdehnung des betreffenden Satzes hat Herr *Darboux* in einer sehr anziehenden Mittheilung: *sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques,* comptes rendus de l'ac. des. sc. de Paris, année 1869, 9. août, t. 69, pag. 392 angedeutet.

7.

Es wird jetzt nachgewiesen werden, dass die linke Seite der Gleichung (42.) mit dem Ausdrucke $\frac{D_1}{D_0}$ zusammenfällt, welcher *zu der Combination der quadratischen Form $f(dx)$ mit dem System der l constant zu setzenden Functionen y_α covariant* ist. Der Ausdruck $\frac{D_1}{D_0}$ kann zufolge der Gleichung (58^a.) dargestellt werden, indem man in der Determinante des n^{ten} Grades $\mathfrak{D}(\omega)$ den Coefficienten der Potenz ω^{n-1} durch den Coefficienten der Potenz ω^n, nämlich die Determinante Δ, dividirt. Nach dem Bildungsgesetz der Determinante $\mathfrak{D}(\omega)$ entsteht der Coefficient der Potenz ω^{n-1} dadurch, dass in dem von ω freien Bestandtheile des Ausdruckes (45^b.) die Verbindung $dx_c d'x_b$ überall durch die Verbindung $A_{c,b}$ ersetzt wird. Also entsteht der Ausdruck $\frac{D_1}{D_0}$ dadurch, dass in dem genannten Complex

$$(72.)\quad \begin{cases} -2\lambda(dx, d'x) - \frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\delta[\beta,\gamma]\,dy_\beta d'y_\gamma + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\gamma} d[\alpha,\gamma]\,\delta y_\alpha d'y_\gamma \\ \qquad + \frac{1}{2}\sum_{a,\alpha,\beta,\gamma}\frac{\partial[\alpha,\beta]}{\partial x_a}\frac{\delta' x_a}{\delta' y_\gamma}\,\delta y_\alpha\, dy_\beta\, d'y_\gamma \end{cases}$$

für die Verbindung $dx_c d'x_b$ überall die Verbindung $\frac{A_{c,b}}{\Delta}$ eintritt. Diese Operation ist bei den einzelnen Summanden von (72.) der Reihe nach vorzunehmen. Um dieselbe bei dem *ersten Summanden* $-2\lambda(dx, d'x)$ auszuführen, werde sie auf den Ausdruck $\eta_\gamma(dx, d'x)$ angewendet. Dann entsteht das Resultat

$$(73.) \qquad -\tfrac{1}{2}\sum_{a,b,g,b}\frac{A_{a,b}}{\triangle}\frac{A_{g,b}}{\triangle}\left(\frac{\partial a_{a,a}}{\partial x_b}+\frac{\partial a_{a,b}}{\partial x_g}-\frac{\partial a_{g,b}}{\partial x_a}\right)\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_b}+\sum_{a,b}\frac{A_{a,b}}{\triangle}\frac{\partial^2 y_\gamma}{\partial x_a\partial x_b}.$$

Dasselbe verwandelt sich, weil die Summe $\sum_a \frac{A_{a,b}}{\triangle}a_{a,g}$ gleich Null oder Eins ist, je nachdem b und g verschieden oder einander gleich sind, und weil deshalb die Gleichung

$$\sum_a \frac{A_{a,b}}{\triangle}\frac{\partial a_{a,g}}{\partial x_b} = -\sum_a \frac{\partial\frac{A_{a,b}}{\triangle}}{\partial x_b}a_{a,g}$$

besteht, in den Ausdruck

$$(73^a.) \qquad \sum_{a,b}\frac{\partial\frac{A_{a,b}}{\triangle}}{\partial x_a}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_b}+\tfrac{1}{2}\sum_{a,b}\frac{A_{a,b}}{\triangle}\frac{\partial\log\triangle}{\partial x_a}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_b}+\sum_{a,b}\frac{A_{a,b}}{\triangle}\frac{\partial^2 y_\gamma}{\partial x_a\partial x_b},$$

oder in den Ausdruck

$$(73^b.) \qquad \frac{1}{\sqrt{\triangle}}\sum_{a,b}\partial\frac{\sqrt{\triangle}\frac{A_{a,b}}{\triangle}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_b}}{\partial x_a}.$$

So wird aus dem *ersten Summanden* von (72.) vermöge der Gleichungen (59.) der Ausdruck

$$(74.) \qquad \sum_{\alpha,\gamma}[\alpha,\gamma]\delta y_\alpha\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\sum_{a,b}\partial\frac{\sqrt{\triangle}\frac{A_{a,b}}{\triangle}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_b}}{\partial x_a}.$$

Die übrigen Summanden von (72.) anlangend ist zu erwähnen, dass die Verbindung $dy_\beta d'y_\gamma = \sum_{c,b}\frac{\partial y_\beta}{\partial x_c}dx_c\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_b}d'x_b$ bei der anzuwendenden Substitution den Ausdruck $\sum_{c,b}\frac{A_{c,b}}{\triangle}\frac{\partial y_\beta}{\partial x_c}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_b}=(\beta,\gamma)$ hervorbringt. Der *zweite Summand* geht daher in den Ausdruck

$$(75.) \qquad -\tfrac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\delta[\beta,\gamma](\beta,\gamma)$$

über, und wird, wegen der Relation $\sum_\beta[\beta,\gamma](\beta,\gamma)=1$, gleich

$$(75^a.) \qquad \tfrac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}[\beta,\gamma]\delta(\beta,\gamma)=\tfrac{1}{2}\delta\log|(\gamma,\varepsilon)|,$$

oder, explicite dargestellt, gleich

$$(75^b.) \quad \tfrac{1}{2}\sum_{a,\alpha}\frac{\partial\log|(\gamma,\varepsilon)|}{\partial x_a}\frac{\delta x_a}{\delta y_\alpha}\delta y_\alpha=\tfrac{1}{2}\sum_{a,b,\alpha,\beta}\frac{\partial\log|(\gamma,\varepsilon)|}{\partial x_a}\frac{A_{a,b}}{\triangle}[\alpha,\beta]\frac{\partial y_\beta}{\partial x_b}\delta y_\alpha.$$

Der *dritte Summand* verwandelt sich in den Ausdruck

$$(76.) \qquad \tfrac{1}{2}\sum_{a,b,\alpha,\gamma}\frac{\partial[\alpha,\gamma]}{\partial x_a}\frac{A_{a,b}}{\triangle}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_b}\delta y_\alpha,$$

der *vierte Summand* in den Ausdruck

$$(77.) \qquad \tfrac{1}{2} \sum_{a,\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial[\alpha,\beta]}{\partial x_a} \frac{\delta' x_a}{\delta' y_\gamma} (\beta,\gamma)\, \delta y_\alpha.$$

Wegen der aus (52.) folgenden Gleichung

$$\sum_{\gamma} \frac{\delta' x_a}{\delta' y_\gamma} (\beta,\gamma) = \sum_{b} \frac{A_{a,b}}{\triangle} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_b}$$

wird (77.) gleich dem Ausdrucke

$$(77^a.) \qquad \tfrac{1}{2} \sum_{a,b,\alpha,\beta} \frac{\partial[\alpha,\beta]}{\partial x_a} \frac{A_{a,b}}{\triangle} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_b} \delta y_\alpha,$$

und daher vermöge der Vertauschbarkeit der Summationsbuchstaben β und γ gleich dem Ausdrucke (76.). Nimmt man dies alles zusammen, so geht (72.) in den Ausdruck über

$$(78.) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{a,b,\alpha,\beta} [\alpha,\beta] \frac{1}{\sqrt{\triangle}} \partial \frac{\sqrt{\triangle}\, \frac{A_{a,b}}{\triangle} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_b}}{\partial x_a} \delta y_\alpha + \tfrac{1}{2} \sum_{a,b,\alpha,\beta} [\alpha,\beta] \frac{A_{a,b}}{\triangle} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_b} \frac{\partial \log|(\gamma,\varepsilon)|}{\partial x_a} \delta y_\alpha \\ &\qquad + \sum_{a,b,\alpha,\beta} \frac{\partial[\alpha,\beta]}{\partial x_a} \frac{A_{a,b}}{\triangle} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_b} \delta y_\alpha, \end{aligned} \right.$$

und dieser zieht sich in den Ausdruck

$$(78^a.) \qquad \frac{1}{\sqrt{\triangle|(\gamma,\varepsilon)|}} \sum_{a,b,\alpha,\beta} \frac{\partial\left(\sqrt{\triangle|(\gamma,\varepsilon)|}\,[\alpha,\beta] \frac{A_{a,b}}{\triangle} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_b}\right)}{\partial x_a} \delta y_\alpha$$

zusammen. Nach (20.) ist die Verbindung $\triangle|(\gamma,\varepsilon)|$ gleich dem Ausdrucke D_0; ferner hat man für den partiellen Differentialquotienten von D_0 in Bezug auf eine Grösse $\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_a}$, weil die Determinante $\triangle$ nur die Grössen x_a, aber nicht die Grössen $\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_a}$ enthält, die Gleichung

$$(79.) \qquad \tfrac{1}{2} \frac{\partial \log D_0}{\partial\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_a}\right)} = \sum_{b,\beta} [\alpha,\beta] \frac{A_{a,b}}{\triangle} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_b}.$$

Aus diesen Gründen liefert der Ausdruck (78^a.) für die Verbindung $\frac{D_1}{D_0}$ die gesuchte Darstellung

$$(80.) \qquad \frac{D_1}{D_0} = \frac{1}{\sqrt{D_0}} \sum_{a,\alpha} \frac{\partial\left(\frac{\partial \sqrt{D_0}}{\partial\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_a}\right)}\right)}{\partial x_a} \delta y_\alpha.$$

Weil dieselbe mit der linken Seite der Gleichung (42.) *identisch gleich ist, so*

gilt der Satz, dass die Bedingung für das Verschwinden der ersten Variation des Integrals A in dem von den Variationen δy_α unabhängigen Nullwerden des Ausdruckes

$$\frac{D_1}{D_0}$$

besteht.

Die rechte Seite der Gleichung (79.) fällt nach der in (52.) gegebenen Definition mit der Grösse $\frac{\delta' x_\alpha}{\delta' y_\alpha} = \frac{\delta x_\alpha}{\delta y_\alpha}$ zusammen. Man darf daher für diese Grössen die Gleichung

$$(79^a.) \qquad \tfrac{1}{2} \frac{\partial \log D_0}{\partial \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)} = \frac{\delta x_\alpha}{\delta y_\alpha}$$

aufstellen, und darf umgekehrt mit Hülfe der Grössen $\frac{\delta x_\alpha}{\delta y_\alpha}$ die Verbindung $\frac{D_1}{D_0}$ folgendermassen ausdrücken

$$(80^a.) \qquad \frac{D_1}{D_0} = \frac{1}{\sqrt{D_0}} \sum_{\alpha,\alpha} \frac{\partial \left(\sqrt{D_0} \frac{\delta x_\alpha}{\delta y_\alpha}\right)}{\partial x_\alpha} \delta y_\alpha .$$

8.

Bei dem so eben vollendeten Beweise, dass die linke Seite der Gleichung (42.) mit der Verbindung $\frac{D_1}{D_0}$ coincidirt, ist die Vorstellung festgehalten worden, dass die y_α Functionen der n Variabelen x_α sind. Dasselbe Ziel lässt sich aber auch erreichen, indem die x_α als Functionen von den l Variabelen y_α und den $n-l$ Variabelen y_σ aufgefasst werden, und die rechte Seite der Gleichung (42.) zum Mittelpunkt der Untersuchung gemacht wird. Die rechte Seite der Gleichung (42.) ist, wie oben bemerkt, gleich dem Ausdrucke (7.), dividirt durch die Grösse $\sqrt{E}$, und deshalb, weil (7.) durch (12.) ersetzt werden darf, gleich dem Ausdruck

$$(81.) \qquad \frac{1}{\sqrt{E}} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial(\sqrt{E})}{\partial y_\alpha} - \sum_{\sigma} \frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \sum_{\tau} \frac{\partial E}{\partial e_{\sigma,\tau}} e_{\alpha,\tau} \right)}{\partial y_\sigma} \right) \delta y_\alpha .$$

Man kann nun die Vorstellung eintreten lassen, dass die hier erscheinenden Coefficienten $e_{t,t}$ der Form $g(dy)$ als Functionen der n Variabelen y_α, y_σ ausgedrückt sind. Auf dieselbe Annahme gründet sich eine Transformation des

für die Form $\lambda(dx)$ aufgestellten Problems *de maximis et minimis*, welche dieses Journal Band 71, pag. 285 ausführlich erörtert ist, und gegenwärtig benutzt werden wird. Wenn man durch die Gleichung

$$(82.) \qquad g_t(dy, d'y) = \tfrac{1}{2}\sum_{c,b}\Big(\frac{\partial e_{t,c}}{\partial y_b} + \frac{\partial e_{t,b}}{\partial y_c} - \frac{\partial e_{c,b}}{\partial y_t}\Big) dy_c d'y_b$$

die Function $g_t(dy, d'y)$ definirt, welche zu der Form $g(dy)$ in derselben Beziehung steht, wie die in (59.) definirte Function $f_a(dx, d'x)$ zu der Form $f(dx)$, so verwandelt sich bei der bezeichneten Substitution nach Band 71, pag. 290 dieses Journals die Form $2\lambda(dx, d'x)$ in die Form

$$(83.) \qquad 2\mu(dy, d'y) = \sum_{t,l} \mu_{t,l} dy_t d'y_l = \sum_{t,\alpha,\beta} [\alpha, \beta](t, \beta) g_t(dy, d'y) \delta y_\alpha.$$

Hier ist zufolge (14.) und (15^a.)

$$(t, l) = \frac{E_{t,l}}{E}, \quad [\alpha, \beta] = \frac{\partial \log|(\gamma, \varepsilon)|}{\partial(\alpha, \beta)};$$

mithin sind beide Verbindungen in den Coefficienten $e_{a,b}$ gegeben. Sobald die Differentiale dy_a und $d'y_a$ gleich Null gesetzt werden, möge die Form $\mu(dy, d'y)$ in die Form $\overline{\mu}(dy, d'y)$, und die Form $g(dy, d'y)$ in die Form $\overline{g}(dy, d'y)$ übergehen. Dann schreibt das für die Form $\lambda(dx)$ gestellte Problem *de maximis et minimis* vor, dass der Ausdruck

$$(84.) \qquad -2\overline{\mu}(dy, d'y) + 2\omega\overline{g}(dy, d'y),$$

welcher nach den Grössen dy_σ und $d'y_\tau$ linear ist, für beliebige unabhängige Werthe der letzteren gleich Null werde, und es entspringt zwischen der in Bezug auf jene beiden Systeme genommenen Determinante des Ausdruckes (84.) und der Function $D(\omega)$ die Relation*)

$$(85.) \qquad D(\omega) = \frac{\Delta}{E}|-\mu_{\sigma,\tau} + \omega e_{\sigma,\tau}|.$$

Es leuchtet ein, dass in der Determinante der $(n-l)^{\text{ten}}$ Ordnung $|-\mu_{\sigma,\tau} + \omega e_{\sigma,\tau}|$ die Potenz ω^{n-l} den Factor $|e_{\sigma,\tau}| = \overline{E}$, und die Potenz ω^{n-l-1}

*) Bei dieser Gleichung bemerke ich, dass dieses Journal Band 71, pag. 277 $D(\omega)$ die in dem gegenwärtigen Text definirte Bedeutung hat, dass dagegen dieses Journal Band 71, pag. 293 und dieses Journal Band 74, pag. 165 die Determinante $|-\mu_{\sigma,\tau} + \omega e_{\sigma,\tau}|$ mit $D(\omega)$ bezeichnet ist. In dem vorhin angeführten *extrait de six mémoires* gilt die Definition des gegenwärtigen Textes. Offenbar hat die erwähnte Verschiedenheit keinen Einfluss auf den Sinn der Zeichen $\frac{D_1}{D_0}, \frac{D_2}{D_0}, \cdots \frac{D_{n-l}}{D_0}$.

den Factor $-\sum_{\sigma,\tau}\mu_{\sigma,\tau}\frac{\partial\overline{E}_{\sigma,\tau}}{\partial e_{\sigma,\tau}}$ hat. Daher ergiebt sich auf Grund der Gleichung (47.)

$$D(\omega) = D_0\omega^{n-l}+D_1\omega^{n-l-1}+\cdots+D_{n-l}$$

für die Verbindung $\frac{D_1}{D_0}$ die Darstellung

$$(86.)\qquad \frac{D_1}{D_0} = -\sum_{\sigma,\tau}\mu_{\sigma,\tau}\,\frac{\partial\log\overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}},$$

welche vermöge (82.) und (83.) gleich der folgenden ist

$$(86^a.)\qquad \frac{D_1}{D_0} = -\tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{t},\alpha,\beta}[\alpha,\beta](\mathfrak{f},\beta)\sum_{\sigma,\tau}\Big(\frac{\partial e_{\mathfrak{t},\sigma}}{\partial y_\tau}+\frac{\partial e_{\mathfrak{t},\tau}}{\partial y_\sigma}-\frac{\partial e_{\sigma,\tau}}{\partial y_\mathfrak{t}}\Big)\frac{\partial\log\overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}}\,\delta y_\alpha.$$

Die hier auftretende Summe $\sum_\beta[\alpha,\beta](\mathfrak{f},\beta)$ hat den Werth Null, wenn $\mathfrak{f}$ gleich einer der Zahlen 1, 2, ... l, aber nicht gleich α ist, und den Werth Eins, wenn $\mathfrak{f}=\alpha$ ist. Es handelt sich nun um einen andern Ausdruck dieser Summe für den Fall, dass $\mathfrak{f}=\varkappa$, einer der Zahlen $l+1$, $l+2$, ... n, ist. Man multiplicire die bezeichnete Summe mit einer Grösse $e_{\mathfrak{t},\varrho}$, wo ϱ gleich einer der Zahlen $l+1$, $l+2$, ... n ist; dann verschwindet die von $\mathfrak{f}=1$ bis $\mathfrak{f}=n$ ausgedehnte Summe

$$(87.)\qquad \sum_\mathfrak{t}\sum_\beta[\alpha,\beta](\mathfrak{f},\beta)\,e_{\mathfrak{t},\varrho},$$

weil $\sum_\mathfrak{t}(\mathfrak{f},\beta)\,e_{\mathfrak{t},\varrho}$ wegen der nothwendigen Ungleichheit von β und ϱ gleich Null ist. Führt man dagegen in (87.) die nach dem Buchstaben $\mathfrak{f}$ gehende Summation zuerst von 1 bis l aus, und lässt dann $\mathfrak{f}=\varkappa$ von $l+1$ bis n fortschreiten, so wird aus (87.) nach dem, was bemerkt worden, der Ausdruck

$$(87^a.)\qquad e_{\alpha,\varrho}+\sum_\varkappa\sum_\beta[\alpha,\beta](\varkappa,\beta)\,e_{\varkappa,\varrho}.$$

Die $n-l$ Gleichungen, welche entstehen, sobald man diesen Ausdruck für die Werthe $\varrho=l+1$, ... n gleich Null setzt, liefern aufgelöst die gesuchte Bestimmung

$$(88.)\qquad \sum_\beta[\alpha,\beta](\varkappa,\beta) = -\sum_\varrho e_{\alpha,\varrho}\frac{\partial\log\overline{E}}{\partial e_{\varkappa,\varrho}}.$$

Auf diese Weise wird aus (86^a.) die Gleichung

$$(86^b.)\qquad \begin{cases}\dfrac{D_1}{D_0} = -\tfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\alpha,\sigma,\tau}\Big(\frac{\partial e_{\alpha,\sigma}}{\partial y_\tau}+\frac{\partial e_{\alpha,\tau}}{\partial y_\sigma}-\frac{\partial e_{\sigma,\tau}}{\partial y_\alpha}\Big)\frac{\partial\log\overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}}\,\delta y_\alpha\\ \qquad\qquad +\tfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\alpha,\varkappa,\varrho,\sigma,\tau}e_{\alpha,\varrho}\frac{\partial\log\overline{E}}{\partial e_{\varkappa,\varrho}}\Big(\frac{\partial e_{\varkappa,\sigma}}{\partial y_\iota}+\frac{\partial e_{\varkappa,\tau}}{\partial y_\sigma}-\frac{\partial e_{\sigma,\tau}}{\partial y_\varkappa}\Big)\frac{\partial\log\overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}}\,\delta y_\alpha.\end{cases}$$

In dem Ausdrucke der rechten Seite ist der erste Summand gleich dem Aggregat

$$(89.) \qquad -\sum_{\alpha,\sigma,\tau} \frac{\partial e_{\alpha,\tau}}{\partial y_\sigma} \frac{\partial \log \overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}} \delta y_\alpha + \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\partial \log \overline{E}}{\partial y_\alpha} \delta y_\alpha.$$

Ferner nimmt der zweite Summand, weil die Summe $\sum_{\sigma} e_{\varkappa,\sigma} \frac{\partial \log E}{\partial e_{\tau,\sigma}}$ gleich Null oder Eins ist, je nachdem $\varkappa$ nicht gleich τ oder $\varkappa$ gleich τ ist, und weil somit die Gleichung

$$(90.) \qquad \sum_{\sigma} \frac{\partial e_{\varkappa,\sigma}}{\partial y_\tau} \frac{\partial \log \overline{E}}{\partial e_{\tau,\sigma}} = -\sum_{\sigma} e_{\varkappa,\sigma} \frac{\partial \left(\frac{\partial \log \overline{E}}{\partial e_{\tau,\sigma}} \right)}{\partial y_\tau}$$

besteht, die Gestalt an

$$(91.) \quad \begin{cases} \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha,\varkappa,\varrho} e_{\alpha,\varrho} \frac{\partial \log \overline{E}}{\partial e_{\varkappa,\varrho}} \left(-2 \sum_{\sigma,\tau} e_{\varkappa,\tau} \frac{\partial \left(\frac{\partial \log \overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}} \right)}{\partial y_\sigma} - \frac{\partial \log \overline{E}}{\partial y_\varkappa} \right) \delta y_\alpha \\ = -\sum_{\alpha,\sigma,\tau} e_{\alpha,\tau} \frac{\partial \left(\frac{\partial \log \overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}} \right)}{\partial y_\sigma} \delta y_\alpha - \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha,\sigma,\tau} e_{\alpha,\tau} \frac{\partial \log \overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}} \frac{\partial \log \overline{E}}{\partial y_\sigma} \delta y_\alpha. \end{cases}$$

Also bringt die Addition von (89.) und (91.) die Gleichung hervor

$$(92.) \qquad \frac{D_1}{D_0} = \frac{1}{\sqrt{\overline{E}}} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \sqrt{\overline{E}}}{\partial y_\alpha} - \sum_{\sigma} \frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{\overline{E}}} \sum_{\tau} \frac{\partial \overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}} e_{\alpha,\sigma} \right)}{\partial y_\sigma} \right) \delta y_\alpha,$$

deren rechte Seite mit dem Ausdrucke (81.) zusammenfällt. Auf diese Weise ist die in Rede stehende Eigenschaft der Verbindung $\frac{D_1}{D_0}$ abermals erwiesen.

Das Integral A, dessen erste Variation gleichzeitig mit der Verbindung $\frac{D_1}{D_0}$ verschwindet, wird ein *einfaches Integral*, sobald die Zahl l der Functionen y_α den Werth $n-1$ erhält. In diesem Falle geht die in (6.) definirte Determinante $\overline{E}$ in den *einen* Coefficienten

$$e_{n,n} = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial y_n} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial y_n}$$

über, und das Integral A in die Gestalt

$$\begin{aligned} A &= \int \sqrt{\overline{\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial y_n} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial y_n}}}\, dy_n \\ &= \int \sqrt{\overline{2f\left(\frac{\partial x}{\partial y_n}\right)}}\, dy_n \\ &= \int \sqrt{\overline{2f(dx)}}. \end{aligned}$$

Der Zusammenhang des für dieses Integral aufgestellten Variationsproblems mit dem Variationsproblem für das Integral $\int f(\frac{dx}{dt})dt$ ist implicite dieses Journal Bd. 70, pag. 88 u. ff., explicite dieses Journal Bd. 74, pag. 123 u. ff., zusammenfassend in dem angeführten *extrait de six mémoires*, I. und III., auseinandergesetzt, und es hat sich gezeigt, dass die beiden Probleme dieselbe Abhängigkeit der Variabelen x_α von einander determiniren. Sobald die Form $2f(dx)$ nach dem Vorgange von *Riemann* als *das Mass von dem Quadrate des Linearelements für die Mannigfaltigkeit der n^{ten} Ordnung der Variabelen x_α* aufgefasst wird, so übernimmt *die bezeichnete Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung der Variabelen x_α* die Rolle einer *kürzesten Linie in dem betreffenden Raume von n Dimensionen*. Die Bedingung für das Verschwinden der ersten Variation des Integrals A bestimmt nach der einen Auffassung, wie die $n-1$ constant zu setzenden Grössen $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ von den n Variabelen x_α abhängen, nach der anderen Auffassung, wie die n Variabelen x_α von der einen Grösse y_n abhängen. Die aus der letzteren Auffassung hervorgehenden Gleichungen bilden *ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen*, und charakterisiren die in Rede stehende *Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung der Variabelen x_α*. Dagegen rührt die Definition der Function $\lambda(dx)$ von der Aufgabe her, dass die erste Variation des Integrales $\int f(\frac{dx}{dt})dt$ unter Hinzuziehung der l Gleichungen $y_\alpha = \text{const.}$ zu Null gemacht werden soll, wie dieses Journal Bd. 71, pag. 275 u. ff. entwickelt worden ist. Sobald die Zahl l den Werth $n-1$ annimmt, so werden vermöge der $n-1$ Gleichungen $dy_\alpha = 0$ die n Differentiale dx_α von einem einzigen Differential abhängig, und das für die Function $\lambda(dx)$ gestellte Problem *de maximis et minimis* vereinfacht sich demgemäss. Alsdann geht die Function $D(\omega)$ in den Ausdruck des ersten Grades $D_0\omega + D_1$ über, und durch die Forderung, dass unabhängig von den $n-1$ Variationen δy_α der Ausdruck $\frac{D_1}{D_0} = 0$ sei, wird die Grösse ω gleich Null, und daher auch, vermöge der in der Einleitung erwähnten Gleichung $\omega = \frac{\lambda(dx)}{f(dx)}$, die Function $\lambda(dx)$ gleich Null. Unter diesen Verhältnissen verschwinden die Ausdrücke λ_α, die sich auf der rechten Seite der Differentialgleichungen (7.), dieses Journal Bd. 71, pag. 276 befinden, und dieses System von Differentialgleichungen, welches bewirkt, dass die erste Variation des Integrals $\int f(\frac{dx}{dt})dt$ *mit Hinzuziehung der $n-1$ Gleichungen* $y_\alpha = \text{const.}$ verschwinden muss, geht

in dasjenige System über, welches die erste Variation des genannten Integrals *an sich* zu Null macht. Aus dieser Ueberlegung konnte mit Sicherheit geschlossen werden, dass bei der Voraussetzung $l=n-1$ die Gleichung $\frac{D_1}{D_0}=0$ die Bedingungen für das Verschwinden der ersten Variation des Integrals A enthalte, und darin lag ein neuer Antrieb zu der Aufsuchung des bezüglichen allgemeinen Resultats.

Zweite Abtheilung.

1.

Die Voraussetzung in Betreff der quadratischen Form $f(dx)$, dass

$$(1.) \qquad f(dx) = \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}} dx_{\mathfrak{a}}^2$$

sei, ist vorhin bei der Erörterung eines Transformationsresultats auf den Fall, dass nur *eine* Function y_1 vorhanden ist, angewendet worden. Diese Annahme soll jetzt bei einem beliebigen Werthe der Zahl l für die hauptsächlichsten Verbindungen zur Geltung kommen, deren Zusammenhang mit dem Variationsproblem des Integrals A in der bisherigen Untersuchung hervorgetreten ist. Die Formeln der ersten Abtheilung werde ich durch Anhängung des Zeichens I. auszeichnen und zuerst diejenigen Verbindungen betrachten, in denen die Grössen $y_{\mathfrak{t}}$ als Functionen der Grössen $x_{\mathfrak{a}}$ aufgefasst werden. Da der Coefficient $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ in Folge von (1.) gleich Null oder gleich der Einheit wird, je nachdem $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von einander verschieden oder einander gleich sind, so erhält der Coefficient $e_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}$ der Form $g(dy)$, in welche $\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}} dx_{\mathfrak{a}}^2$ durch die Substitution der Variabelen $y_{\mathfrak{t}}$ übergeht, nach (4.), I. den Ausdruck

$$(2.) \qquad e_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial y_{\mathfrak{t}}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial y_{\mathfrak{l}}}.$$

Vermöge der oben erwähnten von *Gauss* herrührenden Definition *wird dann die Form von $n-l$ Differentialen*

$$\overline{g(dy)} = \sum_{\sigma,\tau} e_{\sigma,\tau}\, dy_\sigma\, dy_\tau$$

durch die Form $\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}} dx_{\mathfrak{a}}^2$ *dargestellt.* Aus den Coefficienten $e_{\sigma,\tau}$ ist die Determinante

$$(3.) \qquad \overline{E} = |e_{\sigma,\tau}|$$

und mit Hülfe von dieser das zu variirende $(n-l)$fache Integral

$$(4.) \qquad A = \int \sqrt{\overline{E}}\, dy_{l+1}\, dy_{l+2} \ldots dy_n$$

zu bilden. Weil die Coefficienten $e_{t,t}$ gegenwärtig die Variabelen x_a selbst nicht enthalten, und reine Functionen der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_a}{\partial y_t}$ sind, so hat auch die Grösse $\overline{E}$ die gleiche Beschaffenheit. Die zu der Combination der Form $\frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$ mit den l constant zu setzenden Functionen y_α covariante Verbindung $\frac{D_1}{D_0}$, welche mit der ersten Variation des Integrals A gleichzeitig verschwindet, und die dem durch $\sqrt{\overline{E}}$ dividirten Ausdrucke (7.), I. oder der rechten Seite von (42.), I. gleich ist, nimmt somit die Gestalt an

$$(5.) \qquad \frac{D_1}{D_0} = -\frac{1}{\sqrt{\overline{E}}} \sum_{a,\sigma} \frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_\sigma}\right)}\right)}{\partial y_\sigma} \delta x_a.$$

Die hier vorkommenden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_\sigma}\right)}$ haben nach (8.), I. die Werthe

$$(6.) \qquad \frac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_\sigma}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\overline{E}}} \sum_\tau \frac{\partial \overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau}} \frac{\partial x_a}{\partial y_\tau}.$$

Die Einwirkung der Gleichung (1.) auf diejenigen Formeln, in denen die y_t als Functionen der x_a erscheinen, macht sich insofern kenntlich, als die Determinante $\triangle$ gleich Eins wird, und die adjungirten Elemente $A_{a,b}$ gleich Null oder Eins werden, je nachdem die Zeiger a und b differiren oder nicht. Demnach folgen aus (14.), I. und (15.), I. die Gleichungen

$$(7.) \qquad (t, l) = \frac{E_{t,l}}{E} = \sum_a \frac{\partial y_t}{\partial x_a} \frac{\partial y_l}{\partial x_a},$$

die Function D_0 wird nach (20.), I. so bestimmt

$$(8.) \qquad D_0 = |(\gamma, \varepsilon)|,$$

und nach (15ª.), I. gelten die Gleichungen

$$(9.) \qquad \frac{\partial \log|(\gamma, \varepsilon)|}{\partial(\alpha, \beta)} = [\alpha, \beta].$$

Die Definition der Function D_0 als die in der gegenwärtig üblichen Weise gebildete, mit $(-1)^l$ multiplicirte Determinante des Systems (18.), I. erzeugt die Darstellung

$$(10.) \qquad D_0 = \mathrm{S}\left(\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_{a_1}} \frac{\partial y_2}{\partial x_{a_2}} \cdots \frac{\partial y_l}{\partial x_{a_l}}\right)^2,$$

wo bei der Ausführung der Summation für $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_l$ alle Combinationen von l differenten Zahlen aus den Zahlen 1, 2, ... n zu setzen sind. Ein bekannter Satz lehrt die Uebereinstimmung der Gleichungen (8.) und (10.). Der angegebene Werth der Function D_0 ist bei der zweiten Darstellung des Integrales A

$$(11.) \qquad A = \int \sqrt{D_0} \frac{dx_{l+1} dx_{l+2} \ldots dx_n}{\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial y_l}{\partial x_l}}$$

einzusetzen. Die Verbindung $\frac{D_1}{D_0}$ wird durch die linke Seite von (42.), I. oder durch die Gleichung (80.), I.

$$(12.) \qquad \frac{D_1}{D_0} = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{\mathfrak{a},\alpha} \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{D_0}}{\partial \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\mathfrak{a}} \right)} \right)}{\partial x_\mathfrak{a}} \delta y_\alpha$$

ausgedrückt. Für die partiellen Differentialquotienten der Function D_0 nach den Grössen $\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\mathfrak{a}}$ besteht in Folge von (79.), I. gegenwärtig die Gleichung

$$(13.) \qquad \tfrac{1}{2} \frac{\partial \log D_0}{\partial \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\mathfrak{a}} \right)} = \sum_\beta [\alpha, \beta] \frac{\partial y_\beta}{\partial x_\mathfrak{a}}.$$

Nach (79$^\alpha$.), I. sind zugleich die Ausdrücke $\frac{\delta x_\mathfrak{a}}{\delta y_\alpha}$ so bestimmt

$$(14.) \qquad \frac{\delta x_\mathfrak{a}}{\delta y_\alpha} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial \log D_0}{\partial \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\mathfrak{a}} \right)} = \sum_\beta [\alpha, \beta] \frac{\partial y_\beta}{\partial x_\mathfrak{a}}.$$

Durch Anwendung von (13.) kann die Verbindung $\frac{D_1}{D_0}$ folgendermassen explicite dargestellt werden

$$(15.) \qquad \frac{D_1}{D_0} = \frac{1}{\sqrt{D_0}} \sum_{\mathfrak{a},\alpha} \frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{D_0}} \sum_\beta [\alpha, \beta] \frac{\partial y_\beta}{\partial x_\mathfrak{a}} \right)}{\partial x_\mathfrak{a}} \delta y_\alpha.$$

2.

Wenn die Zahl $n-l$ gleich *der Einheit* ist, so führt die Gleichung $\frac{D_1}{D_0} = 0$, oder die Bedingung für das Verschwinden der ersten Variation des alsdann *einfachen Integrals* A nach einer gegen das Ende der ersten Abtheilung gemachten Bemerkung zu einem *System von gewöhnlichen Differential-*

gleichungen, welches die Abhängigkeit der Variabelen x_α von einander bestimmt. *Sobald ausserdem die Voraussetzung* (1.) *des vorigen Artikels in Kraft tritt, so wird die Form von einem Differential*

$$\overline{g(dy)} = e_{n,n}dy_n^2 = \tfrac{1}{2}\sum_\mathfrak{t}\left(\frac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial y_n}\right)^2 dy_n^2$$

durch die Form $\frac{1}{2}\sum_\alpha dx_\alpha^2$ *dargestellt, ferner erscheint das zu variirende einfache Integral so*

$$(16.)\qquad A = \int\sqrt{\sum_\mathfrak{t}\left(\frac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial y_n}\right)^2}\,dy_n = \int\sqrt{\sum_\mathfrak{t} dx_\mathfrak{t}^2},$$

und die Verbindung $\frac{D_1}{D_0}$ nimmt nach (5.) die Gestalt an

$$(17.)\qquad \frac{D_1}{D_0} = -\frac{1}{\sqrt{\sum_\mathfrak{t}\left(\frac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial y_n}\right)^2}}\sum_\alpha \frac{\partial\left(\dfrac{1}{\sqrt{\sum_\mathfrak{t}\left(\frac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial y_n}\right)^2}}\,\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}\right)}{\partial y_n}\delta x_\alpha.$$

Die Integration des *Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen* $\frac{D_1}{D_0} = 0$ lässt sich jetzt unmittelbar ausführen, und zwar, wenn für einen Werth $y_n = y_n(0)$ die zugeordneten Werthe $x_\alpha = x_\alpha(0)$ und $\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_n} = \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}\right)_0$ gegeben sind, durch die Ausdrücke

$$(18.)\qquad x_\alpha = x_\alpha(0) + \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}\right)_0 (y_n - y_n(0)).$$

Sobald nach der oben erwähnten von *Riemann* herrührenden Redeweise $\sum_\alpha dx_\alpha^2$ *das Mass für das Quadrat des Linearelements der Mannigfaltigkeit der* n^{ten} *Ordnung von den Variabelen* x_α ausdrückt, so ist der betreffende *Raum von n Dimensionen* als *ein ebener Raum* zu betrachten und die Gleichungen (18.) determiniren *die kürzeste Linie in diesem Raume*, oder *die gerade Linie.*

Dem so eben erörterten Falle folgt als nächster der Fall, dass die Zahl $n-l$ den Werth *Zwei* hat. Alsdann wird unter der Annahme (1.) die *Form von zwei Differentialen*

$$(19.)\qquad \overline{g}(dy) = \tfrac{1}{2}(e_{n-1,n-1}dy_{n-1}^2 + 2e_{n-1,n}dy_{n-1}dy_n + e_{n,n}dy_n^2)$$

durch die Form $\frac{1}{2}\sum_\alpha dx_\alpha^2$ *dargestellt.* Zugleich bestehen nach (2.) und (3.) die Gleichungen

$$(19^{a}.)\qquad \begin{cases} e_{n-1,n-1} = \sum\limits_{a}\left(\dfrac{\partial x_a}{\partial y_{n-1}}\right)^2 \\ e_{n-1,n} = \sum\limits_{a}\dfrac{\partial x_a}{\partial y_{n-1}}\dfrac{\partial x_a}{\partial y_n} \\ e_{n,n} = \sum\limits_{a}\left(\dfrac{\partial x_a}{\partial y_n}\right)^2 \\ \overline{E} = e_{n-1,n-1}e_{n,n} - e_{n-1,n}^2. \end{cases}$$

Das System von partiellen Differentialgleichungen, welches in der Gleichung $\frac{D_1}{D_0} = 0$ *enthalten ist,* und von dem *das Verschwinden der ersten Variation des doppelten Integrals*

$$(20.)\qquad \begin{cases} A = \int\sqrt{\overline{E}}\,dy_{n-1}dy_n \\ = \int\sqrt{e_{n-1,n-1}e_{n,n} - e_{n-1,n}^2}\,dy_{n-1}dy_n \end{cases}$$

abhängt, wird nunmehr vollständig integrirt werden. Die Auflösung dieser Aufgabe steht in dem innigsten Bezuge zu dem Factum, *dass die quadratische Form* $\overline{g(dy)}$ *als eine binäre Form in zwei Factoren des ersten Grades zerlegbar ist.*

Die Verbindung $\frac{D_1}{D_0}$ wird vermöge der Gleichung (5.) so dargestellt

$$(21.)\qquad \frac{D_1}{D_0} = -\frac{1}{\sqrt{\overline{E}}}\sum_{a}\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_{n-1}}\right)}\right)}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_n}\right)}\right)}{\partial y_n}\right)\delta x_a.$$

Weil nun die Gleichung $\frac{D_1}{D_0} = 0$ unabhängig von den Werthen der Variationen δx_a erfüllt werden muss, so ist *das aufzulösende System von n partiellen Differentialgleichungen* das folgende

$$(22.)\qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_{n-1}}\right)}\right)}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_n}\right)}\right)}{\partial y_n} = 0.$$

Die Behandlung desselben kann auf die Bemerkung gegründet werden, dass jede dieser n Gleichungen die Gestalt einer *Bedingung der Integrabilität* hat, und somit *die Existenz einer Function* x_a *von den unabhängigen Variabelen* y_{n-1} *und* y_n verbürgt, deren exactes Differential durch die Gleichung

$$(23.) \qquad dx_\alpha = -\frac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}\right)}dy_{n-1} + \frac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}}\right)}dy_n$$

gegeben ist. Dieser Gleichung steht der Ausdruck des exacten Differentials

$$(24.) \qquad dx_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}}dy_{n-1} + \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}dy_n$$

gegenüber. Es werde nun die Gleichung (23.) mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirt, und zu der Gleichung (24.) addirt, dann ergiebt sich die Gleichung

$$(25.) \qquad dx_\alpha + i\,dx_\alpha = \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}} - i\frac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}\right)}\right)dy_{n-1} + \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_n} + i\frac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}}\right)}\right)dy_n,$$

welche (23.) und (24.) in sich schliesst, und vermöge (23.) auch das zu integrirende System der partiellen Differentialgleichungen (22.) zur nothwendigen Folge hat. Die partiellen Differentialquotienten der Function $\sqrt{\overline{E}}$ haben gegenwärtig vermöge (6.) die Ausdrücke

$$(6^a.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{\overline{E}}}\left(e_{n,n}\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}} - e_{n,n-1}\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}\right) \\ \dfrac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{\overline{E}}}\left(-e_{n-1,n}\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}} + e_{n-1,n-1}\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}\right), \end{cases}$$

und daher werden die Factoren von dy_{n-1} und dy_n auf der rechten Seite von (25.) gleich den folgenden Ausdrücken

$$(26.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}} - i\dfrac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}\right)} = \dfrac{\sqrt{\overline{E}} + i\,e_{n-1,n}}{\sqrt{\overline{E}}}\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}} - \dfrac{i\,e_{n-1,n-1}}{\sqrt{\overline{E}}}\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_n} + i\dfrac{\partial\sqrt{\overline{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}}\right)} = \dfrac{i\,e_{n,n}}{\sqrt{\overline{E}}}\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}} + \dfrac{\sqrt{\overline{E}} - i\,e_{n-1,n}}{\sqrt{\overline{E}}}\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}. \end{cases}$$

Dadurch nimmt die Gleichung (25.) diese Gestalt an

$$(27.) \qquad \begin{cases} dx_\alpha + i\,dx_\alpha = \left(\dfrac{(\sqrt{\overline{E}} + i\,e_{n-1,n})\,dy_{n-1} + i\,e_{n,n}\,dy_n}{\sqrt{\overline{E}}}\right)\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}} \\ \qquad + \left(\dfrac{-i\,e_{n-1,n-1}\,dy_{n-1} + (\sqrt{\overline{E}} - i\,e_{n-1,n})\,dy_n}{\sqrt{\overline{E}}}\right)\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke, mit welchen hier die Grössen $\frac{\partial x_a}{\partial y_{n-1}}$ und $\frac{\partial x_a}{\partial y_n}$ multiplicirt erscheinen, treten auf, sobald die binäre quadratische Form

$$2\bar{g}(dy) = e_{n-1,n-1}dy_{n-1}^2 + 2e_{n-1,n}dy_{n-1}dy_n + e_{n,n}dy_n^2$$

in zwei Factoren des ersten Grades zerlegt wird. *Gauss* hat diese Zerlegung angewendet bei der *allgemeinen Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird.* (Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von *Schumacher*, drittes Heft, Altona 1825. Werke, Bd. IV.) Wenn man die Zahl $n = 3$ nimmt, die Variabelen x_1, x_2, x_3 mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, die Variabelen y_{n-1}, y_n mit den Variabelen t, u zusammenfallen lässt, so gehen die obigen Bezeichnungen in die von *Gauss* gewählten Bezeichnungen dergestalt über, dass

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_{n-1}}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_{n-1}}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial y_{n-1}}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_n}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_n}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial y_n}$$

in

$$a, \quad b, \quad c, \quad a', \quad b', \quad c',$$

ferner

$$e_{n-1,n-1}, \quad e_{n-1,n}, \quad e_{n,n}$$

in

$$a^2+b^2+c^2, \quad aa'+bb'+cc', \quad a'^2+b'^2+c'^2,$$

und die Form $2\bar{g}(dy)$ in ω, *das Quadrat des Linearelements der ersten Fläche*, verwandelt wird. Die von *Gauss* angegebenen Factoren des ersten Grades der quadratischen Form $2\bar{g}(dy)$ sind in den obigen Bezeichnungen der Ausdruck

$$(28.) \qquad e_{n-1,n-1}dy_{n-1} + (e_{n-1,n} + i\sqrt{\bar{E}})dy_n,$$

und der mit demselben conjugirte Ausdruck, bei welchem i mit $-i$ vertauscht ist. Lässt man den Coefficienten $e_{n,n}$ die Rolle übernehmen, welche hier der Coefficient $e_{n-1,n-1}$ spielt, so erhält man eine andere Darstellung der beiden Factoren, nämlich den Ausdruck

$$(29.) \quad (e_{n-1,n} - i\sqrt{\bar{E}})dy_{n-1} + e_{n,n}dy_n = \frac{e_{n-1,n} - i\sqrt{\bar{E}}}{e_{n-1,n-1}}(e_{n-1,n-1}dy_{n-1} + (e_{n-1,n} + i\sqrt{\bar{E}})dy_n),$$

und den mit diesem conjugirten Ausdruck. Jetzt lehrt aber die Gleichung (29.), *dass auf der rechten Seite der Relation* (27.) *derselbe Factor des ersten Grades zwei Mal vorkommt*, und daher kann diese Relation in die folgende

Gestalt gebracht werden

$$(30.)\quad \left\{ \begin{array}{l} dx_\alpha + i\,dx_\alpha \\ = \dfrac{1}{i\sqrt{E}}\Big(-\dfrac{e_{n-1,n}-i\sqrt{E}}{e_{n-1,n-1}}\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_{n-1}}+\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_n}\Big)\big(e_{n-1,n-1}dy_{n-1}+(e_{n-1,n}+i\sqrt{E})dy_n\big). \end{array} \right.$$

Der Ausdruck (28.) lässt sich nach einer von *Gauss* gemachten Bemerkung durch Multiplication mit einem angemessenen integrirenden Factor in ein vollständiges Differential

$$(31.)\qquad dp + i\,dq$$

verwandeln. Dann folgt aus der Relation (30.), *dass die n vollständigen Differentiale* $dx_\alpha + i\,dx_\alpha$, *durch das vollständige Differential* $dp+i\,dq$ *dividirt, ein von den Differentialen unabhängiges Resultat geben,* oder, nach dem gegenwärtig geltenden Sprachgebrauche, *dass die Grössen* $x_\alpha + ix_\alpha$ *Functionen von derselben complexen Grösse* $p+iq$ *sind.* Man erhebe nun die beiden Seiten der Relation (30.) auf das Quadrat, und summire nach dem Buchstaben α von 1 bis n, so entsteht vermöge der Gleichungen (19^a.) die Relation

$$(32.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_\alpha (dx_\alpha + i\,dx_\alpha)^2 = -\dfrac{1}{E}\mathfrak{G}\,(e_{n-1,n-1}dy_{n-1}+(e_{n-1,n}+i\sqrt{E})\,dy_n)^2, \\ \\ \mathfrak{G} = e_{n-1,n-1}\Big(\dfrac{-e_{n-1,n}+i\sqrt{E}}{e_{n-1,n-1}}\Big)^2+2e_{n-1,n}\Big(\dfrac{-e_{n-1,n}+i\sqrt{E}}{e_{n-1,n-1}}\Big)+e_{n,n}. \end{array} \right.$$

Der Ausdruck $\dfrac{-e_{n-1,n}+i\sqrt{E}}{e_{n-1,n-1}}$, für $\dfrac{dy_{n-1}}{dy_n}$ gesetzt, ist *eine von den beiden complexen conjugirten Wurzeln der quadratischen Gleichung*

$$(33.)\qquad 2\bar{g}\Big(\frac{dy_{n-1}}{dy_n}\Big) = e_{n-1,n-1}\Big(\frac{dy_{n-1}}{dy_n}\Big)^2+2e_{n-1,n}\Big(\frac{dy_{n-1}}{dy_n}\Big)+e_{n,n}=0.$$

Deshalb erhält der Ausdruck $\mathfrak{G}$ den Werth Null, und die Gleichung (32.) spricht aus, *dass die n Functionen* $x_\alpha + ix_\alpha$ *von der complexen Grösse* $p+iq$ *nothwendig die Bedingung*

$$(34.)\qquad \sum_\alpha (dx_\alpha + i\,dx_\alpha)^2 = 0$$

zu erfüllen haben.

Die aus dem System von partiellen Differentialgleichungen (22.) entwickelten *nothwendigen* Eigenschaften der Functionen x_α sind auch *hinreichend*, um ein System von Functionen x_α als ein System von Integralen des Systems (22.) zu charakterisiren. Um dies zu beweisen, werde ich zeigen, *dass, wenn man durch* $\varphi_1(p+iq)$, $\varphi_2(p+iq)$, ... $\varphi_n(p+iq)$ *ein System von Functionen*

einer complexen Variabele $p+iq$ bezeichnet, die der einen Bedingung genügen

$$(35.) \quad (d\varphi_1(p+iq))^2+(d\varphi_2(p+iq))^2+\cdots+(d\varphi_n(p+iq))^2 = 0,$$

und wenn man unter Trennung des Reellen vom Imaginären die Gleichungen bildet,

$$(36.) \quad x_t+iz_t = \varphi_t(p+iq),$$

die reellen Grössen x_t das System von Differentialgleichungen befriedigen, welches aus (22.) hervorgeht, sobald p für y_{n-1} und q für y_n substituirt wird.

Es möge auch in dem Ausdrucke $\frac{d\varphi_t(p+iq)}{d(p+iq)}$ der reelle und imaginäre Theil gesondert werden, so dass man hat

$$(37.) \quad \frac{d\varphi_t(p+iq)}{d(p+iq)} = A_t+iC_t,$$

dann folgt aus (36.) die Gleichung

$$(38.) \quad dx_t+i\,dz_t = (A_t+iC_t)(dp+i\,dq),$$

welche die Gleichungen

$$(39.) \quad \begin{cases} dx_t = A_t\,dp - C_t\,dq \\ dz_t = C_t\,dp + A_t\,dq \end{cases}$$

einschliesst. Gleichzeitig zerfällt die Bedingung (35.) in die beiden Gleichungen

$$(40.) \quad \sum_t A_t^2 - \sum_t C_t^2 = 0, \quad \sum_t A_t C_t = 0.$$

Die quadratische Form der beiden Differentiale dp und dq, welche die Stelle von $2\overline{g}(dy)$ übernimmt, heisse

$$(41.) \quad e\,dp^2+2f\,dp\,dq+g\,dq^2.$$

Dann bekommen die Coefficienten e, f, g nach (19^a.) und (39.) die Ausdrücke

$$(42.) \quad e = \sum_t A_t^2, \quad f = -\sum_t A_t C_t, \quad g = \sum_t C_t^2.$$

In Folge von (40.) wird nun $e = g$ und $f = 0$, und die betreffende Form erhält die Gestalt

$$(43.) \quad e\,dp^2+2f\,dp\,dq+g\,dq^2 = \sum_t A_t^2(dp^2+dq^2),$$

ihre Determinante $eg-ff = \mathfrak{E}$ den Ausdruck

$$(44.) \quad \mathfrak{E} = (\sum_t A_t^2)^2.$$

Für die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial\sqrt{\mathfrak{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_t}{\partial p}\right)}$ und $\frac{\partial\sqrt{\mathfrak{E}}}{\partial\left(\frac{\partial x_t}{\partial q}\right)}$ gehen ferner aus

(6ª.), (39.), (42.) die Ausdrücke hervor

$$(45.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\sqrt{\mathfrak{E}}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial p}\right)} = \dfrac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial p} = A_\mathfrak{t} \\ \dfrac{\partial\sqrt{\mathfrak{E}}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial q}\right)} = \dfrac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial q} = -C_\mathfrak{t}. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann man der Gleichung (38.) die folgende Gestalt geben

$$(46.)\quad dx_\mathfrak{t} + i\,dz_\mathfrak{t} = \left(\frac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial p} - i\frac{\partial\sqrt{\mathfrak{E}}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial q}\right)}\right)dp + \left(\frac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial q} + i\frac{\partial\sqrt{\mathfrak{E}}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial p}\right)}\right)dq,$$

welche mit der Gestalt der Gleichung (25.) vollkommen übereinstimmt. Wie die Gleichung (25.) zufolge einer obigen Bemerkung die Gleichung (23.) enthält, und auf Grund von dieser das System von Differentialgleichungen (22.) nach sich zieht, so ergiebt sich aus der Gleichung (46.) die Gleichung

$$(47.)\quad dz_\mathfrak{t} = -\frac{\partial\sqrt{\mathfrak{E}}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial q}\right)}dp + \frac{\partial\sqrt{\mathfrak{E}}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial p}\right)}dq,$$

und durch Anwendung der Bedingung der Integrabilität folgt das zu erweisende Factum, dass die in Rede stehenden Functionen x_a das mit (22.) übereinstimmende System von partiellen Differentialgleichungen

$$(48.)\quad \frac{\partial\left(\dfrac{\partial\sqrt{\mathfrak{E}}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial p}\right)}\right)}{\partial p} + \frac{\partial\left(\dfrac{\partial\sqrt{\mathfrak{E}}}{\partial\left(\dfrac{\partial x_\mathfrak{t}}{\partial q}\right)}\right)}{\partial q} = 0$$

erfüllen. Die Vergleichung von (23.) und (47.) macht ausserdem einleuchtend, dass die Function $z_\mathfrak{t}$ von der betreffenden Function $x_\mathfrak{t}$ nur um eine additive Constante verschieden sein kann. Demnach ist die vollständige Integration des Systems von partiellen Differentialgleichungen (22.) ausgeführt.

Bonn, den 19. Juli 1873.

Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie.

(Von Herrn *Mertens* in Krakau.)

In *Legendres* Théorie des nombres (Troisième édition, quatrième partie §. VIII.) findet man die zwei merkwürdigen Formeln

$$\Sigma\frac{1}{q} = l(lG-0{,}08366)+C,$$

$$\Pi\left(1-\frac{1}{q}\right) = \frac{A}{lG-0{,}08366},$$

wo das Summen- und Productzeichen alle bis zu der gegebenen Grenze G vorkommenden Primzahlen q umfassen, l das Zeichen des natürlichen Logarithmus ist und C, A gewisse unbekannte numerische Constanten bezeichnen. Entfernt man die Zahl 0,08366, die ohnehin als auf empirischem Wege bestimmt von zweifelhaftem Werthe ist, so besagen die angeführten Gleichungen, dass für grosse Werthe von G näherungsweise

$$\Sigma\frac{1}{q} = llG+C,$$

$$\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{q}} = C'lG$$

gesetzt werden darf.

In dieser Gestalt findet man die *Legendre*schen Formeln in einer Abhandlung von Herrn *Tschebischeff* *) wieder, in welcher auch ein Beweis derselben gegeben worden ist. Da indessen dieser Beweis nicht alle Zweifel beseitigt, so werde ich in den folgenden Zeilen versuchen, einen strengen Beweis der *Legendre*schen Formeln mitzutheilen und zugleich die bis jetzt, so viel ich weiss, unbekannten Constanten C, C' zu bestimmen.

Ferner sollen noch die Werthe der Summen aller reciproken bis zu der gegebenen Grenze G vorkommenden und bezüglich in einer der drei Formen $4m+1$, $4m+3$, $a+mk$ enthaltenen Primzahlen ermittelt werden, wo a und k gegebene Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor vorstellen.

*) Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, in *Liouvilles* Journal T. XVII. 1° série.

1.

Herr *Tschebischeff* hat in einer merkwürdigen Abhandlung*) für die Summe θx der natürlichen Logarithmen aller Primzahlen, welche $\leqq x$ sind, vermittelst der Gleichung

$$(1.)\quad \begin{cases} l(1.2.3\ldots[x]) = \theta x + \theta\sqrt{x} + \theta\sqrt[3]{x} + \cdots, \\ \qquad + \theta\frac{x}{2} + \theta\sqrt{\frac{x}{2}} + \theta\sqrt[3]{\frac{x}{2}} + \cdots, \\ \qquad + \theta\frac{x}{3} + \theta\sqrt{\frac{x}{3}} + \theta\sqrt[3]{\frac{x}{3}} + \cdots, \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

eine obere Grenze gefunden ($[x]$ soll hier wie überall im Folgenden die in x enthaltene grösste ganze Zahl vorstellen). Da ich diese obere Grenze für das Folgende nicht mit der Genauigkeit brauche, mit welcher sie Herr *Tschebischeff* gegeben hat, so werde ich mir erlauben, die Gleichung (1.) zu benutzen, um zu beweisen, dass immer $\theta x < 2x$ ist.

Setzt man nämlich

$$\theta x + \theta\sqrt{x} + \theta\sqrt[3]{x} + \cdots = \chi x,$$

so ergiebt sich

$$l(1\cdot 2\cdot 3\cdots[x]) - 2l\left(1\cdot 2\cdots\left[\frac{x}{2}\right]\right) = \chi x - \chi\frac{x}{2} + \chi\frac{x}{3} - \chi\frac{x}{4} + \cdots$$

und wegen

$$\chi\frac{x}{3} \geqq \chi\frac{x}{4}, \quad \chi\frac{x}{5} \geqq \chi\frac{x}{6}, \cdots$$

$$(2.)\quad \chi x - \chi\frac{x}{2} < l(1\cdot 2\cdot 3\cdots[x]) - 2l\left(1\cdot 2\cdots\left[\frac{x}{2}\right]\right).$$

Da nun nach der *Stirling*schen Formel

$$l(1\cdot 2\cdot 3\cdots[x]) < x\,lx + \tfrac{1}{2}lx - x + l\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12x},$$

$$2l\left(1\cdot 2\cdot 3\cdots\left[\frac{x}{2}\right]\right) > x\,lx - x\,l2 - lx - x + 2l\sqrt{2\pi} + l2 - \frac{2}{x-2}$$

ist, so folgt aus (2.), dass immer

$$\begin{aligned} \chi x - \chi\frac{x}{2} &< x\,l2 + \tfrac{3}{2}lx - l\sqrt{2\pi} - l2 + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{12x} \\ &< x - \left\{(1-l2)x - \frac{3\,lx}{2} + l\sqrt{2\pi} + l2 - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{12x}\right\} \\ &< x \end{aligned}$$

---

*) Mémoire sur les nombres premiers, *Liouvilles* Journal T. XVII. 1° série.

ist, wofern $x \geqq 4$. Ist $x < 4$, so verificirt man leicht direct diese letzte Ungleichung, und es ist mithin allgemein

$$\chi x - \chi\frac{x}{2} < x.$$

Wird hierin der Reihe nach x, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$, $\frac{x}{8}$ u. s. w. statt x gesetzt, bis man zu einem Gliede $\frac{x}{2^m}$ gelangt, welches < 2 ist, so giebt die Addition der Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\chi x - \chi\frac{x}{2} &< x,\\
\chi\frac{x}{2} - \chi\frac{x}{4} &< \frac{x}{2},\\
\chi\frac{x}{4} - \chi\frac{x}{8} &< \frac{x}{4},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\chi x &< x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)\\
&< 2x,
\end{aligned}$$

also um so mehr

$$(3.)\qquad \theta x < 2x.$$

2.

Die Primzahl q geht in dem Producte $1.2.3\ldots n$ genau

$$\left[\frac{n}{q}\right]+\left[\frac{n}{q^2}\right]+\left[\frac{n}{q^3}\right]+\cdots$$

mal auf; man hat daher

$$l(1.2.3\ldots n) = \Sigma\left[\frac{n}{q}\right]lq+\Sigma\left[\frac{n}{q^2}\right]lq+\Sigma\left[\frac{n}{q^3}\right]lq+\cdots,$$

wo die Summen alle Primzahlen bis zur Grenze n umfassen. Aus dieser Gleichung folgt, wenn

$$\left[\frac{n}{q}\right] = \frac{n}{q} - r_q$$

und für $l(1.2.3\ldots n)$ der aus der *Stirling*schen Formel sich ergebende Werth

$$n\,ln - n + \tfrac{1}{2}ln + l\sqrt{2\pi} + \frac{\lambda}{12n}$$

gesetzt wird,

$$(4.)\qquad ln - 1 + \frac{ln}{2n} + \frac{l\sqrt{2\pi}}{n} + \frac{\lambda}{12n^2} = \Sigma\frac{lq}{q} - \frac{1}{n}\Sigma r_q lq + \frac{1}{n}\Sigma\left[\frac{n}{q^2}\right]lq+\cdots;$$

λ bedeutet, wie überall im Folgenden, eine Zahl, von der man nur zu wissen braucht, dass ihr absoluter Werth die Einheit nicht übersteigt.

Die Differenz $ln-\Sigma\frac{lq}{q}$ ist also der Gleichung (4.) zufolge (wofern $n\geqq 5$) zwischen den Grenzen

$$1+\Sigma\frac{lq}{q^2}+\Sigma\frac{lq}{q^3}+\cdots$$

und

$$-\frac{1}{n}\Sigma lq$$

enthalten; da nun einerseits nach (3.)

$$\Sigma lq<2n$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\Sigma\frac{lq}{q^2}+\Sigma\frac{lq}{q^3}+\cdots &< \sum_2^\infty\frac{lq}{q^2}+\sum_2^\infty\frac{lq}{q^3}+\cdots\\ &< \sum_2^\infty\frac{lq}{q^2}+\tfrac{1}{2}\sum_2^\infty\frac{lq}{q^2}+\cdots\\ &< \tfrac{3}{2}\frac{\sum_1^\infty\frac{ln}{n^2}}{\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}}<\frac{9}{\pi^2}<1\end{aligned}$$

ist, so schliesst man, wie gross auch n sei, ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$(5.)\qquad \Sigma\frac{lq}{q}-ln<2.$$

3.

Bezeichnet man allgemein eine Grösse, welche mit der positiven Zahl ϱ zugleich unendlich klein wird, mit (ϱ), so ist bekanntlich nach *Euler* und *Dirichlet*

$$\begin{aligned}\prod_2^\infty\frac{1}{1-\frac{1}{q^{1+\varrho}}} &= 1+\frac{1}{2^{1+\varrho}}+\frac{1}{3^{1+\varrho}}+\frac{1}{4^{1+\varrho}}+\cdots\\ &= \frac{1+(\varrho)}{\varrho}\end{aligned}$$

und daher, wenn man zu den Logarithmen übergeht und zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}\sum_2^\infty\frac{1}{q^2}+\tfrac{1}{3}\sum_2^\infty\frac{1}{q^3}+\cdots=H$$

setzt,

$$\sum_2^\infty\frac{1}{q^{1+\varrho}}+\tfrac{1}{2}\sum_2^\infty\frac{1}{q^{2+2\varrho}}+\tfrac{1}{3}\sum_2^\infty\frac{1}{q^{3+3\varrho}}+\cdots=l\left(\frac{1}{\varrho}\right)+(\varrho)$$

oder

$$(6.)\qquad \sum_{2}^{\infty}\frac{1}{q^{1+\varrho}} = l\left(\frac{1}{\varrho}\right)-H+(\varrho).$$

Es sei nun fx die Summe derjenigen Glieder der Reihe

$$\frac{l2}{2},\ \frac{l3}{3},\ \frac{l5}{5},\ \frac{l7}{7},\ \frac{l11}{11},\ \frac{l13}{13},\ \ldots$$

deren Nenner $\leqq x$ sind, G eine gegebene ganzzahlige Grenze, und es werde allgemein, wenn $\mathfrak{A}(n)$ als Function des Stellenzeigers n gegeben ist, unter $\sum_{a}^{b}\mathfrak{A}(q)$ die Summe derjenigen Ausdrücke $\mathfrak{A}$ verstanden, welche den in dem Intervall von a bis b mit Einschluss beider Grenzen vorkommenden Primzahlen entsprechen.

Da die Differenz $\frac{fn-f(n-1)}{ln}$ den Werth 0 oder $\frac{1}{n}$ hat, je nachdem n zusammengesetzt oder Primzahl ist, so hat man

$$\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+\varrho}} = \sum_{G+1}^{n}\frac{fn-f(n-1)}{n^{\varrho}ln}$$
$$= -\frac{fG}{(G+1)^{\varrho}l(G+1)}+\sum_{G+1}^{\infty}{}_{n}fn\left\{\frac{1}{n^{\varrho}ln}-\frac{1}{(n+1)^{\varrho}l(n+1)}\right\}.$$

Ersetzt man fn durch $ln+D_n$ und beachtet, dass

$$ln\left\{\frac{1}{n^{\varrho}ln}-\frac{1}{(n+1)^{\varrho}l(n+1)}\right\} = \frac{1}{n^{\varrho}}-\frac{1}{(n+1)^{\varrho}}-\frac{l\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{(n+1)^{\varrho}l(n+1)}$$
$$= \frac{1}{n^{\varrho}}-\frac{1}{(n+1)^{\varrho}}+\frac{1}{(n+1)^{1+\varrho}l(n+1)}+\frac{\lambda}{2n(n+1)^{1+\varrho}l(n+1)}$$

ist, so ergiebt sich

$$(7.)\qquad \sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+\varrho}} = \sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}ln}+\Re,$$

wo

$$\Re = \frac{l(G+1)-fG}{(G+1)^{\varrho}l(G+1)}-\frac{1}{(G+1)^{1+\varrho}l(G+1)}+\lambda\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)^{1+\varrho}l(n+1)}$$
$$+\sum_{G+1}^{\infty}D_n\left\{\frac{1}{n^{\varrho}ln}-\frac{1}{(n+1)^{\varrho}l(n+1)}\right\}.$$

Für $\Re$ ist es leicht eine obere Grenze anzugeben, wenn man sich erinnert, dass nach (5.) der Zahlenwerth von D_n nie die Zahl 2 übersteigen kann. Es ist nämlich bis $\varrho = 0$ hin

$$\frac{l(G+1)-fG}{(G+1)^{\varrho}l(G+1)}-\frac{1}{(G+1)^{1+\varrho}l(G+1)}=-\frac{D_G}{(G+1)^{\varrho}l(G+1)}+\frac{l\left(1+\frac{1}{G}\right)-\frac{1}{G+1}}{(G+1)^{\varrho}l(G+1)}$$

$$<\frac{2}{l(G+1)}+\frac{1}{G^2l(G+1)},$$

$$\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)^{1+\varrho}l(n+1)}<\tfrac{1}{2}\sum_{G+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{nln}-\frac{1}{(n+1)l(n+1)}\right\}$$

$$<\frac{1}{2(G+1)l(G+1)},$$

$$\sum_{G+1}^{\infty}D_n\left\{\frac{1}{n^{\varrho}ln}-\frac{1}{(n+1)^{\varrho}l(n+1)}\right\}<2\sum_{G+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{ln}-\frac{1}{l(n+1)}\right\}$$

$$<\frac{2}{l(G+1)}$$

und somit

$$(8.)\qquad \mathfrak{R}<\frac{4}{l(G+1)}+\frac{1}{Gl(G+1)}.$$

Nach dem binomischen Lehrsatze ist ferner

$$\frac{1}{\varrho n^{\varrho}}-\frac{1}{\varrho(n+1)^{\varrho}}=\frac{1}{(n+1)^{1+\varrho}}+\frac{(1+\varrho)}{2}\frac{1}{(n+1)^{2+\varrho}}+\frac{(1+\varrho)(2+\varrho)}{2.3}\frac{1}{(n+1)^{3+\varrho}}+\cdots$$

und, wenn von $n=G$ bis $n=\infty$ summirt wird,

$$(9.)\qquad \sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}}=\frac{G^{-\varrho}}{\varrho}-\mathfrak{R}',$$

$$(10.)\qquad \mathfrak{R}'=\frac{1+\varrho}{2}\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+\varrho}}+\frac{(1+\varrho)(2+\varrho)}{2.3}\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^{3+\varrho}}+\cdots.$$

Durch Integration der Gleichung (9.) von $\varrho=\varrho$ bis $\varrho=1$ ergiebt sich

$$\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}ln}-\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^2ln}=\int_{\varrho}^{1}\frac{G^{-\varrho}}{\varrho}d\varrho-\int_{\varrho}^{1}\mathfrak{R}'\,d\varrho$$

$$=\int_{\varrho lG}^{\infty}\frac{dx}{e^x-1}-\int_{\varrho lG}^{\infty}\left\{\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right\}dx-\int_{1}^{\infty}\frac{G^{-x}}{x}dx-\int_{\varrho}^{1}\mathfrak{R}'\,d\varrho$$

$$=-l(1-G^{-\varrho})-\int_{0}^{\infty}\left\{\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right\}dx$$

$$-\int_{1}^{\infty}G^{-x}\frac{dx}{x}-\int_{\varrho}^{1}\mathfrak{R}'\,d\varrho+(\varrho)$$

oder endlich

$$(11.)\qquad \sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}ln}=l\left(\frac{1}{\varrho}\right)-llG-\mathfrak{C}-\int_{1}^{\infty}G^{-x}\frac{dx}{x}+\sum_{G+1}^{x}\frac{1}{n^2ln}-\int_{\varrho}^{1}\mathfrak{R}'\,d\varrho+(\varrho),$$

wo $\mathfrak{E}$ die *Euler*sche Constante

$$0{,}5772156649\ldots$$

vorstellt. Es ist nun aber nach (10.)

$$\int_{\varrho}^{1} \mathfrak{R}'\, d\varrho < \int_{0}^{1} \left\{ \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\varrho}} + \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{n^{3+\varrho}} + \cdots \right\} d\varrho$$

$$< \sum_{G+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 ln} - \frac{1}{n^3 ln} \right) + \sum_{G+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3 ln} - \frac{1}{n^4 ln} \right) + \cdots$$

$$< \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 ln};$$

ferner

$$\int_{1}^{\infty} \frac{G^{-x}\, dx}{x} < \frac{1}{G\, lG}$$

und

$$\sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 ln} < \sum_{G+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)\, l(n-1)} - \frac{1}{n\, ln} \right)$$

$$< \frac{1}{G\, lG}.$$

Die Gleichung (11.) kann hiernach auch in der Gestalt

$$\sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho} ln} = l\left(\frac{1}{\varrho}\right) - llG - \mathfrak{E} + \frac{\lambda}{G\, lG} + (\varrho)$$

geschrieben werden und giebt mit (7.) und (8.) verbunden

$$(12.) \qquad \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\varrho}} = l\left(\frac{1}{\varrho}\right) - llG - \mathfrak{E} + \delta + (\varrho),$$

wo δ nie die Grenzen $\pm \left\{ \frac{4}{l(G+1)} + \frac{2}{G\, lG} \right\}$ übersteigen kann.

Subtrahirt man (12.) von (6.) und denkt sich hierauf ϱ unendlich klein, so erhält man die erste *Legendre*sche Formel

$$(13.) \qquad \sum_{2}^{G} \frac{1}{q} = llG + \mathfrak{E} - H + \delta,$$

$$\delta < \frac{4}{l(G+1)} + \frac{2}{G\, lG}.$$

Die zweite Formel *Legendre*s ergiebt sich, wenn man erwägt, dass

$$l \prod_{2}^{G} \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \sum_{2}^{G} \frac{1}{q} + \tfrac{1}{2} \sum_{2}^{G} \frac{1}{q^2} + \tfrac{1}{3} \sum_{2}^{G} \frac{1}{q^3}$$

$$= \sum_{2}^{G} \frac{1}{q} + H - \tfrac{1}{2} \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{q^2} - \tfrac{1}{3} \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{q^3} - \cdots$$

und dass

$$\tfrac{1}{2}\sum_{G+1}^{x}\frac{1}{q^2}+\tfrac{1}{3}\sum_{G+1}^{x}\frac{1}{q^3}+\cdots<\frac{1}{2G}$$

ist. Mit Hülfe von (13.) wird dann

$$(14.)\qquad l\prod_{2}^{G}\frac{1}{1-\frac{1}{q}}=llG+\mathfrak{E}+\delta'$$

$$(15.)\qquad \prod_{2}^{G}\frac{1}{1-\frac{1}{q}}=e^{\mathfrak{E}+\delta'}lG$$

$$\delta'<\frac{4}{l(G+1)}+\frac{2}{GlG}+\frac{1}{2G}.$$

4.

Die Constante H lässt sich, wie folgt, berechnen. Wird allgemein

$$\frac{1}{k}\sum_{2}^{x}\frac{1}{q^k}=x_k,\quad \sum_{2}^{x}\frac{1}{n^k}=S_k$$

gesetzt, so ist

$$(16.)\quad\begin{cases} H=x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+\cdots\\ \tfrac{1}{2}lS_2=x_2\quad+x_4\quad+x_6\quad+x_8+\cdots\\ \tfrac{1}{3}lS_3=\quad x_3\quad+x_6\quad+\cdots\\ \tfrac{1}{4}lS_4=\quad x_4\quad+x_8+\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Um aus diesen unendlich vielen Gleichungen x_2, x_3, x_4, ... zu eliminiren, sei $\mu(n)$ ein Multiplicator, welcher

1^0 den Werth 1 hat, wenn $n=1$ oder aus einer geraden Anzahl verschiedener Primzahlen zusammengesetzt ist,

2^0 den Werth -1 hat, wenn n aus einer ungeraden Anzahl verschiedener Primfactoren zusammengesetzt ist,

3^0 verschwindet, wenn n gleiche Primfactoren besitzt.

Bezeichnen dann $1, d, d', \ldots$ alle Theiler der Zahl n, so lässt sich aus der Definition der Zahlen $\mu(1), \mu(2), \ldots$ leicht beweisen, dass

$$\mu(1)+\mu(d)+\mu(d')+\cdots=0$$

ist für jede Zahl n ausser der Einheit. Multiplicirt man also die Gleichungen (16.) der Reihe nach mit $\mu(1)$, $\mu(2)$, $\mu(3)$ u. s. w. und addirt hierauf dieselben, so fallen x_2, x_3, x_4, ... alle heraus und man erhält

$$H-\tfrac{1}{2}lS_2-\tfrac{1}{3}lS_3-\tfrac{1}{5}lS_5+\tfrac{1}{6}lS_6-\tfrac{1}{7}lS_7+\tfrac{1}{10}lS_{10}-\cdots=0$$

oder

$$H = \tfrac{1}{2} lS_2 + \tfrac{1}{3} lS_3 + \tfrac{1}{5} lS_5 - \tfrac{1}{6} lS_6 + \tfrac{1}{7} lS_7 - \tfrac{1}{10} lS_{10} + \cdots.$$

Hinsichtlich der Convergenz können bei der Eliminirung von x_2, x_3, $\cdots$ keine Bedenken entstehen, da diese Zahlen wie die Glieder der geometrischen Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ abnehmen.

Mit Hülfe der Werthe der Reihen S_2, S_3, S_4, ... welche *Legendre* in seinem Traité des intégrales eulériennes gegeben hat, findet man

$$(17.) \quad \begin{cases} H = 0{,}31571845205 \\ \mathfrak{C} - H = \lim \left\{ \sum_2^G \frac{1}{q} - ll\,G \right\}_{G=\infty} = 0{,}2614972128. \end{cases}$$

5.

Denkt man sich in allen Gliedern der Reihe

$$(18.) \quad -\frac{l3}{3} + \frac{l5}{5} - \frac{l7}{7} + \frac{l9}{9} - \frac{l11}{11} + \frac{l13}{13} - \cdots,$$

deren Nenner nicht grösser als die gegebene ganzzahlige Grenze G sind, den Logarithmus in die Logarithmen der Primfactoren des betreffenden Nenners zerlegt und hierauf alle Ausdrücke, welche den Logarithmus desselben Primfactors enthalten, in ein Glied zusammengezogen, so wird allgemein der Logarithmus der ungeraden Primzahl q mit dem Factor

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} \left\{1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots \pm \frac{1}{f_1}\right\} \\ &+ \frac{1}{q^2} \left\{1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots \pm \frac{1}{f_2}\right\} \\ &+ \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^3} \left\{1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots \pm \frac{1}{f_3}\right\} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

behaftet erscheinen, wo

$$qf_1 \leqq G < q(f_1+2), \quad q^2 f_2 \leqq G < q^2(f_2+2) \quad \text{u. s. w.}$$

Beachtet man nun, dass

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots \pm \frac{1}{f_1} = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\lambda}{f_1+2}$$

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots \pm \frac{1}{f_2} \leqq 1$$

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots \pm \frac{1}{f_3} \leqq 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und dass $\frac{1}{f_1+2} < \frac{q}{G}$ ist, so kann man

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\cdots\pm\frac{1}{f_1} = \frac{\pi}{4}+\frac{\lambda q}{G}$$

setzen und dem Coefficienten von lq in dem vorher definirten Gliede die Gestalt

$$(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{\pi}{4}\frac{1}{q}+\frac{\lambda}{G}+\lambda'\left\{\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\cdots\right\}$$

geben, wo λ' ebenso wie λ die Einheit nicht übersteigt. Es wird hienach

$$\sum_1^{2h+1\leq G}(-1)^h\frac{l(2h+1)}{2h+1} = \frac{\pi}{4}\sum_3^G\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}lq}{q}+\frac{\lambda}{G}\sum_3^G lq+\lambda'\Sigma\left\{\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\cdots\right\}$$

oder

$$(19.)\qquad \sum_3^G(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{lq}{q} = \frac{4}{\pi}\sum_1^{2h+1\leq G}(-1)^h\frac{l(2h+1)}{2h+1}+\Re$$

sein, wo ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\Re < \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{G}\sum_3^G lq+\sum_3^G\frac{lq}{q^2}+\sum_3^G\frac{lq}{q^3}\cdots\right\}$$

$$< \frac{4}{\pi}\left\{2+\sum_3^x\frac{lq}{q(q-1)}\right\} < \frac{12}{\pi}$$

ist. Da nun die Reihe (18.) convergent ist, so zeigt die Gleichung (19.), dass der Zahlenwerth der Summe $\sum_3^G(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{lq}{q}$ nie eine gewisse angebbare Constante C überschreiten kann, wie gross auch G sei.

6.

Mit Hülfe dieses Satzes ist es leicht die Convergenz der Reihe

$$(20.)\qquad -\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{17}-\tfrac{1}{19}-\tfrac{1}{23}+\tfrac{1}{29}-\cdots,$$

deren Glieder aus den reciproken Werthen der aufeinanderfolgenden ungeraden mit dem Zeichen $(-1)^{\frac{q-1}{2}}$ behafteten Primzahlen q bestehen, zu beweisen. Man hat nämlich, wenn

$$\sum_3^x(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{lq}{q} = \varphi x$$

gesetzt wird,

$$\frac{\varphi n-\varphi(n-1)}{ln} = \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} \text{ oder } = 0,$$

je nachdem n eine ungerade Primzahl ist oder nicht, und daher

$$\sum_{G+1}^{G'} \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} = \sum_{G+1}^{G'} \frac{\varphi n - \varphi(n-1)}{ln}$$

$$= -\frac{\varphi G}{l(G+1)} + \frac{\varphi G'}{l(G'+1)} + \sum_{G+1}^{G'} \varphi n \left\{\frac{1}{ln} - \frac{1}{l(n+1)}\right\}.$$

Da $\frac{1}{ln} - \frac{1}{l(n+1)}$ positiv ist, so ist ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\sum_{G+1}^{G'} \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} < \frac{C}{l(G+1)} + \frac{C}{l(G'+1)} + C \sum_{G+1}^{G'} \left\{\frac{1}{ln} - \frac{1}{l(n+1)}\right\}$$

$$< \frac{2C}{l(G+1)},$$

wie weit auch G' über G angenommen werden möge. Die Convergenz der Reihe (20.) ist also dargethan, weil G immer so gross gewählt werden kann, dass $\frac{2C}{l(G+1)}$ von vorgeschriebener Kleinheit wird.

Wird der Werth der unendlichen Reihe $\sum_{3}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q}$ mit A bezeichnet, so hat man

$$\sum_{3}^{G} \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} = A + \frac{\lambda 2C}{l(G+1)}$$

und nach (13.)

$$\sum_{3}^{G} \frac{1}{q} = llG + \mathfrak{E} - H - \tfrac{1}{2} + \delta,$$

woraus durch Addition und Subtraction

$$(21.) \qquad \sum_{3}^{G} \frac{1}{f} = \tfrac{1}{2} llG + \frac{\mathfrak{E} - H + A - \frac{1}{2}}{2} + \varepsilon,$$

$$(22.) \qquad \sum_{3}^{G} \frac{1}{f'} = \tfrac{1}{2} llG + \frac{\mathfrak{E} - H - A - \frac{1}{2}}{2} + \varepsilon'$$

entspringt; f vertritt alle bis zur Grenze G vorkommenden Primzahlen von der Form $4m+1$, f' die Primzahlen von der Form $4m+3$; ε und ε' können nie die Grenze $\frac{2+C}{l(G+1)} + \frac{1}{GlG}$ übersteigen.

7.

Nach *Euler* ist bekanntlich

$$\prod_{3}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{1+\varrho}}} = 1 - \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \frac{1}{5^{1+\varrho}} - \frac{1}{7^{1+\varrho}} + \frac{1}{9^{1+\varrho}} - \cdots,$$

$$(23.)\quad \sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{1+\varrho}} + \tfrac{1}{2}\sum_3^\infty \frac{1}{q^{2+2\varrho}} + \tfrac{1}{3}\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{3+3\varrho}} + \cdots = l\Big(1 - \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \frac{1}{5^{1+\varrho}} - \cdots\Big).$$

Mit unbegrenzt abnehmendem ϱ strebt die Summe der Reihe $\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{1+\varrho}}$ der Grenze $\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q}$ zu, weil, ganz wie oben bewiesen wird, dass

$$\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{1+\varrho}} = \sum_3^G \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{1+\varrho}} + \frac{\lambda 2C}{l(G+1)}$$

gesetzt werden kann; die rechte Seite von (23.) nähert sich hingegen der Grenze

$$l(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots) = l\Big(\frac{\pi}{4}\Big).$$

Man hat daher

$$\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} + \tfrac{1}{2}\sum_3^\infty \frac{1}{q^2} + \tfrac{1}{3}\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^3} + \cdots = l\Big(\frac{\pi}{4}\Big),$$

und hieraus

$$\prod_3^\infty \frac{1}{1 - \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q}} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Diese Gleichung findet man zwar schon bei *Euler* (Introductio in analysin infinitorum Cap. XV. §. 285); allein sie war so lange problematisch, als die Convergenz des unendlichen Productes unbewiesen blieb.

Setzt man

$$1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \frac{1}{9^{2k+1}} - \cdots = T_{2k+1},$$

$$1 + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}} + \frac{1}{9^{2k}} + \cdots = T_{2k},$$

$$\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{2k+1}} = (2k+1)y_{2k+1}, \quad \sum_3^\infty \frac{1}{q^{2k}} = 2k\,y_{2k},$$

so hat man

$$\begin{aligned}
lT_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + \cdots,\\
\tfrac{1}{2}lT_2 &= \quad y_2 \quad + y_4 \quad + y_6 \quad + y_8 + \cdots,\\
\tfrac{1}{3}lT_3 &= \quad\quad y_3 \quad\quad + y_6 \quad\quad + \cdots,\\
\tfrac{1}{4}lT_4 &= \quad\quad\quad y_4 \quad\quad\quad + y_8 + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

und mit Hülfe der unter 4. gebrauchten Multiplicatoren $\mu(1)$, $\mu(2)$, ...*)

$$(24.) \qquad y_1 = A = lT_1 - \tfrac{1}{2}lT_2 - \tfrac{1}{3}lT_3 - \tfrac{1}{5}lT_5 + \tfrac{1}{6}lT_6 - \tfrac{1}{7}lT_7 + \tfrac{1}{10}lT_{10} - \cdots.$$

Nach dieser Formel ist die Berechnung von A leicht und man findet

$$A = -0{,}33498132529,$$

$$\frac{\mathfrak{E} - H + A - \frac{1}{2}}{2} = \lim\left\{\sum_3^G \frac{1}{f} - \tfrac{1}{2}ll\,G\right\}_{G=\infty} = -0{,}2867420562,$$

$$\frac{\mathfrak{E} - H - A - \frac{1}{2}}{2} = \lim\left\{\sum_3^G \frac{1}{f'} - \tfrac{1}{2}ll\,G\right\}_{G=\infty} = 0{,}0482392690.$$

8.

Bezeichnet $k = 2^\nu p^\pi p'^\pi \ldots$ eine gegebene Zahl, so entspricht nach *Dirichlet* **) jeder zu k theilerfremden Zahl m ein bestimmtes System von Indices in Bezug auf die Zahl k, welches folgendermassen gebildet wird: 1^0. Wenn $\nu < 2$, so wird der Modul 2 nicht berücksichtigt. 2^0. Wenn $\nu \geqq 2$, so existirt immer ein nach dem Modul $2^{\nu-2}$ ganz bestimmter Exponent β_m, welcher die Bedingung

$$m \equiv (-1)^{\frac{m-1}{2}} 5^{\beta_m} \pmod{2^\nu}$$

erfüllt; es sind dann $\frac{m-1}{2}$, β die zwei Indices von m in Bezug auf den Modul 2^ν. 3^0. Für jede Potenz p^π einer ungeraden Primzahl, falls dieselbe überhaupt unter den Factoren von k vorkommt, lege man eine primitive Wurzel g zu Grunde und bestimme den Index γ_m von m in Bezug auf diese Grundzahl g. 4^0. Der Complex $\frac{m-1}{2}$, β_m, γ_m, γ'_m, ... stellt dann das System der Indices der Zahl m in Bezug auf k dar; dieser Complex wird immer wenigstens eine Zahl enthalten, wofern nicht $k = 2$ ist, welcher Fall hier ausgeschlossen werden kann.

Es seien nun ε, η, ω, ω', ... bez. Wurzeln der Gleichungen

$$\varepsilon^2 = 1, \quad \eta^{2^{\nu-2}} = 1, \quad \omega^{\varphi p^\pi} = 1, \quad \omega'^{\varphi p'^{\pi'}} = 1, \quad \ldots$$

das Zeichen $\varphi p^\pi \ldots$ in der Bedeutung von *Gauss* genommen, wobei zu bemerken ist, dass für $\nu < 2$ die beiden ersten, für $k = 2^\nu$ die dritte und alle

---

*) Vergleiche Note sur différentes séries par M. *P. Tschebischeff* in *Liouvilles* Journal T. XVI.

**) Abhandlungen der Berliner Akademie 1837.

folgenden Gleichungen wegzufallen haben, und man setze

$$(25.) \qquad \varepsilon^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\beta_m} \omega^{\gamma_m} \omega'^{\gamma'_m} \ldots = c_m;$$

für solche Zahlen m dagegen, welche mit k Theiler gemein haben, definire man $c_m = 0$. Die Coefficienten $c_1, c_2, c_3, \ldots$ haben dann folgende Eigenschaften:

$$c_m . c_n = c_{mn}, \quad c_{m+hk} = c_m, \quad c_{hk+1} = 1,$$

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+k} = 0,$$

wenn nicht alle Wurzeln $\varepsilon, \eta, \omega, \omega', \cdots = 1$ sind,

$$\Sigma c_m = \varphi k \quad \text{oder} \quad = 0$$

je nachdem $m \equiv 1 \pmod{k}$ oder nicht; die Summe erstreckt sich auf alle φk Werthe von c_m, welche dadurch erhalten werden, dass man in den Ausdruck (25.) alle Werthe von $\varepsilon, \eta, \omega, \omega', \cdots$ substituirt.

Sind nicht alle Wurzeln $\varepsilon, \eta, \omega, \omega', \cdots$ in dem Ausdrucke c_m der Einheit gleich, so convergiren die Reihen

$$\frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{3} + \cdots,$$

$$\frac{c_1 l1}{1} + \frac{c_2 l2}{2} + \frac{c_3 l3}{3} + \cdots.$$

Namentlich ist

$$\frac{c_{n+1}}{n+1} + \frac{c_{n+2}}{n+2} + \frac{c_{n+3}}{n+3} + \cdots = c_{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + (c_{n+1} + c_{n+2})\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$
$$+ (c_{n+1} + c_{n+2} + c_{n+3})\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \cdots$$

und demnach

$$\mod\left\{\frac{c_{n+1}}{n+1} + \frac{c_{n+2}}{n+2} + \cdots\right\} < \varphi k \left\{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \cdots\right\}$$
$$< \frac{\varphi k}{n+1}.$$

Dies vorausgeschickt, zerlege man in jedem Gliede der Reihe

$$(26.) \qquad \frac{c_2 l2}{2} + \frac{c_3 l3}{3} + \frac{c_4 l4}{4} + \cdots + \frac{c_G lG}{G}$$

den Logarithmus in die Logarithmen der Primfactoren des betreffenden Stellenzeigers und vereinige hierauf alle mit dem Logarithmus der nämlichen Primzahl q behafteten Ausdrücke zu einem Gesammtgliede. Es wird dann allgemein

lq mit dem Factor

$$\begin{aligned}
&\frac{c_q}{q}+\frac{c_{2q}}{2q}+\frac{c_{3q}}{3q}+\cdots+\frac{c_{fq}}{fq}\\
+&\frac{c_{q^2}}{q^2}+\frac{c_{2q^2}}{2q^2}+\cdots\qquad\qquad+\frac{c_{gq^2}}{gq^2}\\
+&\frac{c_{q^3}}{q^3}+\frac{c_{2q^3}}{2q^3}+\cdots\qquad\qquad+\frac{c_{hq^3}}{hq^3}\\
+&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

multiplicirt sein, wo

$$f=\left[\frac{G}{q}\right],\quad g=\left[\frac{G}{q^2}\right],\quad h=\left[\frac{G}{q^3}\right],\ \cdots.$$

Weil nun aber

$$\begin{aligned}
\frac{c_q}{q}+\frac{c_{2q}}{2q}+\cdots+\frac{c_{fq}}{fq} &= \frac{c_q}{q}\left\{\frac{c_1}{1}+\frac{c_2}{2}+\cdots+\frac{c_f}{f}\right\}\\
&= \frac{c_q}{q}\sum_1^\infty\frac{c_n}{n}-\frac{c_q}{q}\sum_{f+1}^\infty\frac{c_n}{n},\\
\frac{c_{q^2}}{q^2}+\frac{c_{2q^2}}{2q^2}+\cdots+\frac{c_{gq^2}}{gq^2} &= \frac{c_{q^2}}{q^2}\left\{\frac{c_1}{1}+\frac{c_2}{2}+\cdots+\frac{c_g}{g}\right\}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

und dem Modul nach

$$\begin{aligned}
\frac{c_{f+1}}{f+1}+\frac{c_{f+2}}{f+2}+\cdots &< \frac{\varphi k}{1+f} < \frac{q\varphi k}{G},\\
\frac{c_1}{1}+\frac{c_2}{2}+\cdots+\frac{c_g}{g} &< \varphi k,\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

so kann, wenn zur Abkürzung

$$\sum_1^\infty\frac{c_n}{n}=L$$

gesetzt wird, das Gesammtglied mit lq auf die Form

$$\frac{Lc_q lq}{q}+\Re$$

gebracht werden, wo

$$\begin{aligned}
\operatorname{mod}\Re &< \varphi k\left\{\frac{1}{G}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\cdots\right\}lq\\
&< \varphi k\left\{\frac{1}{G}+\frac{1}{q(q-1)}\right\}lq.
\end{aligned}$$

Hiernach wird

$$(27.)\qquad \sum_1^G \frac{c_n ln}{n} = L\sum_2^G \frac{c_q lq}{q} + \mathfrak{R}',$$

$$\operatorname{mod}\mathfrak{R}' < \varphi k\left\{\frac{1}{G}\Sigma lq + \Sigma\frac{lq}{q(q-1)}\right\}$$

$$< \varphi k\left\{2 + \sum_2^x \frac{lq}{q(q-1)}\right\}.$$

Da die Reihe (26.) convergent und L nach *Dirichlet* von Null verschieden ist, so schliesst man aus (27.) dass der Modul der Summe $\sum_2^G \frac{c_q lq}{q}$ nie eine gewisse angebbare Constante C überschreiten kann, wie gross auch G sei.

9.

Bezeichnet man die Summe $\sum_2^x \frac{c_q lq}{q}$ mit ψx, so ist

$$\frac{\psi n - \psi(n-1)}{ln} = \frac{c_q}{q} \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem n eine Primzahl (ausser den in k aufgehenden) ist oder nicht ist. Es ist daher

$$\sum_{1+G}^{G'} \frac{c_q}{q} = \sum_{1+G}^{G'} \frac{\psi n - \psi(n-1)}{ln}$$

$$= -\frac{\psi G}{l(G+1)} + \frac{\psi G'}{l(1+G')} + \sum_{G+1}^{G'} \psi n\left\{\frac{1}{ln} - \frac{1}{l(n+1)}\right\}$$

und dem Modul nach

$$< C\left(\frac{1}{l(G+1)} + \frac{1}{l(G'+1)} + \sum_{G+1}^{G'}\left\{\frac{1}{ln} - \frac{1}{l(n+1)}\right\}\right)$$

$$< \frac{2C}{l(G+1)},$$

wie weit auch G' über G hinaus angenommen werde. Die Reihe $\sum_2^\infty \frac{c_q}{q}$ ist demnach convergent, wenn nicht alle Wurzeln ε, η, ω, $\omega' \ldots = 1$ sind, und zugleich sieht man aus den Gleichungen

$$\sum_2^\infty \frac{c_q}{q} = \sum_2^G \frac{c_q}{q} + \frac{\lambda 2C}{l(G+1)},$$

$$\sum_2^\infty \frac{c_q}{q^{1+\varrho}} = \sum_2^G \frac{c_q}{q^{1+\varrho}} + \frac{\lambda' 2C}{l(G+1)},$$

dass $\sum_2^\infty \frac{c_q}{q^{1+\varrho}}$ mit unbegrenzt abnehmendem ϱ der Grenze $\sum_2^\infty \frac{c_q}{q}$ zustrebt.

Da nun

$$\prod_{2}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{c_q}{q^{1+\varrho}}}=\sum_{1}^{\infty}\frac{c_n}{n^{1+\varrho}},$$

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{c_q}{q^{1+\varrho}}+\tfrac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}\frac{c_{q^2}}{q^{2+2\varrho}}+\cdots=\log\sum_{1}^{\infty}\frac{c_n}{n^{1+\varrho}},$$

so findet man für ein unendlich kleines ϱ die Grenzgleichungen

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{c_q}{q}+\tfrac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}\frac{c_{q^2}}{q^2}+\cdots=\log L,$$

$$\prod_{2}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{c_q}{q}}=L=\sum_{1}^{\infty}\frac{c_n}{n}.$$

Es werde der Werth der Reihe $\sum_{2}^{\infty}\frac{c_q}{q}$ mit $A(\varepsilon,\eta,\omega,\ldots)$ und die Summe der reciproken in k aufgehenden Primzahlen mit σ bezeichnet. Es ist dann für $\varepsilon=\eta=\omega=\cdots=1$ nach (13.), vorausgesetzt dass G die grösste in k enthaltene Primzahl übersteigt,

$$(28.)\qquad \sum_{2}^{G}\frac{c_q}{q}=llG+\mathfrak{E}-H-\sigma+\delta$$

und in allen anderen Fällen

$$(29.)\qquad \sum_{2}^{G}\frac{c_q}{q}=A(\varepsilon,\eta,\omega,\ldots)+\frac{\lambda 2C}{l(G+1)}.$$

Ist nun a eine gegebene zu k theilerfremde Zahl und $a'\equiv\frac{1}{a}\pmod k$, so multiplicire man die Gleichung (29.) mit $\frac{c_{a'}}{\varphi k}$, summire hierauf in Bezug auf alle Wurzelverbindungen ε, η, ω, ... mit alleiniger Ausnahme der Verbindung $\varepsilon=\eta=\omega=\cdots=1$ und füge noch die mit $\frac{1}{\varphi k}$ multiplicirte Gleichung (28.) hinzu. Aus der Gesammtsumme der linken Seite fallen dann alle Glieder heraus mit Ausnahme derjenigen reciproken Primzahlen q, welche der Bedingung

$$a'q\equiv 1 \quad \text{d. h.} \quad q\equiv\frac{1}{a'}\equiv a\pmod k$$

genügen. Es ist demnach

$$\sum_{2}^{G}\frac{1}{q}=\frac{llG}{\varphi k}+\frac{1}{\varphi k}\{\mathfrak{E}-H-\sigma+\Sigma c_{a'}A(\varepsilon,\eta,\omega,\ldots)\}+\delta';$$

die Summe bezieht sich auf alle in dem Intervall $2\ldots G$ vorkommenden Primzahlen von der Form $a+mk$.

Krakau, 20. Juli 1873.

Ueber die allgemeine Möglichkeit der conformen Abbildung einer von Geraden begrenzten ebenen Figur in eine Halbebene.

(Von Herrn *Schläfli* in Bern.)

Vorliegende Untersuchung knüpft sich an den Integralausdruck für eine Function u, welche die Halbebene der Unabhängigen t in eine ebene von Geraden begrenzte Fläche conform abbildet, an, an denjenigen Integralausdruck, den Herr *Christoffel* auf S. 97 seiner Abhandlung sul problema delle temperature stazionarie im ersten Bande der Annali di Matematica, seconda serie, gegeben hat. Was die Herleitung dieses Ausdrucks für u betrifft, so lege ich gegenwärtiger Betrachtung diejenige zu Grunde, die sich in zweien Abhandlungen des Herrn *Schwarz* findet: 1°. über einige Abbildungsaufgaben in diesem Journal Bd. 70, S. 110, 2°. über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ im Monatsberichte der Berliner Akademie vom October 1870. Hier wird gezeigt, dass vermöge Elimination der zwei arbiträren Integrationsconstanten a, b in $au+b$ die in der Ueberschrift genannte Abbildungsaufgabe auf die Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1.)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\log\frac{\partial u}{\partial t}=E(t)$$

zurück kommt, wo E eine rationale Function bedeutet, die durch Addition ihrer Unstetigkeitsausdrücke zu berechnen ist.

Ausser diesen gedruckten Arbeiten haben mich mündlicher und brieflicher Verkehr mit den Herren *Schwarz* und *Casorati* zur Verfolgung des vorliegenden Gegenstandes bestimmt und durch Räthe darin unterstützt. Das Ziel war, zu beweisen, dass die Constanten immer so bestimmt werden können, dass ein willkürlich gegebenes geradliniges Vieleck u in die Halbebene t conform abgebildet wird, auch wenn dasselbe in seinem Innern Verzweigungspunkte oder Horizonte enthält. So viel ich sehen konnte, ist die Frage nach der Möglichkeit dieser Bestimmung der Constanten weder in der erwähnten Abhandlung des Herrn *Christoffel*, noch in seinen spätern Arbeiten über denselben Gegenstand, die er in die Göttinger Nachrichten einrückte, erhoben und be-

antwortet worden. In den umfassenden Arbeiten des Herrn *Schwarz* ist dieser Beweis als sehr specieller Fall schon eingeschlossen. Gleichwohl glaube ich, dass eine directe Behandlung des Vielecks einiges Interesse darbiete.

§. 1. Construction der Function $E(t)$.

Die erste Bedingung für die Function $E(t)$ ist die, reell zu bleiben, während t reelle Werthe durchläuft, damit die Seiten des Vielecks gerade werden.

Hat eine Ecke $u = A$ mit dem innern Winkel $\alpha\pi$, wo $0 < \alpha < 2$, die reelle Zahl $t = a$ zum Bilde, so entspricht eine Entwicklung von der Form

$$u = A + B(t-a)^{\alpha}[1 + b(t-a) + c(t-a)^2 + \cdots],$$

wo die Coefficienten b, c, ... sämmtlich reell sind, und es folgt $E(t) = \frac{\alpha-1}{t-a} +$ Terme in 1, $t-a$, $(t-a)^2$, ... mit reellen Coefficienten.

Hat ein Verzweigungspunkt $u = A$ die nördlich-imaginäre Zahl $t = a$ zum Bilde, so ist

$$u = A + B(t-a)^2 + C(t-a)^3 + \cdots,$$

und es folgt

$$E(t) = \frac{1}{t-a} + \text{etc.};$$

damit aber die erste Bedingung erfüllt sei, muss, wenn a' mit a conjugirt ist, die Function $E(t)$ noch den Unstetigkeitsausdruck $\frac{1}{t-a'}$ bekommen.

Enthält das Vieleck u in seinem Innern einen oder mehrere Horizonte, d. h., ereignet es sich ein oder einige Male, dass $u = \infty$ eine nördlich-imaginäre Zahl $t = a$ zum Bilde hat, so ist

$$u = \frac{A}{t-a} + B + C(t-a) + \cdots,$$

folglich

$$E(t) = -\frac{2}{t-a} - \frac{2C}{A}(t-a) + \cdots;$$

die Entwickelung darf also keinen Term nullter Ordnung enthalten. Es ist aber nicht rathsam, eine solche Bedingung einzuführen, wegen ihres hohen algebraischen Grades; sondern man thut besser, sie mit den übrigen transcendenten Bedingungen auf eine Linie zu stellen, und daher vorläufig die Entwickelungsform

$$u = \frac{A}{t-a} + B\log(t-a) + C + \cdots$$

anzunehmen. Zu diesem kommt dann der, unter Voraussetzung eines reellen

t, mit ihm conjugirte Unstetigkeitsausdruck

$$\frac{A'}{t-a'}+B'\log(t-a')$$

hinzu. Ein solches Horizontbild $t=a$ tritt vorläufig als logarithmischer Pol der Function u auf und verlangt einen von a aus nach einem Punkte der Realitätsgeraden t geführten Schnitt, dem im Originale u eine Kluft (mit Verschiebungswerth $-2i\pi B$ ihrer parallelen Ränder), die vom betreffenden Horizonte bis in die geradlinige Begrenzung reicht, entsprechen wird.

Gehört das Original A des Horizonts $t=\infty$ dem Innern einer Seite des Vielecks u an, so ist hier

$$u = A+B\Big(\frac{1}{t}+\frac{a}{t^2}+\frac{b}{t^3}+\cdots\Big),$$

wo die Coefficienten a, b, ... alle reell sind, und es folgt $E(t)=-\frac{2}{t}+$Terme in $\frac{1}{t^2}$, $\frac{1}{t^3}$, $\cdots$ mit reellen Coefficienten. Hat aber eine Ecke $u=A$ den Horizont $t=\infty$ zum Bilde, so ist

$$u=A+Bt^{-\alpha}\Big(1+\frac{a}{t}+\frac{b}{t^2}+\cdots\Big),\quad E(t)=-\frac{\alpha+1}{t}+\cdots.$$

Man hat also

$$E(t) = \Sigma\frac{\alpha-1}{t-a},$$

wenn diese Summe sich auf die Bilder aller Ecken mit dem inneren Winkel $\alpha\pi$, auf das Bild jedes Verzweigungspunktes mit $\alpha=2$ sammt conjugirtem Term, und auf das Bild jedes Horizonts u mit $\alpha=-1$ sammt conjugirtem Term erstreckt. Berücksichtigt man die Entwickelung der Function $E(t)$ nach fallenden Potenzen von t, so ergiebt sich

$$\Sigma(\alpha-1) = -2.$$

Hat das Original w Verzweigungspunkte und h Horizonte, und legt man die Zahlen α nur seinen Ecken mit den innern Winkeln $\alpha\pi$ bei, so kann man diese Gleichheit auch in der Gestalt

$$\Sigma(1-\alpha) = 2+2w-4h$$

hinschreiben, in welcher sie geometrisch leicht zu verificiren ist.

Ist der Horizont $t=\infty$ Bild einer Ecke des Vielecks u, so fällt der entsprechende Term $\frac{\alpha-1}{t-a}$ aus $E(t)$ weg, weil a unendlich wird. Weil

$-2-(\alpha-1)=-(\alpha+1)$, so stimmt der oben gefundene Beginn der Entwickelung $E(t)=-\frac{\alpha+1}{t}+\cdots$ hiemit überein.

Fortan sei n gleich der Menge der Ecken der Fläche u plus der doppelten Menge ihrer Verzweigungspunkte plus der doppelten Menge ihrer Horizonte. Die n entsprechenden Punkte des t-Feldes seien allesammt mit a und der zu jedem gehörende Exponent mit α bezeichnet. Bei einer Ecke ist dann $\alpha\pi$ der entsprechende innere Winkel; beim Bilde a eines Verzweigungspunktes und beim conjugirten Punkte a' ist $\alpha=2$; beim Bilde a eines Horizonts ist $\alpha=-1$, ebenso beim conjugirten Punkte a'.

§. 2. Integration der Gleichung (1.).

Die erste Integration der Gleichung (1.) giebt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M.\Pi(t-a)^{\alpha-1},$$

wo M die Integrationsconstante bedeutet, und wo das Product sich auf alle n Pole des t-Feldes erstreckt.

Diese Pole sind aber noch nicht bekannt. Man lasse diejenigen, welche Bilder von Ecken werden sollen, in der Ordnung eines positiven Umlaufs um die Vielecksfläche u längs der Realitätslinie t von West nach Ost auf einander folgen und nehme sie übrigens beliebig an. Ebenso nehme man die Bilder der Horizonte und Verzweigungspunkte der Vielecksfläche beliebig in der Nordhälfte des t-Feldes an und setze in der Südhälfte die ihnen conjugirten Pole.

Bedeutet $t=b$ das noch zufällige Bild eines Horizontes $u=\infty$, b' den conjugirten Werth, während die Bezeichnung a (Exponent α) allen übrigen Polen ohne Unterschied zukommt, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(t-b)^{-2}(t-b')^{-2}\Pi(t-a)^{\alpha-1}.$$

Setzt man

$$A=-\frac{M}{(b-b')^2}\Pi(b-a)^{\alpha-1},\quad B=\frac{M}{(b-b')^2}\Pi(b-a)^{\alpha-1}.\left(\Sigma\frac{\alpha-1}{b-a}-\frac{2}{b-b'}\right),$$

so hat man für u den Unstetigkeitsausdruck

$$u=\frac{A}{t-b}+B\log(t-b)+\cdots.$$

Unterbricht nun die Variable t ihren Lauf von West nach Ost längs der Realitätslinie, um von einem Punkte c derselben aus gegen b hinzugehen, diesen Pol

in einer kleinen Curve rückläufig zu umkreisen und auf demselben Wege nach c zurückzukehren, so ist u in jedem Punkte des Rückwegs um $-2i\pi B$ grösser als im selben Punkte des Hinwegs, und jener kleinen Curve entspricht eine dem Horizonte u nahe, rechtläufige Umkreisung des Nullpunktes u. Vom betrachteten Horizonte aus zieht sich also eine Kluft mit parallelen Rändern durch die Vielecksfläche hindurch bis an eine Seite desselben, die in zwei parallele Stücke zerrissen auftritt; obiger Ausdruck ist der Verschiebungswerth vom ersten bis zum zweiten Rande. So wie nun b, b' als zwei von einander unabhängige Argumente der Function u gelten, muss auch die Verschiebung sammt dem ihr conjugirten Werthe für zwei Functionen aller $n+1$ verfügbaren Argumente zählen. Man kann also auch die zwei reellwerthigen Projectionen der Verschiebung als die zwei Functionen, um die es sich handelt, ansehen.

Ebenso zählt jeder Verzweigungspunkt der Fläche u vermöge der zwei Abmessungen, die seinen Ort in Bezug auf die Begrenzung bestimmen, für zwei Functionen.

Da endlich zwei Seitenlängen durch die übrigen trigonometrisch bestimmt sind, so ergiebt sich $n-2$ als Anzahl der in Betracht kommenden Functionen der $n+1$ Argumente. Drei von diesen dürfen also willkürlich angenommen werden.

Man nehme ∞, 0, 1 als Bilder dreier in positiver Ordnung unmittelbar auf einander folgender Ecken des Vielecks und lasse Pole und Exponenten einander wie folgt entsprechen

$$\begin{array}{llllllllllll} \text{Exponenten:} & \varkappa, & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \cdots, & \eta, & \theta, & \iota, \\ \text{Pole:} & \infty, & 0, & 1, & \frac{1}{s}, & \frac{1}{t}, & \frac{1}{u}, & \frac{1}{v}, & \cdots, & \frac{1}{x}, & \frac{1}{y}, & \frac{1}{z}. \end{array}$$

Die früheren Zeichen t, u seien durch ω, V ersetzt. Die Eckenbilder, die unter den Polen vorkommen, seien nach wachsender Grösse geordnet. Betrachtet man die innere Fläche eines gewöhnlichen Vielecks, sind also alle Pole Eckenbilder, so ist

$$1 > s > t > u > \cdots > y > z > 0.$$

Man setze

$$\Omega = \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}(1-t\omega)^{\delta-1}\ldots(1-z\omega)^{\iota-1}.$$

Dann ist $V = M\int\Omega d\omega$ die Function, welche die Halbebene ω in das Innere des Vielecks V verwandelt. Die Anzahl der Argumente M, s, t, ..., z ist

jetzt auf $n-2$ herunter gebracht, und jene oben erwähnten $n-2$ Functionen sind durch diese Argumente eindeutig bestimmt.

Man kann nun willkürlich eine Reihe von zerklüfteten Vielecken V, V', V'', ... bilden, deren jedes vom vorhergehenden sehr wenig abweicht, und deren letztes das gegebene geschlossene Vieleck ist. Dadurch sind Gruppen von gleichzeitigen Variationen der $n-2$ Functionen gesetzt, und jeder einzelnen Gruppe steht ein System von $n-2$ linearen Differentialgleichungen zur Seite, in deren jeder das Differential einer Function linear und homogen durch die Differentiale der $n-2$ Argumente ausgedrückt ist. Die Differentiale der Functionen sind gegeben, und die der Argumente sind gesucht; und die Auflösung des Systems ist möglich, so lange als der Determinant der $(n-2)^2$ Coefficienten weder verschwindet noch unendlich wird. Also müssen zunächst die Eigenschaften der Functionen und dann der Werth des Determinants ihrer Abgeleiteten untersucht werden.

§. 3. Vorläufige Untersuchung einer einzigen Function.

Man denke sich $s, t, \ldots, z$ alle reell und den Ungleichheiten

$$1 > s > t > \cdots > z > 0$$

genügend und betrachte die Seitenlänge $(\alpha\beta)$. Da es für den nächsten Zweck auf den Multiplicator M nicht ankommt, so setze man

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \iota) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \Omega \, d\omega.$$

Man kann Ω nach steigenden Combinationen von $s, t, \ldots, z$ entwickeln; der allgemeine Term sei $s^\lambda t^\mu \ldots z^\varrho$, $\lambda+\mu+\cdots+\varrho = \sigma$; dann ist

$$f(\alpha, \beta, \ldots, \iota) = \Sigma \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\sigma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+\sigma)} \Pi \frac{\Gamma(\lambda+1-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\lambda+1)} \cdot s^\lambda t^\mu \ldots z^\varrho,$$

wo das Productzeichen Π sich über $\binom{\gamma, \delta, \ldots, \iota}{\lambda, \mu, \ldots, \varrho}$ und die Summation sich über alle nullen und positiven Werthe von $\lambda, \mu, \ldots, \varrho$ erstrecken. Um durch Differentiation der $(n-3)$fachen Summe nach $s, t, \ldots, z$ eine ähnliche Function zu bekommen mit Exponenten, die von $\alpha, \beta, \ldots$ nur um 1 verschieden sind, muss man das Argument je einer Gammafunction im Zähler oder im Nenner um 1 zu vermehren oder zu vermindern trachten. Setzt man der Kürze wegen

$$D = s\frac{\partial}{\partial s} + t\frac{\partial}{\partial t} + \cdots + z\frac{\partial}{\partial z},$$

so muss man, um $\Gamma(\alpha+\sigma)$ in $\Gamma(\alpha+\sigma+1)$ überzuführen, mit $D+\alpha$ operiren

und bekommt

$$(2.)\quad (D+\alpha)f(\alpha,\beta,\ldots,\iota) = \alpha f(\alpha+1,\beta-1,\gamma,\ldots,\iota).$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich

$$(3.)\quad \Big(s\frac{\partial}{\partial s}+1-\gamma\Big)f(\alpha,\beta,\ldots,\iota) = (1-\gamma)f(\alpha,\beta,\gamma-1,\delta,\ldots,\iota);$$

$$(4.)\quad (D+\alpha+\beta-1)f(\alpha,\beta,\ldots,\iota) = (\alpha+\beta-1)f(\alpha,\beta-1,\gamma,\ldots,\iota);$$

$$(5.)\quad \frac{\partial}{\partial s}f(\alpha,\beta,\ldots,\iota) = \frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha+\beta}f(\alpha+1,\beta,\gamma-1,\delta,\ldots,\iota);$$

jede der Gleichheiten (3.), (5.) ist Repräsentant einer Gruppe von $n-3$ ähnlichen Gleichheiten. Combinirt man (2.) und (3.), so kommt

$$(D+\alpha)\Big(s\frac{\partial}{\partial s}+1-\gamma\Big)f(\alpha,\beta,\ldots,\iota) = \alpha(1-\gamma)f(\alpha+1,\beta-1,\gamma-1,\delta,\ldots,\iota),$$

während die Combination von (4.) und (5.)

$$\frac{\partial}{\partial s}(D+\alpha+\beta-1)f(\alpha,\beta,\ldots,\iota) = \alpha(1-\gamma)f(\alpha+1,\beta-1,\gamma-1,\delta,\ldots,\iota)$$

giebt. Folglich ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(s,s)f = \Big[(D+\alpha)\Big(s\frac{\partial}{\partial s}+1-\gamma\Big)-\frac{\partial}{\partial s}(D+\alpha+\beta-1)\Big]f = 0$$

gefunden, der die Function $f(\alpha,\beta,\ldots,\iota)$ genügt, in entwickelter Gestalt:

$$(a.)\quad \begin{cases} (s-1)\Big(s\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}+t\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}+\cdots+z\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial z}\Big)+[(\alpha-\gamma+2)s-(\alpha+\beta)]\dfrac{\partial f}{\partial s} \\ \qquad +(1-\gamma)\Big(t\dfrac{\partial f}{\partial t}+u\dfrac{\partial f}{\partial u}+\cdots+z\dfrac{\partial f}{\partial z}+\alpha f\Big) = 0, \end{cases}$$

Repräsentant einer Gruppe von $n-3$ Differentialgleichungen. Combinirt man die unveränderte Gleichung (3.) mit der aus (5.) hervorgehenden Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\alpha,\beta,\gamma-1,\delta,\ldots,\iota) = \frac{\alpha(1-\delta)}{\alpha+\beta}f(\alpha+1,\beta,\gamma-1,\delta-1,\varepsilon,\ldots,\iota),$$

so bekommt man

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(s\frac{\partial}{\partial s}+1-\gamma\Big)f(\alpha,\beta,\ldots,\iota) = \frac{\alpha(1-\gamma)(1-\delta)}{\alpha+\beta}f(\alpha+1,\beta,\gamma-1,\delta-1,\varepsilon,\ldots,\iota),$$

und, da die rechte Seite durch Vertauschung von s mit t sich nicht ändert,

$$(s,t)f = \Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(s\frac{\partial}{\partial s}+1-\gamma\Big)-\frac{\partial}{\partial s}\Big(t\frac{\partial}{\partial t}+1-\delta\Big)\Big]f = 0,$$

in entwickelter Gestalt

$$(b.)\quad (s-t)\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}-(1-\delta)\frac{\partial f}{\partial s}+(1-\gamma)\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

Repräsentant einer Gruppe von $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ Differentialgleichungen. Das System aller $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung heisse das System (A.). Weil f nur von den $n-3$ Argumenten $s, t, \ldots, z$ abhängt, so können nur so viele Differentialgleichungen von einander unabhängig sein.

§. 4. Untersuchung der gegenseitigen Abhängigkeit der Gleichungen des Systems (A.)

Die Operationen, die in den linken Seiten der Gleichungen (a.), (b.) auf die Function f ausgeübt worden sind, sind schon vorhin der Kürze wegen resp. mit (s, s), (s, t) bezeichnet worden. Ohne dass man ihre Polynome vollständig entwickelt, sondern nur durch passende Versetzung von Factoren findet man leicht folgende Relation:

$$\text{(I.)} \quad \frac{\partial}{\partial t}(s, s) - \frac{\partial}{\partial s}(t, t) = (D+\alpha+1)(s, t),$$

$$\text{(II.)} \quad \left(t\frac{\partial}{\partial t}+1-\delta\right)(s, s) - \left(s\frac{\partial}{\partial s}+1-\gamma\right)(t, t) = (D+\alpha+\beta)(s, t),$$

$$\text{(III.)} \quad \frac{\partial}{\partial s}(t, u) + \frac{\partial}{\partial t}(u, s) + \frac{\partial}{\partial u}(s, t) = 0,$$

$$\text{(IV.)} \quad \left(s\frac{\partial}{\partial s}+1-\gamma\right)(t, u) + \left(t\frac{\partial}{\partial t}+1-\delta\right)(u, s) + \left(u\frac{\partial}{\partial u}+1-\varepsilon\right)(s, t) = 0.$$

Berücksichtigt man, dass keine der Zahlen $1-\beta$, $1-\gamma$, $1-\delta$ verschwinden kann, so folgt aus den Combinationen (I.)$-$(II.), s.(I.)$-$(II.), (II.)$-t$.(I.), dass je zwei der Gleichungen $(s, s)f = 0$, $(t, t)f = 0$, $(s, t)f = 0$ die dritte zur nothwendigen Folge haben. Aus (IV.)$-s$.(III.) wird geschlossen, dass die Gleichung $(t, u)f = 0$ eine nothwendige Folge der zwei Gleichungen $(s, t)f = 0$, $(s, u)f = 0$ sei.

Verlangt man eine Auswahl von $n-3$ unter sich unabhängigen Gleichungen, die alle übrigen des Systemes (A.) zur nothwendigen Folge haben, so ist daher z. B. das System

$$(s, s)f = 0, \quad (t, t)f = 0, \quad \ldots, \quad (z, z)f = 0$$

eine solche, ebenso das System

$$(s, s)f = 0 \quad (s, t)f = 0, \quad (s, u)f = 0, \quad \ldots, \quad (s, z)f = 0.$$

§. 5. Anzahl der arbiträren Integrationsconstanten.

Das System (A.) macht es möglich, jede Abgeleitete zweiter Ordnung der Function f linear und homogen durch die Function selbst und ihre Ab-

geleiteten erster Ordnung auszudrücken; denn es giebt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \left(\frac{\varkappa+\gamma-2}{s} + \frac{\beta+\gamma-2}{s-1} + \frac{\delta-1}{s-t} + \frac{\varepsilon-1}{s-u} + \cdots + \frac{\iota-1}{s-z}\right)\frac{\partial f}{\partial s}$$
$$+ \frac{1-\gamma}{s(s-1)}\left(\frac{t(t-1)}{s-t}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{u(u-1)}{s-u}\frac{\partial f}{\partial u} + \cdots + \frac{z(z-1)}{s-z}\frac{\partial f}{\partial z} - \alpha f\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = \frac{1-\delta}{s-t}\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{1-\gamma}{s-t}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Daher können überhaupt alle Abgeleiteten linear und homogen durch $\frac{\partial f}{\partial s}$, $\frac{\partial f}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z}$, f dargestellt werden. Für irgend eine Gruppe von Anfangswerthen $s_0, t_0, \ldots, z_0$ der Argumente, die den Bedingungen

$$1 > s_0 > t_0 > \cdots > z_0 > 0$$

genügt, erlaubt also das System (A.), der Function f und ihren ersten Abgeleiteten willkürliche Werthe beizulegen, die als $n-2$ arbiträre Integrationsconstanten zu fassen sind; und dann ist in einem beschränkten Bereiche um die Gruppe jener Anfangswerthe herum die allgemeine Integralfunction nach $s-s_0, t-t_0, \ldots, z-z_0$ entwickelbar und erscheint zugleich homogen und linear in Bezug auf die $n-2$ arbiträren Constanten. Die Entwicklungen der $n-2$ Functionen, die in diese Constanten multiplicirt sind, beginnen resp. mit den Termen $1, s-s_0, t-t_0, \ldots, z-z_0$ und können daher keiner homogenen linearen Relation mit constanten Coefficienten genügen, sondern bilden ein vollständiges System von $n-2$ von einander linear-unabhängigen particulären Integralen des Systems (A.). Es ist hiemit zugleich bewiesen, dass $n-2$ die Anzahl der unter sich linear-unabhängigen particulären Integrale ist, obgleich man im allgemeinen aus der Ordnung und Menge der Differentialgleichungen auf eine grössere Anzahl particulärer Integrale schliessen würde.

Hat man $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial s^3}, \ldots, \frac{\partial^{n-2} f}{\partial s^{n-2}}$ linear und homogen durch $f, \frac{\partial f}{\partial s}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z}$ dargestellt und eliminirt aus den $n-3$ Gleichungen die $n-4$ Variabeln $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z}$, so hat man eine lineare und homogene Differentialgleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung für die Function f in Bezug auf das einzige Argument s, dieselbe, welche Hr. *L. Pochhammer* in seiner Abhandlung „hypergeometrische Functionen n^{ter} Ordnung“, dieses Journal Bd. 71, betrachtet hat.

§. 6. Determinant der linearen Differentialgleichungen.

Bezeichnet man die $n-2$ particulären Integrale des Systems (A.) mit $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}$ und denkt sich, es hafte an jedem derselbe, von $s, t, \ldots, z$ unabhängige, Multiplicator M, so hat man, wenn f ohne Zeiger irgend eines derselben bedeutet, $n-2$ lineare Differentialgleichungen von der Form

$$df = f d\log M + \frac{\partial f}{\partial s} ds + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Soll es möglich sein, dieses System nach $d\log M, ds, \ldots, dz$ aufzulösen, so darf, vorausgesetzt, dass die $n-2$ Functionen im betrachteten Bereiche differentiabel sind, der Determinant

$$\Delta = \left| f \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \cdots \frac{\partial f}{\partial z} \right|,$$

den ich, wenn es nöthig wird, auch mit $\Delta(f_1, f_2, \ldots f_{n-2})$ bezeichnen werde, nicht verschwinden. Mittelst obiger linearer Ausdrücke für die zweiten Abgeleiteten von f findet man nun

$$\frac{\partial \log \Delta}{\partial s} = \frac{\gamma+\varkappa-2}{s} + \frac{\gamma+\beta-2}{s-1} + \frac{\gamma+\delta-2}{s-t} + \frac{\gamma+\varepsilon-2}{s-u} + \cdots + \frac{\gamma+\iota-2}{s-z},$$

etc., und durch Integration, wenn

$$K = s^{\gamma+\varkappa-2} t^{\delta+\varkappa-2} \ldots z^{\iota+\varkappa-2} \times (1-s)^{\beta+\gamma-2} (1-t)^{\beta+\delta-2} \ldots (1-z)^{\beta+\iota-2}$$
$$\times (s-t)^{\gamma+\delta-2} (s-u)^{\gamma+\varepsilon-2} \ldots (s-z)^{\gamma+\iota-2} \times \cdots \times \cdots \times (y-z)^{\theta+\iota-2}$$

gesetzt wird

$$\Delta = C.K,$$

wo C die Integrationsconstante bedeutet, die, wenn es nöthig wird, auch durch die Bezeichnung $C(f_1, f_2, \ldots f_{n-2})$ näher bestimmt werden möge. Wenn also nicht $C=0$, d. h. wenn Δ nicht identisch verschwindet, so kann unter den gemachten Voraussetzungen $1 > s > t > \cdots > z > 0$ der Determinant Δ nie verschwinden. Wenn aber $C=0$, so sind die $n-2$ Functionen $f_1, f_2, \ldots f_{n-2}$ mit einander durch eine nichtlineare homogene Relation verbunden, die in Bezug auf $s, t, \ldots, z$ identisch richtig ist.

§. 7. Die $n-2$ Bestimmungsstücke des zerklüfteten Vieleckes V bilden ein vollständiges System particulärer Integrale des Systems (A.)

Es fragt sich nun, ob alle genannten Bestimmungsstücke dem Systeme der Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen; und, wenn so, ob sie ein vollständiges System particulärer Integrale ausmachen. Für diese Unter-

suchung kann man den Multiplicator M weglassen, und dann fallen alle Bestimmungsstücke unter die Form $\int \Omega d\omega$.

Zunächst sollen $(s, s)\int \Omega d\omega$, $(s, t)\int \Omega d\omega$ unter der Voraussetzung, dass die Grenzen des Integrals von s, t, ..., z unabhängig seien, berechnet werden. Man hat

$$\left(s\frac{\partial}{\partial s}+1-\gamma\right)\Omega = \frac{1-\gamma}{1-s\omega}\Omega,$$

$$(D+\alpha)\frac{\Omega}{1-s\omega} = \left(\frac{\alpha}{\omega}+\frac{(2-\gamma)s}{1-s\omega}+\frac{(1-\delta)t}{1-t\omega}+\frac{(1-\varepsilon)u}{1-u\omega}+\cdots+\frac{(1-\iota)z}{1-z\omega}\right)\frac{\omega\Omega}{1-s\omega}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\omega}\frac{\omega\Omega}{1-s\omega}-(1-\beta)\frac{\omega\Omega}{(1-\omega)(1-s\omega)};$$

folglich

$$(6.)\quad (D+\alpha)\left(s\frac{\partial}{\partial s}+1-\gamma\right)\Omega = (1-\gamma)\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{\omega\Omega}{1-s\omega}-(1-\beta)(1-\gamma)\frac{\omega\Omega}{(1-\omega)(1-s\omega)}.$$

Ferner ist

$$(D+\alpha+\beta-1)\Omega = \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\Omega)-(1-\beta)\frac{\Omega}{1-\omega},$$

und weil

$$\frac{\partial}{\partial s}(\omega\Omega) = (1-\gamma)\frac{\omega^2\Omega}{1-s\omega}, \quad \frac{\partial}{\partial s}\frac{\Omega}{1-\omega} = (1-\gamma)\frac{\omega\Omega}{(1-\omega)(1-s\omega)}$$

ist, so hat man

$$(7.)\quad \frac{\partial}{\partial s}(D+\alpha+\beta-1)\Omega = (1-\gamma)\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{\omega^2\Omega}{1-s\omega}-(1-\beta)(1-\gamma)\frac{\omega\Omega}{(1-\omega)(1-s\omega)}.$$

Durch Subtraction ergiebt sich aus (6.) und (7.) die Gleichheit

$$(s, s)\Omega = (1-\gamma)\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{\omega(1-\omega)\Omega}{1-s\omega}.$$

Noch schneller findet man

$$(s, t)\Omega = 0.$$

Weil $\omega = \infty$, 0, 1 Bilder dreier auf einander folgender Ecken des Vieleckes V waren, und dieses lauter positive Winkel hat, so sind $\varkappa$, α, β positiv; daher verschwindet $\frac{\omega(1-\omega)\Omega}{1-s\omega}$ in jedem der genannten Punkte (in $\omega = \infty$, weil $1+(\alpha-1)+(\beta-1)+\cdots+(\iota-1) = -\varkappa$ ist). Wenn also das Integral $\int \Omega d\omega$ keine anderen Grenzen hat, als eine oder zwei aus den dreien ∞, 0, 1, so genügt es dem Systeme (A.).

Sind z. B. $\varkappa$, α, β, γ, δ, ε auf einander folgende Ecken des Vielecks

V, und führt man ω von 0 aus rückwärts um 1, $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{u}$ herum und nach 0 zurück, so dass alle übrigen Pole ausgeschlossen bleiben, so genügt das Integral $\int \Omega\, d\omega$, weil es nur den Pol 0 zu Grenzen hat, dem Systeme (A.) und hat, wenn man die Seitenlängen des Vielecks mit $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, etc. bezeichnet, den Werth

$$\begin{aligned}
&(\alpha\beta)+e^{i\pi(1-\beta)}(\beta\gamma)+e^{i\pi(2-\beta-\gamma)}(\gamma\delta)+e^{i\pi(3-\beta-\gamma-\delta)}(\delta\varepsilon)\\
&\quad -e^{i\pi(5-\beta-\gamma-\delta-2\varepsilon)}(\delta\varepsilon)\quad -e^{i\pi(6-\beta-\gamma-2\delta-2\varepsilon)}(\gamma\delta)\\
&\quad -e^{i\pi(7-\beta-2\gamma-2\delta-2\varepsilon)}(\beta\gamma)-e^{i\pi(8-2\beta-2\gamma-2\delta-2\varepsilon)}(\alpha\beta)\\
=\ &-2ie^{i\pi(4-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon)}[(\alpha\beta)\sin\pi(4-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon)\\
&+(\beta\gamma)\sin\pi(3-\gamma-\delta-\varepsilon)+(\gamma\delta)\sin\pi(2-\delta-\varepsilon)+(\delta\varepsilon)\sin\pi(1-\varepsilon)],
\end{aligned}$$

wo der Coefficient der Seitenlänge $(\delta\varepsilon)$ nicht verschwindet, weil ε weder 0, noch 1, noch 2 sein kann. Wenn also die Seitenlängen $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, $(\gamma\delta)$ dem Systeme (A.) genügen, so zeigt dieses Integral, dass auch die Seitenlänge $(\delta\varepsilon)$ dem Systeme genügt. Ist (ς) die auf (ε) folgende Ecke des Vieleckes V, und nimmt man (α) als Anfangspunkt, die Seite $(\alpha\beta)$ als in der positiven Hälfte der Realitätslinie liegend an, so stellt das so eben betrachtete Integral das doppelte aus (α) auf die Seite $(\varepsilon\varsigma)$ gefällte Perpendikel nach Richtung und Grösse dar. Nimmt man die Seiten $(\varkappa\alpha)$, $(\alpha\beta)$ aus und fällt aus der Ecke (α) auf alle übrigen Seiten des Vieleckes Perpendikel, so zeigt das Beispiel, dass alle diese Perpendikel, folglich auch alle Seitenlängen dem Systeme (A.) genügen.

Damit, wenn die Vielecksfläche V Horizonte enthält, die polygonale Begrenzung derselben nur eine Unterbrechung erfahre, z. B. in der Ecke (α), führe man im ω-Felde alle von den Horizontbildern ausgehenden logarithmischen Schnitte nach demselben Punkte $\omega = 0$, so dass sie weder einander noch der Realitätslinie begegnen. Das rückläufig von 0 aus dicht um einen solchen logarithmischen Schnitt geführte Integral $\int \Omega d\omega$ giebt den Verschiebungswerth für die zwei Ränder der betreffenden Kluft und genügt dem Systeme (A.); dasselbe thut also auch jede der zwei Projectionen dieser Verschiebung.

Es bleibt noch die Untersuchung übrig, ob auch beide Coordinaten eines Verzweigungspunktes der Fläche V dem Systeme (A.) genügen. Es

sei $\frac{1}{y}$ Bild eines Verzweigungspunktes, $\frac{1}{z}$ dazu conjugirt; also $\theta = \iota = 2$,

$$\Omega = \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}\ldots(1-x\omega)^{\eta-1}(1-y\omega)(1-z\omega).$$

Dann ist

$$Y = \int_0^{\frac{1}{y}} \Omega\, d\omega$$

das zu betrachtende Integral. Man hat

$$\left(s\frac{\partial}{\partial s}+1-\gamma\right)Y = (1-\gamma)\int_0^{\frac{1}{y}} \frac{\Omega\, d\omega}{1-s\omega};$$

und, da $\frac{\Omega}{1-s\omega}$ für $\omega = \frac{1}{y}$ verschwindet, so kommt bei der Operation $D+\alpha$ die obere Grenze nicht in Betracht. Dasselbe gilt von $(D+\alpha+\beta-1)Y$. Da endlich auch $\frac{\omega(1-\omega)\Omega}{1-s\omega}$ sowohl in $\omega = 0$ als in $\omega = \frac{1}{y}$ verschwindet, so ist $(s, s)Y = 0$. Man kann ferner beweisen, dass $(s, t)Y = 0, \ldots, (s, y)Y = 0$, $(s, z)Y = 0$ ist, weil man nie in den Fall kommt, nach der oberen Grenze zu differentiiren. Daher genügen beide Integrale

$$\int_0^{\frac{1}{y}} \Omega\, d\omega, \quad \int_0^{\frac{1}{z}} \Omega\, d\omega$$

dem Systeme (**A**.).

Hiermit ist bewiesen, dass alle $n-2$ Bestimmungsstücke der Fläche V dem Systeme der Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen. Die zweite Frage, ob sie auch ein vollständiges System particulärer Integrale ausmachen, wird im folgenden Paragraphen dadurch beantwortet, dass gezeigt wird, dass sie nicht nur keiner linearen, sondern überhaupt keiner homogenen Relation genügen, mit anderen Worten, dass die auf sie bezügliche Constante C niemals verschwindet.

§. 8. Darstellung der Constanten C in Function der Exponenten $\alpha, \beta, \ldots, \iota$.

Um den Beweis der Möglichkeit, jede gegebene Vielecksfläche V in eine Halbebene ω conform abzubilden, zu vollenden, muss man noch zeigen, dass für keine Gruppe von Werthen der Exponenten $\alpha, \beta, \ldots, \iota$ jemals die $n-3$ Verhältnisse der Bestimmungsstücke der Fläche V einer in Bezug auf $s, t, \ldots, z$ identischen Relation genügen, so dass man diese $n-3$ Argumente variiren könnte, während jene Verhältnisse constant blieben. Man hat also

die in §. 6 noch unbestimmt gebliebene Integrationsconstante C in Function der Exponenten zu berechnen. Das soll zunächst unter der Voraussetzung geschehen, dass die Argumente $s, t, \ldots, z$ sämmtlich reell seien, und dass die $n-2$ auf einander folgenden Seitenlängen $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, $\ldots$, $(\theta\iota)$ als System der Functionen gebraucht werden. Ist die Beschaffenheit von C einmal erkannt, so ist die Behandlung des allgemeinen Falles, wo die Fläche V Horizonte und Verzweigungspunkte enthält, nicht mehr schwer.

Um Functionen zu haben, die nach Potenzen und Producten von $s, t, \ldots, z$ entwickelbar seien, ohne dass Logarithmen auftreten, setze man zuerst voraus, dass keine Seite mit $(\varkappa\alpha)$ parallel sei, und wähle die aus den Ecken (β), (γ), $\ldots$, (ι) auf die Seite $(\varkappa\alpha)$ gefällten Perpendikel als Functionen. Ist

$$-e^{i\pi\alpha}\Omega\, d\omega = (-\omega)^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}(1-t\omega)^{\delta-1}\ldots(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega = dV$$

der Integrand (der die Elemente der Seite $(\varkappa\alpha)$ positiv darstellt), so geben die Integrale, deren Wege rechtläufige, resp. von 1 aus um 0, von $\frac{1}{s}$ aus um 0, 1, von $\frac{1}{t}$ aus um 0, 1, $\frac{1}{s}$ und so fort, geführte Schlingen sind, die doppelten Perpendikel nach Grösse und Richtung in Bezug auf $(\varkappa\alpha)$ als Realitätslinie. Um z. B. das doppelte aus der Ecke (ε) gefällte Perpendikel zu berechnen, gestalte man den Integrationsweg zu einem Kreise um 0, der von $\frac{1}{u}$ ausgeht und dahin zurückkehrt, und setze $\omega = -\frac{\psi}{u}$; der Integrand wird dadurch zu

$$-s^{\gamma-1}t^{\delta-1}u^{3-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}\psi^{\alpha+\beta+\gamma+\delta-4}(1+\psi)^{\varepsilon-1}\Big(1+\frac{u}{\psi}\Big)^{\beta-1}\Big(1+\frac{u}{s\psi}\Big)^{\gamma-1}\Big(1+\frac{u}{t\psi}\Big)^{\delta-1}$$
$$\times\Big(1+\frac{v\psi}{u}\Big)^{\varsigma-1}\Big(1+\frac{w\psi}{u}\Big)^{\zeta-1}\cdots\Big(1+\frac{z\psi}{u}\Big)^{\iota-1}d\psi.$$

Bedeuten $\lambda, \mu, \nu; \xi, o, \ldots, \varrho$ nulle oder positive ganze Zahlen, die resp. den Exponenten $\beta, \gamma, \delta; \varsigma, \zeta, \ldots, \iota$ zugeordnet sind, und setzt man

$$\sigma = -(\lambda+\mu+\nu)+\xi+o+\cdots+\varrho,$$

so ist der allgemeine Term der Entwicklung

$$-\Pi\frac{\Gamma(\lambda+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\lambda+1)} \quad \text{über} \quad \binom{\beta\gamma\delta\varsigma\ldots\iota}{\lambda\mu\nu\xi\ldots\varrho} \times s^{\gamma-1-\mu}t^{\delta-1-\nu}u^{3-(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\sigma)}$$
$$\times v^{\xi}w^{o}\ldots z^{\varrho}.(-1)^{\sigma}\psi^{\alpha+\beta+\gamma+\delta-4+\sigma}(1+\psi)^{\varepsilon-1}d\psi.$$

Setzt man, um abzukürzen, $\alpha' = 1-\alpha$, $\beta' = 2-(\alpha+\beta)$, $\gamma' = 3-(\alpha+\beta+\gamma)$, $\ldots$,

$\iota' = 1+\varkappa$, so ist hier

$$\int (-1)^{\sigma}\psi^{\sigma-\delta'}(1+\psi)^{\varepsilon-1}d\psi \qquad \begin{matrix}\text{(Weg eine rechtläufige}\\ \text{Schlinge aus } -1 \text{ um } 0)\end{matrix}$$

$$= \frac{2i\pi(-1)^{\sigma}\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\delta'-\sigma)\Gamma(2-\varepsilon'+\sigma)} = \frac{2i\pi\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\delta')\Gamma(2-\varepsilon')}\cdot\frac{\Gamma(2-\varepsilon')\Gamma(1-\delta'+\sigma)}{\Gamma(1-\delta')\Gamma(2-\varepsilon'+\sigma)}$$

$$= \frac{2i\pi\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\delta')\Gamma(2-\varepsilon')}\cdot\frac{\Gamma(\delta')\Gamma(\varepsilon'-1-\sigma)}{\Gamma(\varepsilon'-1)\Gamma(\delta'-\sigma)};$$

(Den ersten Ausdruck mag man für ein positives, den zweiten für ein negatives σ gebrauchen). Multiplicirt man die $(n-3)$fache Summe mit einem solchen Factor, dass ihr Anfangsterm den Coefficient 1 bekommt, und bezeichnet sie dann mit f_u, so ist

$$f_u = \Sigma\frac{\Gamma(2-\varepsilon')\Gamma(1-\delta'+\sigma)}{\Gamma(1-\delta')\Gamma(2-\varepsilon'+\sigma)}\cdot\Pi\frac{\Gamma(\lambda+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\lambda+1)} \quad \text{über} \quad \begin{pmatrix}\beta\gamma\delta\varsigma\ldots\iota\\ \lambda\mu\nu\xi\ldots\varrho\end{pmatrix}$$

$$\times s^{\gamma-1-\mu}t^{\delta-1-\nu}u^{\delta'-1-\sigma}v^{\xi}w^{o}\ldots z^{\varrho} \quad (\text{wo } \sigma = -(\lambda+\mu+\nu)+\xi+o+\cdots+\varrho).$$

Das Integral hat den Werth

$$\frac{-2i\pi\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\delta')\Gamma(2-\varepsilon')}f_u$$

gleich dem $(-2i)$fachen Perpendikel, das aus der Ecke (ε) auf die Seite $(\varkappa\alpha)$ gefällt ist. Daher ist

$$\frac{\pi\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\delta')\Gamma(2-\varepsilon')}f_u = \sin\pi\alpha'.(\alpha\beta)+\sin\pi\beta'.(\beta\gamma)+\sin\pi\gamma'.(\gamma\delta)+\sin\pi\delta'.(\delta\varepsilon).$$

Weil für die Bildung des Functionaldeterminants nur der letzte Term rechts von Belang ist, so hat man zu beachten, dass

$$\frac{\pi}{\sin\pi\delta'}\cdot\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\delta')\Gamma(2-\varepsilon')} = \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\delta')}{\Gamma(2-\varepsilon')}.$$

Das Product aller solchen Factoren ist

$$P = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\ldots\Gamma(\theta)\Gamma(\iota)}{(1-\beta')(1-\gamma')\ldots(1-\theta')\Gamma(1-\varkappa)}.$$

Daher ist

$$\Delta\big((\alpha\beta),(\beta\gamma),\ldots,(\theta\iota)\big) = P.\Delta(f_1,f_2,\ldots f_z),$$

also

$$C\big((\alpha\beta),(\beta\gamma),\ldots,(\theta\iota)\big) = P.C(f_1,f_2,\ldots,f_z).$$

Man denke sich nun s, $\frac{t}{s}$, $\frac{u}{t}$, $\frac{v}{u}$, $\ldots$ $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{y}$ alle sehr klein (z. B. von derselben Ordnung) und suche den niedrigsten Term in der Entwicklung

von $\triangle(f_1, f_s, \ldots, f_z)$. Der Beginn der Entwicklung von f_u z. B. ist

$$f_u = s^{\gamma-1}t^{\delta-1}u^{\delta'-1}\left\{1+\frac{1-\varepsilon'}{-\delta'}\left[(1-\delta)\frac{u}{t}+(1-\gamma)\frac{u}{s}+(1-\beta)u\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1-\delta'}{2-\varepsilon'}\left[(1-\varsigma)\frac{v}{u}+(1-\zeta)\frac{w}{u}+\cdots+(1-\iota)\frac{z}{u}\right]+\cdots\right\};$$

in der Zeile f_u, $\frac{\partial f_u}{\partial s}$, $\cdots$, $\frac{\partial f_u}{\partial z}$ sind also die Terme $\frac{\partial f_u}{\partial u}$, $\frac{\partial f_u}{\partial v}$, $\cdots$, $\frac{\partial f_u}{\partial z}$ alle von derselben Ordnung, der niedrigsten, während die vorangehenden Terme f_u, $\frac{\partial f_u}{\partial s}$, $\frac{\partial f_u}{\partial t}$ von höherer Ordnung der Kleinheit sind. Hieraus erhellt, dass der gesuchte niedrigste Term des Determinants derselbe ist wie in der Entwicklung des Products $f_1\frac{\partial f_s}{\partial s}\frac{\partial f_t}{\partial t}\cdots\frac{\partial f_z}{\partial z}$. Nun ist

$$f_1 = 1+\cdots, \quad \frac{\partial f_s}{\partial s} = (\beta'-1)s^{\beta'-2}+\cdots, \quad \frac{\partial f_t}{\partial t} = (\gamma'-1)s^{\gamma-1}t^{\gamma'-2}+\cdots,$$

$$\frac{\partial f_u}{\partial u} = (\delta'-1)s^{\gamma-1}t^{\delta-1}u^{\delta'-2}+\cdots, \quad \frac{\partial f_z}{\partial z} = (\theta'-1)s^{\gamma-1}t^{\delta-1}\ldots y^{\theta-1}z^{\theta'-2}+\cdots;$$

also

$$C(f_1, f_s, \ldots f_z) = (\beta'-1)(\gamma'-1)\ldots(\theta'-1);$$

denn das Product der transcendenten Potenzen von s, t, $\ldots$, z ist nichts anderes als der niedrigste Term in der Entwicklung der Function K. Hieraus folgt aber

$$C((\alpha\beta), (\beta\gamma), \ldots (\theta\iota)) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\ldots\Gamma(\iota)}{(-1)^{n-3}\Gamma(1-\varkappa)},$$

ein Ausdruck, der nicht verschwindet, wenn auch eine der Seiten mit $(\varkappa\alpha)$ den Winkel π bildet. Die Bedingung, dass keine Seite mit $(\varkappa\alpha)$ parallel sei, fällt daher von jetzt an weg.

Um endlich noch für Horizonte und Verzweigungspunkte Rath zu schaffen, schalte man zwischen 1 und s, der fallenden Grösse nach geordnet, die reellen Argumente

$$q_1, q_2, \ldots, q_\iota, q'_1, q'_2, \ldots, q'_\iota, r_1, r_2, \ldots, r_m, r'_1, r'_2, \ldots, r'_m$$

mit den Exponenten (die vorläufig noch alle positiv gedacht werden mögen)

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\iota, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_\iota, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m, \mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_m$$

ein, und zwar so, dass sie ein gewöhnliches Vieleck möglich machen; es sei

$$\overline{C} = C((\alpha\beta), (\beta\lambda_1), (\lambda_1\lambda_2), \ldots, (\mu'_m\gamma), (\gamma\delta), \ldots (\theta\iota)).$$

Man führe nun ω von 1 aus südlich an allen Polen $\frac{1}{q}$, nördlich an allen

Polen $\frac{1}{q'}$, südlich an allen Polen $\frac{1}{r}$, nördlich an allen Polen $\frac{1}{r'}$ vorbei nach $\frac{1}{s}$ und bezeichne das entsprechende Integral mit $(\beta\gamma)$; es ist bestimmt, im Determinant $\Delta((\alpha\beta),(\beta\lambda_1),\ldots(\mu'_m\gamma),(\gamma\delta),\ldots,(\theta\iota))$ die Function $(\mu'_m\gamma)$ zu ersetzen. Dann führe man ω von 0 aus südlich an 1, $\frac{1}{q}$, nördlich an $\frac{1}{q'}$, südlich an $\frac{1}{r}$, nördlich an $\frac{1}{r'_1}$, $\frac{1}{r'_2}$, $\ldots$ $\frac{1}{r'_{m-1}}$ vorbei nach $\frac{1}{r'_m}$; das Integral heisse $(\alpha\mu'_m)$ und soll $(\mu'_{m-1}\mu'_m)$ ersetzen. Man fahre so rückwärts fort, bis die Integrale $(\alpha\mu'_1)$, $\ldots$, $(\alpha\mu'_m)$ in den Determinant gebracht sind. Dann führe man ω von 0 aus nördlich an 1, südlich an $\frac{1}{q}$, nördlich an $\frac{1}{q'}$, südlich an $\frac{1}{r_1}$, $\ldots$, $\frac{1}{r_{m-1}}$ vorbei nach $\frac{1}{r_m}$; das Integral heisse $(\alpha\mu_m)$ und ersetze $(\mu_{m-1}\mu_m)$; man fahre so rückwärts fort, bis die Integrale $(\alpha\mu_1)$, $\ldots$ $(\alpha\mu_m)$ in den Determinant gebracht sind.

Ferner führe man ω von 0 aus südlich an 1, $\frac{1}{q}$, nördlich an $\frac{1}{q'_1}$, $\frac{1}{q'_2}$, $\ldots$, $\frac{1}{q'_{l-1}}$ vorbei in einem kleinen rechtläufigen Kreise um $\frac{1}{q'_l}$ herum und dann auf demselben Wege nach 0 zurück; das Integral heisse $(\alpha\lambda'_l)$ und ersetze $(\lambda'_{l-1}\lambda'_l)$; man fahre so rückwärts fort, bis die Integrale $(\alpha\lambda'_1)$, $(\alpha\lambda'_2)$ $\ldots$, $(\alpha\lambda'_l)$ in den Determinant gebracht sind. Nun führe man ω von 0 aus nördlich an 1, südlich an $\frac{1}{q_1}$, $\frac{1}{q_2}$, $\ldots$, $\frac{1}{q_{l-1}}$ vorbei in einem kleinen rückläufigen Kreise um $\frac{1}{q_l}$ herum und dann auf demselben Wege nach 0 zurück; das Integral heisse $(\alpha\lambda_l)$ und ersetze $(\lambda_{l-1}\lambda_l)$; man fahre so rückwärts fort, bis die Integrale $(\alpha\lambda_1)$, $(\alpha\lambda_2)$, $\ldots$, $(\alpha\lambda_l)$ in den Determinant gebracht sind.

Wenn nun die den Functionen $(\alpha\beta)$, $(\alpha\lambda_1)$, $\ldots$, $(\alpha\mu'_m)$, $(\beta\gamma)$, $\ldots$, $(\theta\iota)$ entsprechende Constante einfach mit C bezeichnet wird, so ist

$$C = e^{i\pi N}(2\pi)^{2l}\Pi\frac{\sin\pi\lambda}{\pi}\cdot\Pi\frac{\sin\pi\lambda'}{\pi}\cdot\overline{C},$$

wo

$$N = \sum_{\xi=1}^{\xi=l}((2l+2m-\xi)(\lambda_\xi-1)-(l+2m-\xi)(\lambda'_\xi-1))$$

$$+\sum_{\xi=1}^{\xi=m}((2m+1-\xi)(\mu_\xi-1)-(m+1-\xi)(\mu'_\xi-1));$$

weil aber

$$\overline{C} = \Pi\Gamma(\lambda).\Pi\Gamma(\lambda').\Pi\Gamma(\mu).\Pi\Gamma(\mu').\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\ldots\Gamma(\iota)}{(-1)^{n-3}\Gamma(1-\varkappa)}$$

ist, so folgt

$$C = e^{i\pi N}(-1)^{n-3}(2\pi)^{2l}\frac{\Pi\Gamma(\mu).\Pi\Gamma(\mu')}{\Pi\Gamma(1-\lambda).\Pi\Gamma(1-\lambda')}.\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\ldots\Gamma(\iota)}{\Gamma(1-\varkappa)}.$$

Jetzt bewege man die Pole $\frac{1}{q_1}, \cdots, \frac{1}{q_l}, \frac{1}{r_1}, \cdots, \frac{1}{r_m}$ von der Realitätslinie weg in die nördliche Halbebene und bringe die Pole $\frac{1}{q_1'}, \frac{1}{q_2'}, \cdots, \frac{1}{q_l'}, \frac{1}{r_1'}, \cdots, \frac{1}{r_m'}$ in die südliche Halbebene, so dass sie resp. mit jenen conjugirt werden. Es ist vorausgesetzt, dass $n-2+2l-4m$ positiv sei. Nun variire man alle Exponenten, so dass stets

$$\Sigma\lambda+\Sigma\lambda'+\Sigma\mu+\Sigma\mu'+\alpha+\beta+\cdots+\varkappa = n-2,$$

und dass $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ positiv bleiben, bis diese die gegebenen Werthe annehmen und $\lambda=\lambda'=-1$, $\mu=\mu'=2$ geworden sind. Dann ist $N\equiv m \pmod 2$, und man hat

$$C = (-1)^{m+n+1}(2\pi)^{2l}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\ldots\Gamma(\iota)}{\Gamma(1-\varkappa)}.$$

Die zwei an Werth conjugirten Functionen $(\alpha\lambda_1)$, $(\alpha\lambda_1')$ bestimmen die Projectionen der Verschiebung der Ränder der zum Horizontbild $\frac{1}{q_1}$ gehörenden Kluft; und die zwei Functionen $(\alpha\mu_1)$, $(\alpha\mu_1')$ bestimmen die Coordinaten des Verzweigungspunkts, Originals von $\frac{1}{r_1}$, und so fort.

Der in §. 6 beschriebene Determinant Δ der $n-2$ Bestimmungsstücke einer zerklüfteten und im Innern mit Verzweigungspunkten versehenen Vielecksfläche V kann also nie verschwinden. Der am Ende von §. 2 beschriebene Näherungsprocess, durch den ein gegebenes geschlossenes Vieleck erreicht wird, ist daher immer möglich.

Bern, 24. August 1873.

Zur Theorie der zusammengesetzten Gruppen.

(Von Herrn *E. Netto.*)

Die nachfolgende Arbeit beschäftigt sich mit einem für die Theorie der Substitutionen wichtigen Gegenstande, nämlich mit den zusammengesetzten Gruppen. Herr *C. Jordan* hat demselben in seinem Traité des substitutions et des équations algébriques mehrere Paragraphen gewidmet und ist auch in späteren Untersuchungen, besonders in *Liouvilles* Journal (2) XVI. 1861, auf dieses Thema zurückgekommen. Gleichwohl blieb in dieser noch jungen Theorie Manches einer weiteren Aufklärung vorbehalten, und da es mir gelang, einige Lücken derselben auszufüllen und mehrere verwandte Gegenstände in schärferes Licht zu setzen, so hielt ich dies für hinreichend, die Veröffentlichung des vorliegenden Aufsatzes zu rechtfertigen.

§. 1.

Die einfachsten in der Theorie der Substitutionen auftretenden Begriffe als bekannt vorausgesetzt, erläutern wir nur die folgenden. Die Substitution $a^{-1}ba = b'$ heisse die *Transformirte* von b durch a. Ist $a^{-1}ba = b$ also $ab = ba$, so sind die Substitutionen a und b mit einander *vertauschbar*. Wenn die Substitutionen $1, g_1, g_2, \ldots$ einer Gruppe G so beschaffen sind, dass $a^{-1}g_\lambda a = g_\mu$, so nennen wir G *permutabel* zu a, oder wir sagen, da aus der obigen Gleichung $ag_\lambda = g_\varkappa . g_\lambda a$ folgt, G ist mit a bis auf Substitutionen von G vertauschbar. Wenn allgemeiner die Substitutionen zweier Gruppen G und H so beschaffen sind, dass $g_\alpha h_\beta = k . h_\beta g_\alpha$ ist, wo k einer dritten Gruppe K angehört, so heissen G und H vertauschbar bis auf Substitutionen von K. Eine *allgemeine Gruppe* heisst eine solche, welche vorgeschriebene Bedingungen erfüllt, ohne in einer anderen enthalten zu sein, die denselben Bedingungen genügt.

§. 2.

Eine Gruppe ist *zusammengesetzt*, wenn sie eine andere enthält, welche mit ihren Substitutionen permutabel ist. Ob diese zweite Gruppe auch gleich Eins sein oder mit anderen Worten, ob jede Gruppe als letzte einer Reihe auftreten kann, und unter welchen Bedingungen dies möglich ist, wird sich später entscheiden.

Eine Reihe von Gruppen

$$(1.) \quad G, \; H, \; J, \; K, \; \ldots \; P, \; Q, \; 1$$

heisse die *zu G gehörige Grundreihe*, wenn jede Gruppe derselben eine allgemeine in der vorhergehenden enthaltene und mit den Substitutionen von G permutable ist; es ist also $g_\lambda^{-1} J g_\lambda = J$. Die Reihe (1.) heisse die *zu G gehörige Reihe*, wenn jede Gruppe derselben eine allgemeine in der vorhergehenden enthaltene und mit den Substitutionen derselben permutable ist; es ist dann also $h_\lambda^{-1} J h_\lambda = J$, ohne dass $g_\lambda^{-1} J g_\lambda$ gleich J zu sein braucht. Möglicherweise stimmen beide Begriffe in gewissen Fällen überein.

Betrachten wir (1.) als Grundreihe, so kann die Reihe, welche ihr entspricht, oder eine derselben

$$(2.) \quad G, \; H, \; H', \; H'', \; \ldots \; H^{(\lambda)}, \; J, \; J', \; \ldots \; J^{(\mu)}, \; K, \; \ldots, \; 1$$

dadurch bestimmt werden, dass man $H^{(\varkappa)}$ als allgemeine in $H^{(\varkappa-1)}$ enthaltene und mit den Substitutionen dieser Gruppe permutable Gruppe feststellt, welche zugleich J enthält. H wird dabei als $H^{(0)}$ aufgefasst; die Gruppen $H^{(\alpha)}$, $J^{(\alpha)}$, $K^{(\alpha)}$, $\ldots$ $[\alpha \geqq 1]$ mögen *Zwischen-Gruppen* heissen.

§. 3.

Die Ordnungen der verschiedenen Gruppen der Reihe (2.) mögen bezüglich

$$(3.) \quad O, \; \frac{O}{p}, \; \frac{O}{pp'}, \; \frac{O}{pp'p''}, \; \ldots \; \frac{O}{pp'\ldots p^{(\lambda)}}, \; \frac{O}{pp'\ldots p^{(\lambda)}q}, \; \frac{O}{p\ldots qq'}, \; \ldots$$

sein. Die Werthe $p, p', \ldots q, q', \ldots$ heissen die zu $H, H', \ldots J, J', \ldots$ gehörigen *Factoren der Zusammensetzung*. Da H in G enthalten ist, so kann man die letztere Gruppe durch Multiplication der Substitutionen von H mit gewissen anderen Substitutionen $1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\alpha, \ldots \gamma_{p-1}$ eines Systems Γ erhalten. Dies werde durch

$$G = H\gamma_\alpha = H\Gamma$$

ausgedrückt. Aehnlich ist

$$(4.) \quad H = H'\mathrm{H}, \quad H' = H''\mathrm{H}', \quad \ldots \quad G = H''\mathrm{H}'\mathrm{H}\Gamma' = \cdots.$$

Dass die Anzahl der γ gleich p gesetzt werden musste, ist einleuchtend. Weil ferner die Gruppe H' mit den Substitutionen von H permutabel ist und weil H in H enthalten ist, so wird in leicht verständlicher Bezeichnung $\eta_\lambda^{-1} h'_\mu \eta_\lambda = h'_\nu$ oder $\eta_\lambda h'_\nu = h'_\mu \eta_\lambda$. Specialisirt man h'_μ und setzt für h'_ν gemäss $H' = H''\mathrm{H}'$ den Werth $h'_\nu = h''_\sigma \eta'_\tau$ ein, so ist $\eta_\lambda \eta'_\mu = h''_\sigma \eta'_\tau \eta_\lambda$. Da diese Glei-

chung für jedes λ, μ gilt, so ist auch $\mathrm{H}\,\mathrm{H}' = H''\mathrm{H}'\mathrm{H}$ und daher, weil auch $\mathrm{H}\,H' = H'\mathrm{H}$,

$$(5.) \qquad H = H''\mathrm{H}'\mathrm{H} = H''\mathrm{H}\,\mathrm{H}' = \mathrm{H}\,H''\mathrm{H}' = \cdots.$$

Man darf also in diesen Ausdrücken für G, H, ... die einzelnen Systeme von Substitutionen beliebig vertauschen.

§. 4.

Wir kommen jetzt zur Untersuchung der Umstände, welche eintreten, wenn auf eine Gruppe der Reihe oder auch der Grundreihe von G gleichzeitig zwei andere Gruppen folgen. Gesetzt J und J' seien diese beiden auf H folgenden Gruppen. Die Substitutionen, welche J und J' gemeinsam enthalten, bilden eine Gruppe M; es sei $MI = J$ und $MI' = J'$. Der Ausdruck $i_\alpha i'_\beta i_\alpha^{-1} i'^{-1}_\beta$ gehört zu J; denn J ist mit den Substitutionen von H, also auch mit denen von J' permutabel, so dass $i'_\beta i_\alpha^{-1} i'^{-1}_\beta = i_\gamma$ ist; daher wird auch $i_\alpha . i_\gamma$ zu J gehören. In ähnlicher Weise folgt, dass der obige Ausdruck auch zu J' gehört. Er wird folglich in J und J' zugleich enthalten sein, d. h. in der Gruppe M. Folglich ist

$$(6.) \qquad i_\alpha i'_\beta i_\alpha^{-1} i'^{-1}_\beta = m_\gamma; \quad i_\alpha i'_\beta = m_\gamma i'_\beta i_\alpha.$$

Specialisirt man die i_α und i'_α und bezeichnet die Substitutionen von I und I' mit ι und ι', so wird aus (6.)

$$(7.) \qquad \iota_\alpha m_\beta = m_\gamma \iota_\alpha; \quad \iota'_\alpha m_\beta = m_\gamma \iota'_\alpha; \quad \iota_\alpha \iota'_\beta = m_\gamma \iota'_\beta \iota_\alpha.$$

Hieraus folgt, dass die Substitutionen des Systems MII' eine Gruppe bilden. Denn aus (7.), ergiebt sich

$$m_\alpha \iota_\beta \iota'_\gamma . m_a \iota_b \iota'_c = m_\alpha \iota_\beta . m_\lambda \iota'_\gamma . \iota_b \iota'_c = m_\alpha \iota_\beta m_\lambda . m_\gamma \iota_b \iota'_\gamma \iota'_c = m_\alpha m_\varkappa \iota_\beta \iota_b \iota'_\gamma \iota'_c = m_e \iota_\sigma \iota'_\tau.$$

Die so erhaltene Gruppe ist mit den Substitutionen von H permutabel, da ihre Theile $m_e \iota_\sigma$ und $m_e \iota'_\tau$ es sind; sie ist allgemeiner als J oder J', da sie beide enthält: sie muss daher mit H zusammenfallen, weil sie — in H enthalten — sonst der Voraussetzung widerspräche, der gemäss J und J' allgemein sein sollten. Es ist folglich

$$(8.) \qquad H = MII' = JI' = J'I.$$

Die Anzahl der m, d. h. die Ordnung von M sei x; die Anzahl der ι und ι' sei bezüglich y und y'; dann ist die Ordnung von J gleich xy, die von J' gleich xy' und die von H gleich xyy'. Andrerseits seien die Ordnungen

von H, J, J' bezüglich $\frac{O}{p}$, $\frac{O}{pq}$, $\frac{O}{pq'}$; dann ergiebt ein Vergleich beider Zahlen-Reihen, dass $x = \frac{O}{pqq'}$.

Endlich lässt sich nachweisen, dass M eine *allgemeine* in J enthaltene Gruppe ist, welche mit den Substitutionen von J permutabel ist. Denn gäbe es zwischen beiden eine allgemeinere Gruppe N, welche M enthält, in J enthalten und mit dessen Substitutionen permutabel ist, so wäre

$$(9.) \qquad i'_\beta n_\alpha^{-1} i_\beta'^{-1} = n_\alpha^{-1} . n_\alpha i'_\beta n_\alpha^{-1} i_\beta'^{-1} = n_\alpha . m_\gamma = n_\delta,$$

weil $n_\alpha i'_\beta n_\alpha^{-1} i_\beta'^{-1}$ in der Form $i_\alpha i'_\beta i_\alpha^{-1} i_\beta'^{-1}$ enthalten, also nach (6.) gleich m_γ ist. Aus (9.) folgt, dass N auch mit den Substitutionen von J' permutabel ist; mit denen von J war es aber der Voraussetzung nach permutabel; folglich ist es auch mit denen von H permutabel, da nach (8.) H aus J und J' zusammengesetzt werden kann. Nun sei $J = N i_\alpha$, dann ist $H = N i_\alpha i'_\beta$. Wir betrachten die Substitutionen von der Form $N\iota_\beta$. Diese bilden eine Gruppe. Denn

$$n_\alpha \iota'_\beta . n_a \iota'_b = n_\alpha n_c \iota'_\beta \iota'_b = n_\lambda \iota'_\mu,$$

weil $\iota'_\beta \iota'_b$ als Product zweier zu J' gehörigen Substitutionen $= m_a \iota'_\mu$ gesetzt werden kann. Diese Gruppe $N\iota'_\beta$ ist ferner mit H permutabel, da dies mit N und mit $M\iota'_a$ der Fall ist; sie enthält $J' = M\iota'$, und daraus ergiebt sich, dass J' nicht allgemein sein kann. Dies streitet aber gegen die Voraussetzung, so dass die Annahme von N zu verwerfen ist.

Hieraus fliesst der Lehrsatz.

Folgen in der Reihe von G auf eine Gruppe H zwei Gruppen J und J' mit den Factoren der Zusammensetzung q und q', so kann man auf jede dieser beiden ein und dieselbe bestimmte Gruppe M folgen lassen mit den Factoren q' bezüglich q; diese Gruppe ist mit den Substitutionen von H permutabel.

§. 5.

Lehrsatz. *Giebt es verschiedene zu G gehörige Reihen, so liefern diese dieselben Factoren der Zusammensetzung**).

---

*) Der Beweis, welchen Herr *C. Jordan* von diesem Theoreme giebt, ist nicht ausreichend. Herr *Jordan* führt in §. 58 seines „Traité etc." Systeme von Substitutionen $h_\gamma h'_\gamma k_\alpha$ ein und behandelt diese als Gruppen, ohne diese Eigenschaft derselben nachgewiesen zu haben.

Beweis. Ist neben der Reihe (1.) noch eine andere

$$(1'.) \quad G, H', J', K', L'$$

vorhanden, so mögen diese in den beiden ersten Gliedern übereinstimmen, so dass $H = H'$ ist, während J von J' verschieden sein soll; die zu diesen beiden Gruppen gehörigen Factoren seien q und q'. Dann kann man nach dem vorigen Paragraphen zwei Reihen

$$(10.) \quad G, H, J, K'', L'', \ldots \qquad (10'.) \quad G, H', J', K'', L'', \ldots$$

aufstellen, bei welcher K'' den Factor q' in (10.), und q in (10′) hat. Die Reihen (1.) und (10.) einerseits und (1′.) und (10′.) andrerseits stimmen bereits in drei Gliedern und also auch in drei Factoren überein, während (10.) und (10′.) abgesehen von der Folge in allen Factoren übereinstimmen. Gilt der Satz also für (1.) und (10.), so wird er ebenso für (1′.) und (10′.), d. h. er wird auch für (1.) und (1′.) gelten. Der Beweis beschränkt sich also jetzt auf die Reihen (1.) und (10.). Sind diese noch von einander verschieden, so kann man zwei neue Reihen aufstellen, welche mit beiden in je vier Factoren übereinstimmen u. s. w. Da nun (1.) nur eine endliche Anzahl von Gliedern hat, so folgt aus diesem Verfahren, dass man schliesslich auf Reihen mit übereinstimmenden Factoren gelangt; und dadurch ist der Satz bewiesen.

§. 6.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung der hauptsächlichsten Eigenschaften von Zwischengruppen über. Gesetzt, es seien zwischen H und J Zwischengruppen vorhanden, und H_1 sei eine der unmittelbar auf H folgenden, dann transformiren wir H_1 durch alle Substitutionen von G und erhalten dadurch Gruppen, unter denen von einander verschieden sein mögen

$$H_1, \quad H_2, \quad \ldots \quad H_\nu.$$

Da nun H_1 mit den Substitutionen von H permutabel ist, so ist auch $g_\alpha^{-1} H_1 g_\alpha = H_\alpha$ mit $g_\alpha^{-1} H g_\alpha = H$ permutabel. In gleicher Weise ergiebt sich, dass alle Gruppen $H_1, \ldots H_\nu$ die nächste Hauptgruppe J enthalten. Nun möge $H_{\alpha\beta}$ diejenige Gruppe bezeichnen, welche alle Substitutionen enthält, die zugleich in H_α und H_β vorkommen; dann bilden wir die Reihe

$$H_{12}, \quad H_{13}, \quad \ldots \quad H_{1\nu}.$$

Gesetzt nun, es wäre $H_{12} = H_{13} = K$, so können wir setzen, da H_1, H_2 und H_3 die Gruppe K enthalten:

$$H_1 = K a_\alpha, \quad H_2 = K b_\alpha, \quad H_3 = K c_\alpha;$$

also nach §. 4:

$$H = H_1 b_\alpha = H_1 c_\alpha.$$

Bezeichnen wir die Substitutionen von H_1 mit $1, h_1, h_2, \ldots$, so folgt aus der letzten Gleichung, dass H aus den Substitutionen

$$\begin{array}{llll} 1, & h_1, & h_2, & h_3, \quad \ldots \\ b_1, & h_1 b_1, & h_2 b_1, & h_3 b_1, \quad \ldots \\ b_2, & h_1 b_2, & h_2 b_2, & h_3 b_2, \quad \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \end{array}$$

oder auch aus den Substitutionen

$$\begin{array}{llll} 1, & h_1, & h_2, & h_3, \quad \ldots \\ c_1, & h_1 c_1, & h_2 c_1, & h_3 c_1, \quad \ldots \\ c_2, & h_1 c_2, & h_2 c_2, & h_3 c_2, \quad \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \end{array}$$

besteht. Beide Complexe müssen also übereinstimmen. Ist nun

$$h_\alpha b_\lambda = h_\beta c_\mu \text{ und } h_\gamma b_\lambda = h_\delta c_\nu,$$

so folgt daraus

$$b_\lambda = h_\varepsilon c_\mu = h_\eta c_\nu,$$

und daraus weiter

$$c_\mu = h_\vartheta c_\nu, \quad h_\vartheta = c_\mu c_\nu^{-1}.$$

Dies ist nach der bekannten Bildung der obigen Schemata unmöglich, wenn nicht $c_\mu = c_\nu$ ist, so dass

$$h_\alpha b_\lambda = h_\beta c_\mu; \quad h_\gamma b_\lambda = h_\delta c_\mu,$$

d. h. die obigen beiden Complexe entsprechen einander reihenweise, und wir können setzen $c_\lambda = h_\mu b_\nu$ oder, da eine derartige Gleichung für jedes λ besteht,

$$c_\alpha = H_1 b_\alpha.$$

Es ist also

$$H_3 = K c_\alpha = K H_1 b_\alpha = K a_\alpha b_\alpha,$$

d. h. jede Substitution von H_3 ist in der Form $H_1 . H_2$ darstellbar, sobald $H_{12} = H_{13}$ ist. Tritt nun dieser Fall ein, so unterdrücken wir in der Reihe $H_1, H_2, \ldots H_\nu$ die Gruppe H_3 und in gleicher Weise alle ähnlichen. Hervorzuheben ist dabei noch, dass die den Gruppen H_1 und H_2 gemeinsamen Substitutionen (die der Gruppe K) auch den Gruppen H_1, H_2, H_3 gemeinsam waren. Jetzt bilden wir von neuem die reducirten Reihen

$$H_1, \quad H_2, \quad H_3, \quad \ldots \quad H_{\nu_1};$$
$$H_{12}, \quad H_{13}, \quad H_{14}, \quad \ldots \quad H_{1\nu_1};$$
$$H_{123}, \quad H_{124}, \quad \ldots \quad H_{12\nu_1};$$

wobei $H_{\alpha\beta\gamma}$ die den Gruppen $H_{\alpha\beta}$ und $H_{\alpha\gamma}$ gemeinsamen Substitutionen enthalten möge. Ist nun z. B. $H_{123} = H_{124}$, so würde wie oben folgen, dass jede Substitution von H_{14} auf die Form $H_{12}.H_{13}$ gebracht werden kann, und dass alle Substitutionen, welche H_{12} mit H_{13} gemeinsam hat, auch H_{12}, H_{13}, H_{14} gemeinsam haben. Mit anderen Worten heisst dies letztere: Die Gruppe der gemeinsamen Substitutionen von H_1, H_2, H_3 ist auch die der gemeinsamen Substitutionen von H_1, H_2, H_3, H_4. Tritt also der Fall ein, dass $H_{123} = H_{124}$, so reduciren wir die Reihe H_1, H_2, ... H_{ν_1}, indem wir H_4 und alle Gruppen von entsprechender Eigenschaft unterdrücken. In gleicher Weise fahren wir fort und gelangen dadurch zu den Reihen

$$H_1, \quad H_2, \quad H_3, \quad \ldots \quad H_\mu$$
$$H_{12}, \quad H_{13}, \quad H_{14}, \quad \ldots \quad H_{1\mu};$$
$$H_{123}, \quad H_{124}, \quad \ldots \quad H_{12\mu};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H_{123\ldots\mu};$$

hierbei werden nicht zwei Gruppen einer Reihe einander gleich sein und die Gruppe der Substitutionen, welche H_1, H_2, ... H_μ mit einander gemeinsam haben, wird identisch sein mit derjenigen der Substitutionen, welche H_1, H_2, ... H_ν mit einander gemeinsam hatten. Die erstere der beiden Gruppen $H_{12\ldots\mu}$ ist daher gleich $H_{12\ldots\nu}$ und deshalb mit J zusammenfallend. Denn transformiren wir die Gruppen H_1, ... H_ν durch eine beliebige Substitution g von G, so gehen diese Gruppen in einander über; keine entsteht aber zweimal, weil sonst aus $g^{-1}H_\alpha g = g^{-1}H_\beta g$ folgen würde $gg^{-1}H_\alpha gg^{-1} = H_\alpha = H_\beta$; es wird also durch jene Transformation die ganze Reihe H_1, ... H_ν wiedererzeugt: jede Substitution aus $H_{12\ldots\nu}$ geht also in eine andere derselben Gruppe über. Es ist daher $H_{12\ldots\nu}$ und auch $H_{12\ldots\mu}$ mit den Substitutionen von G permutabel. Da ferner jede Gruppe des obigen Schema die Hauptgruppe J enthält, so muss $H_{12\ldots\mu} = J$ sein, weil J eine allgemeine Gruppe ist.

Nach früheren Sätzen ist jetzt ersichtlich, dass wenn der Factor von H_1 gleich t ist, die Factoren für H_2, ... H_ν denselben Werth haben, und dass ein gleiches für H_{12}, H_{13}, ...; H_{123}, ... eintritt. Ist also O die Ordnung von H, so erhält man für die Reihen des obigen Schema bezüglich die

Ordnungszahlen

$$\frac{O}{t}, \quad \frac{O}{t^2}, \quad \frac{O}{t^3}, \quad \ldots \quad \frac{O}{t^\mu}.$$

$J = H_{12\ldots\mu}$ ist die Gruppe, welche den beiden Grnppen $H_{12\ldots\mu-2,\mu-1}$ und $H_{12\ldots\mu-2,\mu}$ gemeinsam ist. Diese können wir daher bezüglich durch JH_μ und $JH_{\mu-1}$ bezeichnen; jeder der Complexe H enthält t Substitutionen; $H_{12\ldots\mu-2}$ wird gleich $JH_\mu H_{\mu-1} = JH_{\mu-1}H_\mu$ u. s. f., H wird gleich $JH_1.H_2.H_3\ldots H_\mu$ werden. Die Complexe H_α und H_β $(\alpha \gtrless \beta)$ haben ausser der Substitution 1 keine andere gemeinsam.

Wie wir bisher die Gruppe H_1 zu Grunde legten, so können wir auch jede andere z. B. H_2 gebrauchen; dann wird die Gruppe, welche dem J vorhergeht, $H_{23\ldots\mu-1,\mu} = JH_1$ werden können u. s. f.; kurz es herrscht eine vollkommene Symmetrie unter den H. Nach §. 5 ist, weil auf $JH_\alpha H_\beta$ sowohl JH_α als JH_β folgen kann, H_α mit den Substitutionen von H_β permutabel bis auf Substitutionen von J. Es gilt also dasselbe auch für je zwei Gruppen $H_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ und $H_{abc\ldots}$, da diese aus J und den H zusammengesetzt sind.

Die Resultate der vorstehenden Untersuchung fassen wir in folgenden Lehrsatz zusammen:

Giebt es zwischen zwei in der Hauptreihe von G aufeinander folgenden Gruppen H von der Ordnung O und J von der Ordnung O' Zwischengruppen, so ist $O = O'.t^\mu$, wenn die Reihe von G zwischen beiden $\mu-1$ Reihen von Gruppen zählt; es existiren dann μ Complexe von Substitutionen $H_1, H_2, \ldots H_\mu$ *derart, dass jeder von der Ordnung t ist, keiner mit einem anderen ausser* 1 *eine Substitution gemeinsam hat, jeder mit den Substitutionen jedes anderen bis auf solche von J vertauschbar ist, und dass*

$$H = JH_1H_2\ldots H_\mu.$$

Betrachten wir die letzte Gruppe der Hauptreihe von G, so ergiebt sich unmittelbar der Zusatz:

Die letzte Gruppe Q der Hauptreihe von G besteht aus einer oder mehreren Gruppen $H_1, H_2, \ldots H_\mu$ *von gleich hohem Grade, derart dass eine jede mit den Substitutionen der anderen vertauschbar ist, und keine mit einer anderen eine Substitution (mit Ausnahme von* 1*) gemeinsam hat.*

§. 7.

Für die Theorie der algebraischen Gleichungen sind die sogenannten *transitiven* Gruppen von besonderer Wichtigkeit, weil sie den irreductiblen

Gleichungen entsprechen; aus ihnen lassen sich die nicht transitiven Gruppen durch Aneinanderschiebung zusammensetzen, wie jede reductible Function durch Multiplication irreductibler Factoren gebildet werden kann. Es möge daher für diesen Paragraphen die zusammengesetzte Gruppe G als transitiv vorausgesetzt werden, d. h. ihre Substitutionen sollen es gestatten, auf ein beliebiges Element ein beliebiges anderes folgen zu lassen. Die Substitutionen der nächstfolgenden Gruppe H der Hauptreihe mögen ferner die Elemente $a_1, a_2, \ldots a_r$ und nur diese unter einander vertauschen. Giebt es dann noch ein anderes Element b_1, so wählen wir die Substitution g so, dass sie b_1 auf a_1 folgen lässt, und h_λ so, dass sie auf a_1 folgen lässt a_λ. Dann wird $g^{-1}h_\lambda g = h_\mu$ für $\lambda = 1, 2, \ldots r$ das Element b_1 durch $b_1, b_2, \ldots b_r$ ersetzen. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass die b untereinander und von den a verschieden sind. Ferner lassen die Substitutionen von H auch nur die $b_1, \ldots b_r$ aufeinander folgen; denn gehörte zu ihnen noch ein b_{r+1}, so könnte man rückwärts auf ein a_{r+1} schliessen; das widerspricht aber der Voraussetzung. Es theilen sich daher sämmtliche Elemente in Systeme zu je r derart, dass die Gruppe H in Beziehung auf jedes einzelne System transitiv ist ohne aber die Systeme untereinander zu verbinden. Möglicherweise ist aber die Zahl dieser Systeme auch gleich Eins, d. h. H ist ebenfalls für alle Elemente transitiv; und dass diese beiden Fälle auch wirklich eintreten, erkennt man an der Gruppe G, welche aus den Substitutionen

$1,\ (a_1a_2)(b_1b_2);\ (a_1b_1)(a_2b_2),\ (a_1b_2)(a_2b_1);\ (a_1a_2),\ (b_1b_2),\ (a_1b_1a_2b_2),\ (a_1b_2a_2b_1)$

besteht. Die nächste Gruppe ihrer Hauptreihe H, welche aus den vier ersten dieser Substitutionen besteht, ist ebenso wie G transitiv, während die darauf folgende Gruppe J, welche die beiden ersten Substitutionen enthält, nur die Elemente a_1 und a_2 einerseits, b_1 und b_2 andrerseits mit einander verbindet. — Was von der einen Gruppe der Hauptreihe bewiesen wurde, gilt ebenso für alle folgenden, so dass wir den Satz aussprechen können:

Jede Gruppe der Hauptreihe theilt die Elemente in Systeme von gleicher Gliederzahl derart, dass die Substitutionen der Gruppe nur die Elemente der einzelnen Systeme untereinander verbinden. Die Zahl der Systeme ist für jede Gruppe ein Vielfaches der Zahl der Systeme vorhergehender Gruppen.

Zugleich erkennt man:

Es giebt keine Substitution, welche zwei Elemente derselben Gruppe in Elemente verschiedener Gruppen überführt.

Denn gehört die Eintheilung $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots; c_1, c_2, \ldots$ zur

Gruppe H, und hätte g die Form $(a_1 b_1 \ldots a_2 c_1 \ldots)$, so würde $g^{-1} H g = H$ auf b_1 das Element c_1 folgen lassen; das ist aber dem Begriffe der Systeme widersprechend.

Anders wird die Eintheilung der Elemente bei Zwischengruppen. Ist z. B. H transitiv in Hinsicht auf $a_1, a_2 \ldots a_r$, ebenso auf $b_1, b_2, \ldots b_r$, u. s. w., so folgt genau wie oben bei den Hauptgruppen, dass die a gleichfalls in Systeme gleicher Gliederzahl für jede folgende Zwischengruppe H_1, H_{12}, ... zerfallen; für die b folgt dasselbe u. s. f. Es lässt sich aber nicht nachweisen, dass eins der Systeme der a in H_1 dieselbe Gliederzahl habe als ein solches der b. Denn hierzu wäre eine Substitution von H nothwendig, welche ein a in ein b überführt. Dergleichen giebt es aber nach der Voraussetzung nicht. Ist nun die Zahl der Elemente für die Systeme der a, der b, der c, ... in H bezüglich r_a, r_b, r_c, ..., und transformirt man H durch die Substitutionen von g in andere Zwischengruppen z. B. in H_2, so wird die Zahl der Elemente der a durch eine andere der Zahlen r z. B. durch r_b ersetzt werden; ähnlich für H_3 durch r_c, ... Geht man also zur folgenden Zwischengruppe H_{12}, so wird die Elementenzahl ein Theiler von r_a und r_b, bei H_{123} von r_a, r_b, r_c werden, in dieser Weise gelangt man bis zur nächsten Hauptgruppe; doch brauchen r_a, r_b, r_c, ... nicht alle verschieden zu sein.

§. 8.

Es mögen nun J und K zwei in der Reihe von G aufeinanderfolgende Gruppen sein, und s_1 eine der Substitutionen, welche J angehören ohne in K enthalten zu sein. Bilden wir nun die Potenzen von s_1, so soll s_1^n die erste sein, welche zu K gehört; s_1^n kann den Werth 1 haben. Jetzt transformiren wir s_1 durch alle Substitutionen von J und erhalten dadurch die Reihe $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$; dann wird auch keine von diesen K angehören, weil aus $i^{-1} s_1 i = s_\varkappa = k_\alpha$ folgen würde $i k_\alpha i^{-1} = s_1$. Das ist aber unmöglich, weil K mit den Substitutionen von J permutabel ist. Weil ferner

$$i^{-1} s_1^\alpha i = i^{-1} s_1 i \,.\, i^{-1} s_1^{\alpha-1} i = \cdots = s_k^\alpha$$

ist, so folgt, dass auch bei diesen Substitutionen die n^{te} Potenz die erste in K auftretende ist. Die Gruppe $(K, s_1, \ldots s_\lambda)$ wird nun K enthalten und ausserdem noch andere Substitutionen, in J enthalten sein und mit den Substitutionen von J permutabel werden. Das letztere folgt daraus, dass die Transformirten von $s_1, \ldots s_\lambda$ dieselbe Reihe wieder erzeugen. Es muss also, weil es zwischen J und K keine Gruppen giebt, $(K, s_1, \ldots s_\lambda) = J$ sein, oder es ist jede Substitution i

von der Form $k_\alpha s_1^{m_1} s_2^{m_2} \ldots s_\lambda^{m_\lambda}$, wobei $m = 0, 1, \ldots n-1$ sein kann. Gesetzt nun, n wäre keine Primzahl und p ein Primfactor von n, so wird die Gruppe $(K, s_1^p, s_2^p, \ldots s_\lambda^p)$ gleichfalls K enthalten, in J enthalten sein und mit den Permutationen von J permutabel werden, da $i^{-1} s_\varkappa^{\alpha p} i = s_\mu^{\alpha p}$ wird. Es muss also auch die neue Gruppe mit J zusammenfallen. Bedenkt man ferner, dass jede Substitution gleich viele Cyclen von entsprechend gleicher Gliederzahl mit ihren Transformirten hat, und dass s_1^p, s_2^p, $\ldots$ s_λ^p die Transformirten von einer unter ihnen sind, so ergiebt sich der Lehrsatz:

Jede Gruppe der Reihe von G ist aus der nächst kleineren durch Hinzufügung einer Anzahl von Substitutionen ableitbar, welche von gleicher Ordnung sind, gleich viele Cyclen von entsprechend gleicher Gliederzahl enthalten und bei denen eine Primzahlpotenz die erste ist, die zur nächst kleineren Gruppe gehört.

Für die letzte Gruppe der Reihe ergiebt sich der Zusatz:

Die letzte Gruppe einer Reihe wird durch eine Anzahl von Substitutionen von Primzahlordnung gebildet, die einander ähnlich sind.

Genau dieselben Betrachtungen führen zu gleichen Resultaten, wenn es sich um die Gruppen der Hauptreihe handelt, sobald man die Substitution s_1 nicht nur durch alle Substitutionen der vorhergehenden Hauptgruppe, sondern der Anfangsgruppe G transformirt.

§. 9.

Bekanntlich besteht das Criterium für die Auflösbarkeit einer Gleichung durch Adjunction von Wurzeln darin, dass die Gruppe derselben als Factoren der Zusammensetzung nur Primzahlen besitzt. Mit Hülfe der bisher erhaltenen Resultate können wir dieses Criterium leicht in die von *Galois* und in die von Herrn *Jordan* gegebene Form bringen.

Unter der Voraussetzung nämlich, dass alle Factoren der Zusammensetzung nur Primzahlen seien, zeigt der Lehrsatz §. 8, dass man durch Hinzufügung einer einzigen Substitution von jeder Gruppe zur nächst höheren gelangen kann, und dass, wenn umgekehrt dies letztere der Fall ist, die Factoren Primzahlen sein müssen. Man gelangt also zu dem *Galois*schen Criterium:

Lehrsatz 1. *Damit eine Gleichung durch Wurzeln lösbar sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass ihre Gruppe aus einer Reihe von Substitutionen* 1, s, t, $\ldots$ k, i, h, g *abgeleitet werden kann, welche so beschaffen*

sind, dass 1^0. *jede mit der aus den vorhergehenden Substitutionen gebildeten Gruppe permutabel ist;* 2^0. *dass die niedrigste Potenz jeder neuen Substitution, welche schon in der vorhergehenden Gruppe enthalten ist, von Primzahlgrade sei.*

Im vorliegenden Falle sind ferner die Substitutionen einer jeden Gruppe J bis auf Substitutionen der Gruppe K mit einander vertauschbar. Denn es ist $J = Ks^\alpha$, $[\alpha = 0, 1, \ldots p-1]$, und es wird daher

$$i_1 i_2 = k_1 s^\alpha k_2 s^\beta = k_2 (k_2^{-1} k_1) s^\beta . s^{\alpha-\beta} k_2 s^\beta = k_2 s^\beta . k_3 s^{\alpha-\beta} k_2 s^\beta .$$

Die letzte Umformung folgt daraus, dass s mit K permutabel, also $s^{-1} k_\alpha s = k_\beta$ ist. Dann folgt weiter:

$$i_1 i_2 = k_2 s^\beta . k_1 (k_1^{-1} k_3) s^{\alpha-\beta} k_2 s^\beta = k_2 s^\beta k_1 s^{\alpha-\beta} . k_4 s^\beta = k_2 s^\beta . k_1 s^\alpha . k' = i_2 i_1 k' .$$

Dieser Satz gilt aber nicht nur für die Gruppen der Reihe von G, sondern auch für die der Hauptreihe. Denn wenn auf J die Zwischengruppen J_1, J_2, $\ldots$ J_ν; J_{12}, $\ldots$; $\ldots$ folgen, so würden i_1 und i_2 bis auf Substitutionen von J_1, aber auch bis auf solche von J_2, $\ldots$ J_ν vertauschbar sein. Die diesen Zwischengruppen gemeinsamen sind aber die Substitutionen der nächsten Hauptgruppe K. Damit ist der Beweis für die Nothwendigkeit jener Eigenschaft geliefert; dass sie hinreichend sei, erkennt man folgendermassen.

Es sei $G, H, J, K, 1$ die Hauptreihe von G. Wir wählen aus K eine Substitution k_1 und, wenn K ausser den Potenzen von k_1 noch andere Substitutionen enthält, eine zweite k_2 derart, dass die niedrigste ihrer Potenzen welche in der Form k_1^α (oder 1) erscheint, von Primzahlgrade sei. Der Voraussetzung gemäss ist $k_1 k_2 = k_2 k_1$, da die folgende Gruppe 1 ist. In gleicher Weise wählen wir k_3, $\ldots$ k_l so, dass dieselben die Hauptgruppe K bilden, dass jede mit der Gruppe der vorhergehenden permutabel ist, u. s. w. Dann kann man ebenso durch die Substitutionen i_1, i_2, $\ldots$; h_1, h_2, $\ldots$; $\ldots$ zu J, H, $\ldots$ G fortschreiten, derart dass die Substitutionen, welche G constituiren, dem ersten Lehrsatze entsprechen. Damit gelangen wir also zu der *Jordan*schen Ausdrucksweise des obigen Criteriums.

Lehrsatz 2. *Damit eine Gleichung durch Wurzeln lösbar sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass die Substitutionen jeder Gruppe der Hauptreihe bis auf Substitutionen der folgenden Gruppe mit einander vertauschbar seien.*

Zusatz. *Die Substitutionen der letzten Gruppe einer auflösbaren Gleichung sind unter einander vertauschbar.*

Berlin, im April 1873.

Ueber die Vertauschung von Argument und Parameter in den Integralen der linearen Differentialgleichungen *).

(Von Herrn *G. Frobenius.*)

Der Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter in den mit Logarithmen behafteten Integralen der algebraischen Functionen ist bereits von *Abel* (Oeuvres complètes, tom. II., pag. 58) auf die Integrale von Functionen ausgedehnt worden, welche homogene lineare Differentialgleichungen mit rationalen Functionen als Coefficienten befriedigen. *Jacobi* (dieses Journal, Bd. 32, S. 189) hat dem Resultate eine elegantere Form gegeben, und in der neuesten Zeit hat Herr *Fuchs* (dieses Journal, Bd. 76, S. 177) an dasselbe neue Untersuchungen angeknüpft. Beim Studium der *Jacobi*schen Arbeit machte ich die Bemerkung, dass die in seiner etwas complicirten Formel auftretenden Ausdrücke eine sehr einfache Bedeutung haben, dass sie nämlich die bekannten Darstellungen der Integrale gewisser completer linearer Differentialgleichungen durch die Integrale der reducirten sind. Ich will hier jenen Satz in der Form, auf die ich ihn gebracht habe, kurz herleiten, ohne auf die Entwickelungen, mittelst deren es mir gelungen ist, in den Sinn der *Jacobi*schen Formel einzudringen, näher einzugehen, und ohne die in seiner Abhandlung theils bewiesenen, theils vorausgesetzten Relationen zu benutzen.

Wenn man die beiden gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen

$$(1.)\qquad P_x(y) = p_0(x)y + p_1(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + p_\lambda(x)\frac{d^\lambda y}{dx^\lambda} \qquad \text{und}$$

$$(2.)\qquad P'_{x'}(z) = q_0(x')z + q_1(x')\frac{dz}{dx'} + \cdots + q_\lambda(x')\frac{d^\lambda z}{dx'^\lambda}$$

vollständig integriren kann, so kann man auch das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(3.)\qquad P_x P'_{x'}(w) = 0$$

angeben. Bilden nämlich $y_1, y_2, \ldots y_\lambda$ ein vollständiges System von einander unabhängiger Integrale der Differentialgleichung (1.), und sind $f'_1, f'_2, \ldots f'_\lambda$ willkürliche Functionen von x', so ist $f'_1 y_1 + f'_2 y_2 + \cdots + f'_\lambda y_\lambda$ ihr allgemeines Integral, und daher genügt w der Differentialgleichung

$$(4.)\qquad P_{x'}(w) = f'_1 y_1 + f'_2 y_2 + \cdots + f'_\lambda y_\lambda .$$

*) Diese Abhandlung erschien zuerst als Gelegenheitsschrift am 31. Oct. 1873 zur Feier des fünfzigjährigen Jubiläums des Herrn Director *Bonnell.*

Ist $\zeta'_\varkappa$ eine Function von x' allein, welche die Differentialgleichung $P'_{x'}(z) = f'_\varkappa$ befriedigt, also, ebenso wie $f'_\varkappa$, eine willkürliche Function von x', so ist $\zeta'_1 y_1 + \zeta'_2 y_2 + \cdots + \zeta'_\lambda y_\lambda$ ein particuläres Integral der Differentialgleichung (4.), da wir annehmen können, dass $y_1, y_2, \ldots y_\lambda$ die Variable x' nicht enthalten. Wenn also $z'_1, z'_2, \ldots z'_\lambda$ von einander unabhängige Integrale der Differentialgleichung $P'_{x'}(z) = 0$ und $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda$ willkürliche Functionen von x sind, so ist

$$(5.) \qquad w = \zeta'_1 y_1 + \cdots + \zeta'_\lambda y_\lambda + \eta_1 z'_1 + \cdots + \eta_\lambda z'_\lambda$$

das allgemeine 2λ willkürliche Functionen enthaltende Integral von (4.) und folglich auch von der partiellen Differentialgleichung (3.).

Wenn $p_0(x), p_1(x), \ldots p_\lambda(x)$ ganze Functionen von x sind, so kann man

$$P_x\left(\frac{1}{x - x'}\right),$$

falls dem absoluten Betrage nach $x' < x$ ist, in eine nach ganzen positiven Potenzen von x' fortschreitende Reihe entwickeln, die positive Potenzen von x nur in endlicher, negative aber in unendlicher Anzahl enthält. Ist

$$\Sigma C_{\alpha\beta} x^\alpha x'^\beta$$

das Aggregat der Glieder mit positiven Exponenten, so kommt $C_{\alpha\beta}$ in dem Gliede

$$P_x\left(\frac{x'^\beta}{x^{\beta+1}}\right)$$

vor und ist gleich dem Coefficienten von x^α in

$$P_x\left(\frac{1}{x^{\beta+1}}\right).$$

Beschreibt also ξ einen den Nullpunkt der Constructionsebene im positiven Sinne einfach umwindenden Kreis, so ist

$$(6.) \qquad C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i} \int P_\xi\left(\frac{1}{\xi^{\beta+1}}\right) \frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}}.$$

Das Aggregat der Potenzen von x mit negativen Exponenten ist der Coefficient von ξ^{-1} in der Entwickelung des Ausdrucks

$$\frac{1}{x - \xi} P_\xi\left(\frac{1}{\xi - x}\right)$$

nach Potenzen von ξ, falls dem absoluten Werthe nach $x > \xi > x'$ angenommen wird. Jenes Aggregat ist also gleich

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{x - \xi} P_\xi\left(\frac{1}{\xi - x'}\right) d\xi.$$

Der Werth dieses Integrals lässt sich leicht ermitteln. Es ist nämlich eine Summe von $\lambda + 1$ Gliedern von der Form

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{p_\varkappa(\xi)}{x - \xi} \frac{d^\varkappa}{d\xi^\varkappa}\left(\frac{1}{\xi - x'}\right) d\xi = \frac{(-1)^\varkappa}{2\pi i} \int \frac{p_\varkappa(\xi)}{x - \xi} \frac{d^\varkappa}{dx'^\varkappa}\left(\frac{1}{\xi - x'}\right) d\xi.$$

Nun ist aber, da x ausserhalb und x' innerhalb des von ξ beschriebenen Kreises liegt,

$$\frac{p_\varkappa(x')}{x-x'} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{p_\varkappa(\xi)}{x-\xi}\,\frac{d\xi}{\xi-x'}$$

und daher

$$\frac{d^\varkappa}{dx'^\varkappa}\Big(\frac{p_\varkappa(x')}{x-x'}\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{p_\varkappa(\xi)}{x-\xi}\,\frac{d^\varkappa}{dx'^\varkappa}\Big(\frac{1}{\xi-x'}\Big)d\xi.$$

Setzt man also

$$(7.)\qquad P'_{x'}(z) = -p_0(x')z + \frac{d(p_1(x')z)}{dx'} - \cdots + (-1)^{\lambda-1}\frac{d^\lambda(p_\lambda(x')z)}{dx'^\lambda},$$

so ist das zu berechnende Integral gleich

$$P'_{x'}\Big(\frac{1}{x'-x}\Big).$$

Wir gelangen so zu der von *Jacobi* gefundenen Formel

$$(8.)\qquad P_x\Big(\frac{1}{x-x'}\Big) - P'_{x'}\Big(\frac{1}{x'-x}\Big) = \Sigma C_{\alpha\beta}x^\alpha x'^\beta.$$

Wenn man bei der Entwickelung der linken Seite dieser Gleichung $x' > x$ annimmt, so erhält man für $C_{\alpha\beta}$ noch die Bestimmung

$$(9.)\qquad C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i}\int P'_\xi\Big(\frac{1}{\xi^{\alpha+1}}\Big)\frac{d\xi}{\xi^{\beta+1}}.$$

Wir nehmen jetzt an, dass die Functionen

$$F(x, x') \quad \text{und} \quad F'(x', x)$$

den vollständigen linearen Differentialgleichungen

$$P_x(y) = \frac{1}{x-x'} \quad \text{und} \quad P'_{x'}(z) = \frac{1}{x'-x}$$

genügen. Dann ist

$$u = F(x, x') - F'(x', x)$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$P_xP'_{x'}(u) = P'_{x'}\Big(\frac{1}{x-x'}\Big) - P_x\Big(\frac{1}{x'-x}\Big).$$

Sind ferner

$$F_\alpha(x) \quad \text{und} \quad F'_\beta(x')$$

Integrale der Differentialgleichungen

$$P_x(y) = x^\alpha \quad \text{und} \quad P'_{x'}(z) = x'^\beta,$$

so befriedigt die Function

$$v = \Sigma C_{\alpha\beta}F_\alpha(x)F'_\beta(x')$$

die partielle Differentialgleichung

$$P_xP'_{x'}(v) = \Sigma C_{\alpha\beta}x^\alpha x'^\beta.$$

In Folge der Gleichung (8.) ist daher $w = u - v$ eine Lösung der par-

tiellen Differentialgleichung

$$P_x P'_{x'}(w) = 0,$$

und mithin ist

$$F(x, x') - F'(x', x) = \Sigma C_{\alpha\beta} F_\alpha(x) F'_\beta(x') + \zeta_1 y_1 + \cdots + \zeta'_\lambda y_\lambda + \eta_1 z'_1 + \cdots + \eta_\lambda z'_\lambda.$$

Es sei nun über die in den Functionen $F_\alpha(x)$ und $F'_\beta(x')$ enthaltenen willkürlichen Constanten eine bestimmte Verfügung getroffen. Dann können, da

$$F(x, x') - \zeta_1 y_1 - \cdots - \zeta_\alpha y_\lambda \quad \text{und} \quad F'(x', x) + \eta_1 z'_1 + \cdots + \eta_\lambda z'_\lambda$$

die allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen

$$P_x(y) = \frac{1}{x - x'} \quad \text{und} \quad P'_{x'}(z) = \frac{1}{x' - x}$$

sind, die Functionen $F(x, x')$ und $F'(x', x)$ stets so gewählt werden, dass

$$(10.) \qquad F(x, x') - F'(x', x) = \Sigma C_{\alpha\beta} F_\alpha(x) F'_\beta(x')$$

wird. Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass, wenn $F(x, x')$ und $F'(x', x)$ eindeutig definirt sind, die Functionen $F_\alpha(x)$ und $F'_\beta(x')$ stets so gewählt werden können, dass die Gleichung (10.) erfüllt wird. Da nun eine Gleichung zwischen zwei Ausdrücken, die vieldeutige Grössen enthalten, wenn sie vollkommen ist, keinen anderen Sinn haben kann, als dass jedem Werthe der linken Seite ein Werth der rechten, und umgekehrt, entspricht, so haben wir den Satz bewiesen:

Wenn

$$P_x(y) = p_0(x) y + p_1(x) \frac{dy}{dx} + \cdots + p_\lambda(x) \frac{d^\lambda y}{dx^\lambda}$$

und

$$P'_{x'}(z) = -p_0(x') z + \frac{d(p_1(x') z)}{dx'} - \cdots + (-1)^{\lambda-1} \frac{d^\lambda (p_\lambda(x') z)}{dx'^\lambda}$$

ist, und wenn die Functionen

$$F(x, x'), \qquad F'(x', x), \qquad F_\alpha(x), \qquad F'_\beta(x')$$

die Differentialgleichungen

$$P_x(y) = \frac{1}{x - x'}, \quad P'_{x'}(z) = \frac{1}{x' - x}, \quad P_x(y) = x^\alpha, \quad P'_{x'}(z) = x'^\beta$$

befriedigen, so ist

$$F(x, x') - F'(x', x) = \Sigma C_{\alpha\beta} F_\alpha(x) F'_\beta(x'),$$

wo die Summationsbuchstaben der endlichen Doppelsumme von Null an alle positiven Werthe durchlaufen, für welche

$$C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i} \int P_\xi\left(\frac{1}{\xi^{\beta+1}}\right) \frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int P'_\xi\left(\frac{1}{\xi^{\alpha+1}}\right) \frac{d\xi}{\xi^{\beta+1}}$$

einen nicht verschwindenden Werth hat.

Berlin, im Mai 1873.

Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i./E.)

1. Die Polarentheorie der Flächen n^{ter} Ordnung hat bislang nur Polaren von einzelnen Punkten und von Punktengruppen in Betracht gezogen. Bezüglich einer solchen Fläche F^n entspricht aber auch jeder Fläche k^{ter} Classe für $k < n$ eine im Allgemeinen völlig bestimmte Fläche $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung F^{n-k}; und zwar wird F^{n-k} identisch mit der Polare einer Gruppe von k Punkten, wenn die Fläche k^{ter} Classe sich auf diese Punkte reducirt. Die bisherige Polarentheorie erscheint demnach als specieller Fall einer allgemeineren Theorie.

Ein besonderes Interesse beanspruchen in dieser verallgemeinerten Polarentheorie solche Flächen k^{ter} Classe, als deren Polare bezüglich der F^n jede beliebige Fläche $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung betrachtet werden kann; ich nenne dieselben „*apolar* zu der F^n“, weil ihnen keine *bestimmte* Polare zukommt. Mit der Fläche n^{ter} Ordnung sind zugleich alle zu ihr apolaren Flächen gegeben; umgekehrt aber genügt eine gewisse Anzahl dieser Flächen zur Bestimmung der F^n. Die Beziehungen dieser apolaren Flächen zu einander und zu der F^n sind unabhängig von der Wahl des Coordinatensystemes, auf welches sie bezogen sind.

2. Die erweiterte Polarentheorie verschafft uns neue Hülfsmittel zur Lösung wichtiger algebraischer Probleme, von denen hier eines hervorgehoben werden soll. Bekanntlich hat *Sylvester* gefunden und *Clebsch**) zuerst bewiesen, dass eine quaternäre cubische Form auf eine einzige Art als Summe von fünf Cuben dargestellt werden kann; sehr bemerkenswerthe Eigenschaften der cubischen Flächen, namentlich die Lehre von dem ihrer Kernfläche eingeschriebenen Pentaëder, stehen mit diesem Theorem im innigsten Zusammenhange. Für die Theorie der Flächen n^{ten} Grades überhaupt dürfte nicht minder bedeutsam die Beantwortung folgender Frage sein:

Welches ist die kleinste Anzahl von n^{ten} Potenzen linearer Formen, als deren Summe die allgemeine quaternäre Form n^{ten} Grades dargestellt werden kann?

*) Dieses Journal Bd. 59 S. 193.

Unsere Darstellung der Polarentheorie wird uns wiederholt auf diese Frage zurückführen. Hier sei nur bemerkt, dass z. B. die quaternäre biquadratische Form, obgleich sie nur 35 Constante zählt, im Allgemeinen nicht als Summe von neun Biquadraten, welche doch eine Constante mehr enthalten, darstellbar ist.

Am Einfachsten und Anschaulichsten lässt sich die erweiterte Polarentheorie entwickeln, wenn nicht eine Fläche n^{ter} Ordnung sondern eine Fläche n^{ter} Classe als Directrix angenommen wird. Indem wir diese Directrix als n^{te} Nullfläche eines Massensystemes auffassen, erlangen wir den Vortheil, uns auf eine frühere Arbeit über „Trägheits- und höhere Momente eines Massensystemes“ *) beziehen zu können, in welcher über die Polaren von Ebenengruppen das Nöthige bereits gesagt ist.

§. 1. Repräsentation quaternärer Formen durch die Momente von Massensytemen.

3. Die quaternäre Form n^{ten} Grades mit den Variablen α, β, γ, p wird dargestellt durch die Summe:

$$\sum_{q,r,s,t} \frac{n!}{q!r!s!t!} \cdot A_{q,r,s,t} \cdot \alpha^q \beta^r \gamma^s p^t,$$

welche auszudehnen ist über alle positiven, ganzzahligen Werthe von q, r, s, t, für welche $q+r+s+t=n$ ist. Die Anzahl der willkürlichen Coefficienten $A_{q,r,s,t}$ ist:

$$\nu = \frac{(n+1).(n+2).(n+3)}{1.2.3}.$$

Dieselbe Form kann aber auch auf unendlich viele Arten als Summe der n^{ten} Potenzen von ν linearen quaternären Formen dargestellt werden; und zwar sind diese linearen Functionen abgesehen von constanten Factoren willkürlich annehmbar. Denn setzen wir für alle Werthe von α, β, γ, p:

$$\sum_{q,r,s,t} \frac{n!}{q!r!s!t!} \cdot A_{q,r,s,t} \cdot \alpha^q \beta^r \gamma^s p^t = \sum_{i=1}^{i=\nu} m_i (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^n,$$

indem wir mit x_i, y_i, z_i willkürlich angenommene Constante und mit m_i unbekannte Factoren bezeichnen, so ergeben sich für diese ν Factoren ν lineare Gleichungen von der Form:

$$m_1 x_1^q y_1^r z_1^s + m_2 x_2^q y_2^r z_2^s + \cdots + m_\nu x_\nu^q y_\nu^r z_\nu^s = (-1)^t . A_{q,r,s,t}$$

(worin $q+r+s+t=n$ ist); und aus diesen Gleichungen können die ν Factoren

*) Dieses Journal Bd. 72 S. 293—326.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

m_i eindeutig berechnet werden, wenn die Determinante:

$$\Sigma \pm x_1^n . x_2^{n-1} y_2 . x_3^{n-2} z_3 \ldots x_i^q y_i^r z_i^s \ldots y_{\nu-2} . z_{\nu-1} . 1$$

der links stehenden Functionen von Null verschieden ist. Diese Determinante aber verschwindet nur dann, wenn die willkürlichen Constanten x_i, y_i, z_i für $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ einer Gleichung n^{ten} Grades $F(x_i, y_i, z_i) = 0$ genügen, d. h. wenn ν Punkte, deren Parallelcoordinaten den Grössen x_i, y_i, z_i proportional sind, auf einer Fläche n^{ter} Ordnung liegen, was leicht zu vermeiden ist.

4. Ohne die Allgemeinheit unserer Untersuchung zu beeinträchtigen, dürfen wir zwischen den Variablen α, β, γ der quaternären Form die Relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

annehmen; denn dieselbe wird z. B. in der obigen Gleichung:

$$\sum_{q,r,s,t} \frac{n!}{q!r!s!t!} \cdot A_{q,r,s,t} . \alpha^q \beta^r \gamma^s p^t = \sum_{i=1}^{i=\nu} m_i (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^n$$

sofort wieder beseitigt, indem wir die Gleichung mit der unbestimmten Grösse δ^n multipliciren und hernach $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$, $p\delta$ durch resp. α, β, γ, p ersetzen. Wegen obiger Relation aber dürfen wir α, β, γ, p als Coordinaten einer Ebene bezüglich eines rechtwinkligen Coordinatensystemes auffassen und die Gleichung:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0$$

als Normalgleichung der Ebene; p bezeichnet dann die Länge des vom Coordinatenanfang auf die Ebene gefällten Perpendikels, und α, β, γ sind die Cosinus der Winkel, welche dieses Perpendikel mit den resp. Axen der positiven x, y, z einschliesst. Fassen wir zugleich x_i, y_i, z_i auf als die Coordinaten eines Punktes, und m_i als eine diesem Punkte beizulegende Masse, so bedeutet:

$$m_i (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^n = m_i r_i^n$$

das n^{te} Moment dieser Punktmasse in Bezug auf jene Ebene $(\alpha, \beta, \gamma, p)$; denn $(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p) = r_i$ ist der Abstand des Punktes von der Ebene. Wir können demnach den vorhin (3.) bewiesenen Satz wie folgt aussprechen:

Eine quaternäre Form n^{ten} Grades kann auf unendlich viele Arten durch die n^{ten} Momente eines Systemes von $\nu = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$ Massenpunkten bezüglich aller Ebenen des Raumes repräsentirt werden. Die ν Punkte dürfen nicht auf einer Fläche n^{ter} Ordnung, können aber sonst ganz willkürlich an-

genommen werden; durch ihre Lage sind die ihnen beizulegenden Massen eindeutig bestimmt.

5. Der Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} m_i(\alpha x_i+\beta y_i+\gamma z_i-p)^n = 0$$

genügen die Coordinaten $(\alpha, \beta, \gamma, p)$ aller Ebenen, in Bezug auf welche das n^{te} Moment der ν Massen m_i den Werth Null hat, d. h. diese Gleichung repräsentirt die n^{te} Nullfläche des ν-punktigen Massensystemes. Weil aber die Massen m_i so bestimmt werden können, dass die Summen $\sum_i m_i x_i^q y_i^r z_i^s$ (für $q+r+s \leqq n$) beliebigen ν von einander unabhängigen Constanten $A_{q,r,s,t}$ gleich werden, und weil somit die linke Seite obiger Gleichung jede willkürlich gegebene quaternäre Form n^{ten} Grades darstellen kann, so folgt:

Jede beliebig gegebene Fläche n^{ter} Classe kann als die n^{te} Nullfläche eines ν-punktigen Massensystemes aufgefasst werden.

Zugleich leuchtet ein, dass die oben (2.) aufgeworfene Frage identisch ist mit der folgenden:

Wie viele Massenpunkte genügen, um ein beliebig gegebenes Massensystem zu ersetzen hinsichtlich seiner n^{ten} Momente?

§. 2. Moment eines Massensystemes bezüglich einer Fläche n^{ter} Ordnung F^n.

6. Wird von jedem Massenpunkte $m_i(x_i, y_i, z_i)$ eines Massensystemes in irgend einer fest angenommenen Richtung eine Secante an die F^n gezogen, und sind $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ die Abstände der n Schnittpunkte vom Punkte m_i, so soll die über alle Massen m_i des Systemes ausgedehnte Summe

$$\sum_i m_i . \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \ldots \varrho_n$$

im engeren Sinne das *Moment des Massensystemes in Bezug auf die Fläche* F^n (für die gegebene Richtung) genannt werden. Seien a, b, c die Cosinus der von den Secanten mit den Coordinatenaxen gebildeten Winkel und sei:

$$F^n(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der Fläche n^{ter} Ordnung F^n; dann sind die Abstände ϱ_1, $\varrho_2, \ldots \varrho_n$ die n Wurzeln der Gleichung:

$$F^n(a\varrho+x_i, b\varrho+y_i, c\varrho+z_i) = 0.$$

Wir entwickeln die linke Seite dieser Gleichung nach fallenden Potenzen von ϱ und erhalten für das erste und letzte Glied dieser Entwickelung die Ausdrücke:

$$f(a\varrho, b\varrho, c\varrho) = \varrho^n . f(a, b, c) \quad \text{und} \quad F^n(x_i, y_i, z_i),$$

wenn wir mit $f(x, y, z)$ die Summe derjenigen Glieder von $F^n(x, y, z)$ bezeichnen, welche die Coordinaten x, y, z in der n^{ten} Dimension enthalten. Das Product $\varrho_1\varrho_2\varrho_3\ldots\varrho_n$ der n Wurzeln wird folglich gleich:

$$(-1)^n\cdot\frac{F^n(x_i, y_i, z_i)}{f(a, b, c)},$$

und für das Moment des Massensystemes bezüglich der Fläche F^n ergiebt sich die Gleichung:

$$\sum_i m_i\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n = \frac{(-1)^n}{f(a, b, c)}\cdot\sum_i m_i F^n(x_i, y_i, z_i).$$

Ist dieses Moment Null, so verschwindet auch $\Sigma m_i . F^n(x_i, y_i, z_i)$; d. h.:

Wenn das Moment eines Massensystemes bezüglich einer Fläche n^{ter} Ordnung für irgend eine Richtung (a, b, c) den Werth Null hat, so verschwindet es auch für jede andere Richtung.

7. Bei den Anwendungen können wir von dem Factor $\frac{(-1)^n}{f(a, b, c)}$, dessen Werth von der Richtung der Secanten abhängt, absehen. Wir wollen deshalb die zu $\sum_i m_i . \varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n$ proportionale Summe $\sum_i m_i . F^n(x_i, y_i, z_i)$ als *Moment des Massensystemes bezüglich der Fläche F^n im weiteren Sinne des Wortes* bezeichnen. Wenn F^n in eine Gruppe von n Ebenen zerfällt, so ist dieses Moment demjenigen proportional, welches wir früher *) als „Moment des Systems in Bezug auf eine Gruppe von n Ebenen“ definirt haben; es wird demselben gleich, wenn die Function $F^n(x, y, z)$ das Product der Normalformen jener n Ebenen darstellt.

8. Wir nennen zwei Massensysteme „äquivalent hinsichtlich ihrer n^{ten} Momente“, wenn in Bezug auf jede Ebene des Raumes ihre n^{ten} Momente einander gleich sind. Die Differenz von zwei äquivalenten Massensystemen ist „indifferent“ hinsichtlich ihrer n^{ten} Momente, d. h. sie ist ein Massensystem, dessen n^{te} und niedrigere Momente für jede Ebene des Raumes Null sind. Weil die über ein indifferentes System ausgedehnte Summe:

$$\Sigma m(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^n$$

für alle Werthe von α, β, γ, p verschwindet, so werden auch alle Summen von der Form

$$\Sigma m x^q y^r z^s \quad \text{für} \quad q+r+s\leqq n$$

---

*) Dieses Journal Bd. 72 S. 306.

Null, und folglich verschwindet auch die $\Sigma m . F^n(x, y, z)$, welche aus solchen einfacheren Summen zusammengesetzt ist. Also:

Wenn ein Massensystem indifferent ist hinsichtlich seiner n^{ten} Momente, so ist sein Moment in Bezug auf jede beliebige Fläche n^{ter} Ordnung gleich Null.

Ohne Weiteres folgt hieraus, weil die Differenz von zwei äquivalenten Massensystemen indifferent ist:

Wenn zwei Massensysteme äquivalent sind hinsichtlich ihrer n^{ten} Momente, so sind bezüglich jeder Fläche n^{ter} oder niedrigerer Ordnung ihre Momente einander gleich.

§. 3. Die Polaren von Flächen k^{ter} Ordnung bezüglich einer Fläche n^{ter} Classe.

9. Das Moment eines Massensystemes bezüglich einer Fläche n^{ter} Ordnung, welche aus einer gegebenen Fläche k^{ter} Ordnung F^k und einer $(n-k)$mal zu zählenden Ebene $(\alpha, \beta, \gamma, p)$ besteht, wird ausgedrückt durch die Summe:

$$\sum_i m_i F^k(x_i, y_i, z_i) . (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^{n-k},$$

wenn $F^k(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche F^k ist. Für verschiedene Lagen der Ebene erhalten wir im Allgemeinen verschiedene Werthe für diese Summe; dieselbe ist eine quaternäre Form $(n-k)^{\text{ten}}$ Grades von α, β, γ, p und wird u. A. durch die $(n-k)^{\text{ten}}$ Momente eines Massensystemes repräsentirt, dessen Massen M_i in den Punkten (x_i, y_i, z_i) concentrirt sind und mittelst der Gleichungen:

$$M_i = m_i . F^k(x_i, y_i, z_i) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

berechnet werden können.

Die $(n-k)^{\text{te}}$ Nullfläche dieses neuen Massensystemes, also diejenige Fläche $(n-k)^{\text{ter}}$ Classe, welche durch die Gleichung:

$$\sum_i m_i . F^k(x_i, y_i, z_i) . (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^n = 0$$

repräsentirt wird, soll nun *Polare der Fläche k^{ter} Ordnung F^k bezüglich der durch die Gleichung:*

$$\sum_i m_i (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^n = 0$$

repräsentirten Fläche n^{ter} Classe genannt werden. Da diese letztere Fläche als n^{te} Nullfläche eines Massensystemes aufzufassen ist, so ist die Polare von F^k geometrisch definirt durch den Satz:

Ergänzt man eine Fläche k^{ter} Ordnung durch $(n-k)$malige Hinzufügung einer Berührungsebene ihrer Polare zu einer Fläche n^{ter} Ordnung, so ist bezüglich dieser letzteren das Moment des Massensystemes Null.

Wenn die Fläche F^k in k Ebenen zerfällt, so gehen diese Definitionen über in die früheren Definitionen *) der Polare einer Ebenengruppe bezüglich der n^{ten} Nullfläche eines Massensystemes.

10. Wenn die Gleichung der Fläche n^{ter} Classe gegeben ist in der gebräuchlichen Form:

$$\sum_{q,r,s,t} \frac{n!}{q!r!s!t!} \cdot A_{q,r,s,t} \cdot \alpha^q \beta^r \gamma^s p^t = 0 \quad (\text{für } q+r+s+t=n)$$

und wenn zugleich die Function F^k entwickelt ist in die Reihe:

$$F^k(x, y, z) = \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu} B_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu} \cdot x^\varkappa y^\lambda z^\mu \quad (\text{für } \varkappa+\lambda+\mu+\nu=k),$$

so wird die Polare der Fläche F^k bezüglich der Fläche n^{ter} Classe repräsentirt durch die Gleichung:

$$\sum_{\pi,\varrho,\sigma,\tau} \frac{(n-k)!}{\pi!\varrho!\sigma!\tau!} \cdot C_{\pi,\varrho,\sigma,\tau} \cdot \alpha^\pi \beta^\varrho \gamma^\sigma p^\tau = 0 \quad (\text{für } \pi+\varrho+\sigma+\tau=n-k),$$

wenn man deren Coefficienten $C_{\pi,\varrho,\sigma,\tau}$ berechnet mittelst der Formel:

$$C_{\pi,\varrho,\sigma,\tau} = \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu} (-1)^\nu \cdot A_{\pi+\varkappa,\varrho+\lambda,\sigma+\mu,\tau+\nu} \cdot B_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu}.$$

Man überzeugt sich leicht hiervon, wenn man diese Gleichungen der Fläche n^{ter} Classe und der Polare von F^k identificirt mit den vorhin (9.) aufgestellten.

11. *Beschreibt eine Fläche k^{ter} Ordnung einen Flächenbüschel, so beschreibt zugleich ihre Polare eine zu diesem Büschel projectivische Flächenschaar.*

Seien nämlich $F^k(x, y, z) = 0$ und $G^k(x, y, z) = 0$ die Gleichungen von zwei beliebigen Flächen k^{ter} Ordnung, also auch:

$$F^k(x, y, z) - \lambda \cdot G^k(x, y, z) = 0 \quad \text{für } \lambda = \text{Const.}$$

die Gleichung von irgend einer Fläche des durch jene beiden bestimmten Flächenbüschels k^{ter} Ordnung, so repräsentirt die Gleichung:

$$\sum_i m_i \{F^k(x_i, y_i, z_i) - \lambda \cdot G^k(x_i, y_i, z_i)\} (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^{n-k} = 0$$

die Polare dieser dritten Fläche. Werden nun der Constanten λ nach und nach alle möglichen Zahlwerthe beigelegt, so erhält man, den Flächen des Büschels als Polaren eindeutig entsprechend, die sämmtlichen Flächen einer Schaar, welche den gemeinschaftlichen Berührungsebenen der Polaren von F^k und G^k eingeschrieben sind.

Eine Ausnahme erleidet der Satz, wenn die Flächen F^k und G^k und

---

*) Dieses Journal Bd. 72 S. 307.

folglich auch alle übrigen Flächen des Büschels eine und dieselbe Polare haben. In diesem Falle giebt es eine Fläche des Büschels

$$F^k(x, y, z) - \lambda G^k(x, y, z) = 0,$$

für welche die Gleichung:

$$\sum_i m_i \{F^k(x_i, y_i, z_i) - \lambda . G^k(x_i, y_i, z_i)\}(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^{n-k} = 0$$

der Polare identisch erfüllt ist, welche Werthe auch den Ebenencoordinaten α, β, γ, p beigelegt werden; und zwar findet man den ihr zugehörigen Werth der Constanten λ gleich

$$\frac{\sum m_i . F^k(x_i, y_i, z_i) . (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^{n-k}}{\sum_i m_i . G^k(x_i, y_i, z_i) . (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^{n-k}},$$

wenn in diesen Quotienten für α, β, γ, p die Coordinaten irgend einer, jene gemeinschaftliche Polare nicht berührenden Ebene eingesetzt werden.

§. 4. Apolare Flächen.

12. Wenn eine Fläche k^{ter} Ordnung F^k so angenommen wird, dass der Gleichung ihrer Polare *alle* Werthe der Ebenencoordinaten α, β, γ, p genügen, so hat sie keine bestimmte Polare, vielmehr kann jede beliebige Fläche $(n-k)^{\text{ter}}$ Classe als ihre Polare betrachtet werden. Wir sagen in diesem Falle, die Fläche k^{ter} Ordnung sei *apolar zu der Fläche n^{ter} Classe*

$$\sum_i m_i . (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^n = 0,$$

und wollen diesen Begriff der apolaren Flächen auch auf den Fall $k = n$ ausdehnen.

Die Gleichung $F^k(x, y, z) = 0$ repräsentirt nur dann eine apolare Fläche k^{ter} Ordnung, wenn ihre $\frac{(k+1).(k+2).(k+3)}{1.2.3} - 1 = N(k)$*) unabhängigen

---

*) Wir machen hier und in der Folge Gebrauch von den in einer früheren Arbeit über „Algebraische Flächen“ etc. (Mathematische Annalen Bd. II. p. 475—503) enthaltenen Symbolen und Formeln, und bezeichnen:
mit $N(k)$ die Anzahl willkürlich angenommener Punkte, durch die eine F^k bestimmt ist,
mit $N\left(\frac{k}{l}\right) = N(k) - N(k-l) - 1$ die Anzahl willkürlicher Punkte einer F^l, durch welche eine auf F^l liegende $C^{k.l}$ (Schnittlinie der F^l mit einer F^k) bestimmt ist; wobei $N(k-l) = -1$ anzunehmen ist, wenn $k < l$;
mit $N\left(\frac{k}{l, n}\right) = N\left(\frac{k}{n, l}\right) = N\left(\frac{k}{l}\right) - N\left(\frac{k-n}{l}\right) - 1$
die Anzahl der willkürlichen Punkte einer $C^{l.n}$, durch welche eine Gruppe $[k, l, n]$ von

Coefficienten den $\frac{(n-k+1).(n-k+2).(n-k+3)}{1.2.3} = N(n-k)+1$ für sie linearen Bedingungsgleichungen:

$$\sum_i m_i . F^k(x_i, y_i, z_i) . x_i^q y_i^r z_i^s = 0 \quad (\text{worin } q+r+s \leqq n-k)$$

genügen, welche aus der für alle Werthe von α, β, γ, p bestehenden Gleichung:

$$\sum_i m_i . F^k(x_i, y_i, z_i) . (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^{n-k} = 0$$

sich ergeben. Für $n-k \geqq k$ existiren deshalb im Allgemeinen keine apolaren Flächen k^{ter} Ordnung. Jeder willkürlich angenommene Punkt, durch welchen die apolare F^k gehen soll, vermehrt die linearen Bedingungsgleichungen um eine weitere. Daraus folgt:

Durch

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)-(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}{1.2.3} - 1 = N\left(\frac{k}{2k-n}\right)$$

willkürlich angenommene Punkte kann im Allgemeinen eine einzige Fläche k^{ter} Ordnung gelegt werden, welche zu einer gegebenen Fläche n^{ter} Classe apolar ist.

13. Wenn ein beliebiges Massensystem hinsichtlich seiner n^{ten} Momente durch r Massenpunkte ersetzt werden kann, so ist (für $k \leqq n$) jede durch diese r Punkte gehende Fläche k^{ter} Ordnung apolar zu der n^{ten} Nullfläche des Systemes. Durch diese, ohne Weiteres einleuchtende Bemerkung ist die Frage (2.) nach der kleinsten Anzahl von n^{ten} Potenzen linearer Formen, als deren Summe die allgemeine quaternäre Form n^{ten} Grades dargestellt werden kann, in nahen Zusammenhang gebracht mit der Frage nach der gegenseitigen Lage aller zu einer Fläche n^{ter} Classe apolaren Flächen.

Um z. B. einzusehen, dass eine biquadratische quaternäre Form im Allgemeinen nicht durch die Summe von neun Biquadraten dargestellt werden kann, brauchen wir nur zu bemerken, dass zu der vierten Nullfläche eines neunpunktigen Massensystemes eine apolare F^2 existirt, nämlich die durch die neun Massenpunkte gehende Fläche zweiter Ordnung, während zu einer *belie-*

$k.l.n$ Schnittpunkten der $C^{l,n}$ mit einer F^k bestimmt ist; endlich

mit $$N\left(\frac{k}{l,n,r}\right)+1 = N\left(\frac{k}{l,n}\right) - N\left(\frac{k-r}{l,n}\right)$$

die Anzahl willkürlich annehmbarer (oder unabhängiger) Punkte, für welche eine Punktengruppe $[l, n, r]$ bei der Bestimmung einer durch sie hindurchgehenden F^k zu rechnen ist.

bigen Fläche vierter Classe (also auch zu der vierten Nullfläche eines *beliebigen* Massensystemes) im Allgemeinen keine apolare F^2 construirt werden kann. Die neun unabhängigen Constanten einer apolaren F^2 müssen nämlich zehn Bedingungsgleichungen genügen (12.), und damit dieses möglich ist, müssen die Constanten der Fläche vierter Classe *eine* Bedingung erfüllen.

14. Sind $F^k(x, y, z) = 0$ und $F^{n-k}(x, y, z) = 0$ die Gleichungen von zwei Flächen k^{ter} und $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung, von denen die erstere eine apolare ist, so hat das Moment $\sum_i m_i . F^k(x_i, y_i, z_i) . F^{n-k}(x_i, y_i, z_i)$ den Werth Null; denn es zerfällt, wenn $F^{n-k}(x, y, z)$ nach Potenzen von x, y, z entwickelt wird, in Glieder von der Form:

$$a_{q,r,s} . \sum_i m_i . F^k(x_i, y_i, z_i) . x_i^q y_i^r z_i^s \quad (\text{für } q+r+s \leqq n-k),$$

welche (12.) sämmtlich verschwinden. Also:

Das Moment des Massensystemes ist Null bezüglich aller Flächen n^{ter} Ordnung, welche aus einer zur n^{ten} Nullfläche apolaren F^k und einer beliebigen F^{n-k} bestehen;

oder mit anderen Worten:

Jede F^l, welche eine apolare F^k als Theil enthält, ist selbst apolar zu der n^{ten} Nullfläche, wenn $l \leqq n$ ist.

Repräsentiren die Gleichungen $F^k(x, y, z) = 0$ und $G^k(x, y, z) = 0$ zwei apolare Flächen k^{ter} Ordnung, so gilt Dasselbe von der Gleichung $\varkappa . F^k(x, y, z) - \lambda . G^k(x, y, z) = 0$, in welcher $\varkappa$ und λ willkürliche Constanten bezeichnen. Denn die Summe

$$\sum_i m_i \{\varkappa . F^k(x_i, y_i, z_i) - \lambda . G^k(x_i, y_i, z_i)\} (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^{n-k}$$

verschwindet für alle Werthe von α, β, γ, p, $\varkappa$ und λ, weil sie für alle Werthe von α, β, γ, p verschwindet, wenn entweder $\varkappa$ oder λ Null ist. Also:

Zwei apolare Flächen k^{ter} Ordnung ($F^k = 0$ und $G^k = 0$) bestimmen einen Flächenbüschel k^{ter} Ordnung ($\varkappa . F^k - \lambda . G^k = 0$), dessen sämmtliche Flächen zu der n^{ten} Nullfläche des Massensystemes apolar sind.

Ebenso bestimmen drei apolare F^k, die nicht einem und demselben Flächenbüschel angehören, einen *Bündel* von apolaren Flächen k^{ter} Ordnung. Ueberhaupt gehören alle F^k, welche zu einer gegebenen Fläche n^{ter} Classe apolar sind, einem *Flächensysteme* an; d. h. wenn

$$F_0^k = 0, \quad F_1^k = 0, \quad F_2^k = 0, \quad \ldots, \quad F_r^k = 0$$

die Gleichungen von beliebigen $r+1$ dieser apolaren Flächen sind, so repräsentiren

sentirt auch die Gleichung:

$$\lambda_0 . F_0^k + \lambda_1 . F_1^k + \lambda_2 . F_2^k + \cdots + \lambda_r F_r^k = 0,$$

in welcher den Constanten λ_i willkürliche Werthe beigelegt werden können, allemal eine apolare Fläche k^{ter} Ordnung.

15. Wenn keine der $r+1$ Flächen F_0^k, F_1^k, F_2^k, ..., F_r^k dem durch die übrigen r bestimmten Flächensysteme angehört, wenn es also unmöglich ist, den Constanten λ_0, λ_1, λ_2, ..., λ_r solche, wenigstens theilweise von Null verschiedene, Werthe beizulegen, dass die linke Seite der letzten Gleichung für alle Werthe der Coordinaten identisch verschwindet, so repräsentirt diese letzte Gleichung ein Flächensystem von r Dimensionen, d. h. durch r willkürlich angenommene Punkte kann im Allgemeinen eine einzige Fläche dieses Systemes gelegt werden. Weil nun die zu einer Fläche n^{ter} Classe apolaren F^k im Allgemeinen ein Flächensystem von $N\left(\frac{k}{2k-n}\right)$ Dimensionen bilden (12., 14.), so ergiebt sich:

Wenn von den zu einer Fläche n^{ter} Classe apolaren Flächen k^{ter} Ordnung

$$N\left(\frac{k}{2k-n}\right)+1 = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)-(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}{1.2.3}$$

solche gegeben sind, von denen keine dem durch die übrigen bestimmten Flächensysteme angehört, so bestimmen dieselben im Allgemeinen das von den sämmtlichen apolaren F^k gebildete Flächensystem.

Bei speciellen Flächen n^{ter} Classe kann sich übrigens die Anzahl $N(n-k)+1$ der Bedingungsgleichungen (12.), welchen die Constanten aller apolaren Flächen k^{ter} Ordnung unterworfen sind, verringern, und alsdann erleidet obiger Satz eine Ausnahme. So z. B. sind die vier Gleichungen

$$\sum_i m_i x_i F^k(x_i, y_i, z_i) = 0, \quad \sum_i m_i y_i F^k(x_i, y_i, z_i) = 0,$$

$$\sum_i m_i z_i F^k(x_i, y_i, z_i) = 0, \quad \sum_i m_i F^k(x_i, y_i, z_i) = 0$$

für *jede* beliebige Function k^{ten} Grades $F^k(x, y, z)$ identisch erfüllt (8.), wenn die Massensysteme, als deren n^{te} Nullfläche wir die Fläche n^{ter} Classe auffassen können, indifferent sind hinsichtlich ihrer $(k+1)^{\text{ten}}$ Momente, und die Anzahl jener Bedingungsgleichungen reducirt sich in diesem Falle um vier Einheiten. Ebenso findet man, wenn diese Massensysteme hinsichtlich der l^{ten} Momente indifferent sind, dass die Constanten der apolaren Flächen k^{ter} Ordnung nicht $N(n-k)+1$, sondern nur:

$$N(n-k)-N(l-k) = N\left(\frac{n-k}{n-l}\right)+1$$

Bedingungsgleichungen genügen müssen, dass also die apolaren F^k ein Flächensystem von $N(k)-N(n-k)+N(l-k)$ Dimensionen bilden.

§. 5. Bestimmung einer Fläche n^{ter} Classe durch eine begrenzte Anzahl ihrer apolaren Flächen k^{ter} Ordnung.

16. **Die Fläche n^{ter} Classe nebst allen ihren apolaren Flächen ist,** wie wir jetzt nachweisen wollen, schon durch weniger als $N\left(\frac{k}{2k-n}\right)+1$ willkürlich gegebene apolare Flächen k^{ter} Ordnung bestimmt, ihre apolaren F^k bilden demnach ein *specielles* Flächensystem, wenn $k<n$ ist. Wir finden z. B. für $n=3$ und $k=2$, dass alle zu einer Fläche dritter Classe apolaren F^2 im Allgemeinen ein Flächensystem von fünf Dimensionen bilden; während aber das *allgemeine* Flächensystem von fünf Dimensionen erst durch *sechs* willkürlich angenommene Flächen bestimmt ist, hängt das hier in Rede stehende von *fünf* Flächen zweiter Ordnung ab, die noch dazu einer Bedingung unterworfen sind.

Wenn nämlich die 20 Coefficienten:

$$\Sigma m_i x_i^3, \quad 3\Sigma m_i x_i^2 y_i, \quad 3\Sigma m_i x_i^2 z_i, \quad \ldots \quad 3\Sigma m_i z_i, \quad \Sigma m_i$$

der Gleichung $\Sigma m_i(\alpha x_i+\beta y_i+\gamma z_i-p)^3=0$ einer Fläche dritter Classe nicht bekannt sind, aber eine zu dieser Fläche apolare F^2 gegeben ist, so erhalten wir für jene Coefficienten vier lineare Gleichungen von der Form:

$$\Sigma m_i x_i F^2(x_i,y_i,z_i)=0,\ \Sigma m_i y_i F^2(x_i,y_i,z_i)=0,\ \Sigma m_i z_i F^2(x_i,y_i,z_i)=0,\ \Sigma m_i F^2(x_i,y_i,z_i)=0.$$

Fünf apolare F^2 sind also mehr als ausreichend, um die 19 von einander unabhängigen Verhältnisse jener 20 Coefficienten und damit die Fläche dritter Classe nebst allen zu ihr apolaren F^2 und F^3 zu bestimmen. Also:

Fünf beliebige Flächen zweiter Ordnung können nur dann, wenn sie einer gewissen Bedingung genügen, als apolare Flächen einer unbekannten Fläche dritter Classe aufgefasst werden; sie bestimmen in diesem Falle alle übrigen apolaren F^2 sowie die Fläche dritter Classe selbst.

Jene Bedingung wird ausgedrückt durch das Verschwinden einer zwanzigzeiligen Determinante, welche man leicht aus den Coefficienten der Gleichungen jener fünf F^2 bilden kann. Da diese Determinante die Coefficienten in der vierten Dimension enthält, so folgt auch:

Nimmt man von den fünf apolaren F^2 vier ganz beliebig und von der fünften acht Punkte an, so kann diese fünfte vier verschiedene Lagen annehmen, welchen vier zugehörige Flächen dritter Classe entsprechen.

17. Die Gleichung der Fläche n^{ter} Classe zählt

$$N(n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 1$$

unabhängige Constanten, und jede zu der Fläche apolare F^k liefert uns $N(n-k)+1$ lineare Gleichungen für diese Constanten. Berechnen wir also die ganzen Zahlen r und s so, dass $r.N(n-k)+r=N(n)+s$ und $0 \leqq s < N(n-k)+1$ wird, so ergiebt sich:

Nur dann können r beliebig gegebene Flächen k^{ter} Ordnung als apolare Flächen einer (durch sie bestimmten) Fläche n^{ter} Classe aufgefasst werden, wenn sie gewissen s Bedingungen genügen; $r-1$ ganz beliebige F^k dagegen sind apolar zu $N(n-k)+1-s$ fach unendlich vielen Flächen n^{ter} Classe.

Dabei wird vorausgesetzt, dass keine der gegebenen F^k dem durch die übrigen bestimmten Flächensysteme angehört oder überhaupt zu jeder Fläche n^{ter} Classe apolar ist, zu welcher die übrigen apolar sind. Unter derselben Voraussetzung gilt der Satz:

Durch beliebige r von den apolaren F^k einer Fläche n^{ter} Classe sind alle übrigen bestimmt, wenn $r.N(n-k)+r \geqq N(n)$ ist.

Die Zahl r ist, wenn dem allgemeinen Fall entsprechend $n-k<k<n$ gesetzt wird (12.), meistens beträchtlich kleiner als die Anzahl $N\left(\frac{k}{2k-n}\right)$ von Dimensionen des durch die apolaren F^k gebildeten Flächensystems. Nur für $k=n$ wird $r=N\left(\frac{k}{2k-n}\right)+1$; nur die apolaren Flächen höchster, nämlich n^{ter} Ordnung bilden also ein *allgemeines* Flächensystem, und zwar von $N(n)-1$ Dimensionen.

18. Beispielsweise bilden alle zu einer Fläche 100ster Classe apolaren F^{51} ein specielles Flächensystem von 2703 Dimensionen, welches durch beliebige neun dieser F^{51} völlig bestimmt ist, während ein allgemeines Flächensystem von ebenso vielen Dimensionen erst durch 2704 von einander unabhängige Flächen bestimmt ist. Ist die Fläche 100ster Classe nicht gegeben, so dürfen von ihren apolaren Flächen F^{51} nur acht willkürlich angenommen werden, die neunte dagegen muss nicht weniger als $s=22040$ Bedingungen genügen; erst wenn diese Bedingungen erfüllt sind, bestimmen die neun F^{51} eine Fläche 100ster Classe, zu welcher sie apolar sind.

Für $n=4$, $k=3$ finden wir $r=9$, $s=2$ und $N\left(\frac{k}{2k-n}\right)=15$; d. h. Neun beliebige Flächen dritter Ordnung müssen zwei Bedingungen genügen,

damit sie zu einer durch sie bestimmten Fläche vierter Classe apolar sind; sie bilden mit allen übrigen apolaren F^3 ein gleichfalls durch sie bestimmtes Flächensystem von 15 Dimensionen. Einen analogen Satz liefert jede Columne der folgenden Tabelle:

Für $n=9$ und

	$k =$	5,	6,	7,	8,
wird:	$r =$	7,	11,	22,	55,
	$s =$	26,	1,	1,	1,
	$N\left(\frac{k}{2k-n}\right) =$	20,	63,	109,	160.

§. 6. Reduction der Anzahl von n^{ten} Potenzen, als deren Summe eine quaternäre Form n^{ten} Grades dargestellt werden kann.

19. Wir haben oben (3, 4, 5) bewiesen, dass jedes Massensystem hinsichtlich seiner n^{ten} Momente durch $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} = N(n)+1$ Massenpunkte, die nicht auf einer F^n liegen, sonst aber der Lage nach ganz beliebig angenommen werden dürfen, ersetzt werden kann. Jedem dieser $N(n)+1$ Punkte legen wir eine solche Masse bei, dass deren Moment bezüglich der alle übrigen $N(n)$ Punkte enthaltenden F^n gleich wird dem Momente des gegebenen Massensystems in Bezug auf dieselbe F^n.

Wir wollen nun zeigen, dass ein jedes Massensystem auch durch weniger als $N(n)+1$ Massenpunkte ersetzt werden kann, deren Lage aber nicht mehr willkürlich angenommen werden darf. Wir benutzen dabei den folgenden Satz:

Wenn ein Massensystem hinsichtlich seiner n^{ten} Momente durch r Massenpunkte ersetzt werden kann, so geht jede zur n^{ten} Nullfläche des Systems apolare F^n, welche $r-1$ dieser Massenpunkte enthält, auch durch den r^{ten} Punkt, es sei denn, dass dessen Masse Null ist; im letzteren Falle ist das gegebene Massensystem hinsichtlich der n^{ten} Momente äquivalent dem Systeme der übrigen $r-1$ Massenpunkte.

Das Moment der r Massenpunkte bezüglich jener apolaren F^n ist nämlich Null (12.), und da $r-1$ dieser Punkte auf F^n liegen, also einzeln das Moment Null haben, so muss auch das Moment des letzten Massenpunktes verschwinden, woraus der Satz folgt.

20. Nehmen wir nun von den $N(n)+1$ Massenpunkten, durch welche ein gegebenes Massensystem hinsichtlich seiner n^{ten} Momente ersetzt werden

kann, $N\left(\frac{n}{k}\right)+1$ beliebig auf einer zur n^{ten} Nullfläche des Systems apolaren F^k an, so werden die Massen der übrigen $N(n-k)+1$ willkürlichen Punkte gleich Null. Denn legen wir durch irgend $N(n-k)$ dieser ausserhalb F^k liegenden Punkte eine F^{n-k}, so bilden F^k und F^{n-k} zusammen eine apolare F^n (14.), welche den letzten Punkt nicht enthält, und die Masse dieses letzten Punktes ist folglich Null, ebenso aber diejenige aller übrigen $N(n-k)$ ausserhalb F^k liegenden Punkte. Wir erhalten demnach den Satz:

Werden auf einer zur n^{ten} Nullfläche eines Massensystems apolaren Fläche k^{ter} Ordnung beliebige

$$N\left(\frac{n}{k}\right)+1 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)-(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}{1.2.3}$$

Punkte willkürlich angenommen, so können denselben solche Massen beigelegt werden, dass sie dem gegebenen System hinsichtlich der n^{ten} Momente äquivalent sind. Die ihnen beizulegenden Massen sind durch ihre Lage eindeutig bestimmt.

Unzulässig ist übrigens (4.), dass die $N\left(\frac{n}{k}\right)+1$ Punkte auf der Schnittlinie der F^k mit einer beliebigen F^n angenommen werden, weil sie in diesem Falle mit $N(n-k)+1$ beliebig ausserhalb F^k angenommenen Punkten durch eine F^n verbunden werden können.

Wenn eine zu der n^{ten} Nullfläche eines Massensystems apolare Ebene existirt, so kann, obigem Satze zufolge, das Massensystem hinsichtlich der n^{ten} Momente durch $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$ in dieser Ebene liegende Massenpunkte, also durch ein ebenes System, ersetzt werden, und seine n^{te} Nullfläche reducirt sich folglich auf eine in dieser Ebene liegende Curve n^{ter} Classe.

21. Nehmen wir $N\left(\frac{n}{k}\right)-N\left(\frac{n-l}{k}\right)$ von den $N\left(\frac{n}{k}\right)+1$ Punkten auf der Schnittlinie $C^{k,l}$ der apolaren F^k und einer apolaren F^l beliebig an, so werden die Massen der übrigen $N\left(\frac{n-l}{k}\right)+1$ Punkte Null; denn wir können durch beliebige $N\left(\frac{n-l}{k}\right)$ dieser übrigen Punkte eine F^{n-l} legen, welche mit F^l zusammen eine nicht durch den letzten Massenpunkt gehende, apolare F^n bildet. — Lassen wir ferner von jenen $N\left(\frac{n}{k}\right)-N\left(\frac{n-l}{k}\right)=N\left(\frac{n}{k,l}\right)+1$ Punkten irgend $N\left(\frac{n}{k,l}\right)-N\left(\frac{n-i}{k,l}\right)$ mit ebenso vielen beliebigen Punkten einer Gruppe $[i, k, l]$, in welcher die Curve $C^{k,l}$ von einer apolaren F^i geschnitten wird, zusammen-

fallen, so werden die Massen der übrigen $N\left(\frac{n-i}{k,l}\right)+1$ Punkte Null; denn durch $N\left(\frac{n-i}{k,l}\right)$ dieser übrigen Punkte kann eine F^{n-i} gelegt werden, welche mit F^i zusammen eine nicht durch den letzten Massenpunkt gehende, apolare F^n bildet. Daraus folgt:

Werden auf der Schnittlinie $C^{k,l}$ von zwei zur n^{ten} Nullfläche eines Massensystemes apolaren Flächen k^{ter} und l^{ter} Ordnung beliebige

$$N\left(\frac{n}{k,l}\right)+1 = N\left(\frac{n}{k}\right)-N\left(\frac{n-l}{k}\right)$$

Punkte, oder in der Punktengruppe $[i,k,l]$, in welcher drei apolare Flächen i^{ter}, k^{ter} und l^{ter} Ordnung sich schneiden, beliebige

$$N\left(\frac{n}{i,k,l}\right)+1 = N\left(\frac{n}{k,l}\right)-N\left(\frac{n-i}{k,l}\right)$$

Punkte willkürlich angenommen, so können denselben solche Massen beigelegt werden, dass sie dem gegebenen Massensystem hinsichtlich der n^{ten} Momente äquivalent sind. Die ihnen beizulegenden Massen sind durch ihre Lage eindeutig bestimmt. Unzulässig jedoch ist (4.) eine solche Wahl dieser Punkte, dass jede F^n, welche durch $N\left(\frac{n}{k,l}\right)$ resp. $N\left(\frac{n}{i,k,l}\right)$ derselben gelegt wird, auch den letzten Punkt enthält (vgl. 20.); die Punkte müssen also bei der Bestimmung einer durch sie gehenden F^n als ebenso viele von einander unabhängige Punkte zählen.

22. Aus dem letzten Satze ergiebt sich sofort:

Jede Fläche q^{ter} Ordnung (für $q \leqq n$), welche durch die Schnittlinie $C^{k,l}$ von zwei zur n^{ten} Nullfläche eines Massensystemes apolaren Flächen F^k und F^l oder durch alle Schnittpunkte $[i,k,l]$ von drei apolaren Flächen F^i, F^k und F^l hindurchgeht, ist selbst zu jener n^{ten} Nullfläche apolar.

Gelegentlich des vorhergehenden Satzes erwähnen wir, dass

$$N\left(\frac{n}{i,k,l}\right)+1 = i.k.l$$

wird, wenn $n \geqq i+k+l-3$ ist, während in allen übrigen Fällen

$$N\left(\frac{n}{i,k,l}\right)+1 < i.k.l$$

wird. Beispielsweise folgt aus jenem Satze (21.):

Wenn eine Fläche n^{ter} Classe drei apolare Flächen zweiter Ordnung besitzt, welche nur acht Punkte mit einander gemein haben, so kann sie als

n^{te} Nullfläche eines in diesen acht Punkten concentrirten Massensystemes aufgefasst werden.

Eine Fläche fünfter Classe besitzt neunfach unendlich viele apolare F^3; sie kann als fünfte Nullfläche eines 26-punktigen Massensystemes aufgefasst werden, welches in beliebigen 26 Schnittpunkten von drei solchen apolaren F^3 concentrirt ist.

Die folgenden beiden Aufsätze enthalten Methoden, welche wenigstens für $n = 3$ oder 4 zur Ermittelung der kleinsten Anzahl von Massenpunkten, durch welche ein gegebenes Massensystem hinsichtlich der n^{ten} Momente ersetzbar ist, führen, und zugleich diese Punkte auffinden lehren.

Strassburg i/E. den 10. November 1873.

Geometrischer Beweis des *Sylvester*schen Satzes: „Jede quaternäre cubische Form ist darstellbar als Summe von fünf Cuben linearer Formen“.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i/E.)

---

1. Wir können, wie in der vorhergehenden Arbeit gezeigt wurde, diesen zuerst von *Clebsch* bewiesenen Satz auch folgendermassen aussprechen:

Jedes beliebig gegebene Massensystem kann hinsichtlich seiner dritten Momente durch fünf Massenpunkte ersetzt werden.

Unser Beweis desselben stützt sich hauptsächlich auf das elementare Theorem (s. dieses Journal Bd. 72 S. 309.):

Zwei Massensysteme haben in Bezug auf alle Ebenengruppen, welche aus einer willkürlich veränderlichen Ebene ε und $n-1$ fest gegebenen Ebenen bestehen, gleiche n^{te} Momente, wenn für vier von einander unabhängige Lagen der Ebene ε diese Momente gleichwerthig sind; jene Momente haben gleiche Werthe für alle durch eine Gerade s gehenden Lagen von ε, wenn sie für zwei durch s gehende Lagen dieser willkürlichen Ebene ε gleichwerthig sind.

Mit Hülfe dieses Theorems werden wir zunächst beweisen, dass das gegebene Massensystem hinsichtlich seiner dritten Momente auf unendlich viele Arten durch sechs Massenpunkte ersetzt werden kann; sodann werden wir zeigen, dass alle die unendlich vielen Raumcurven dritter Ordnung, welche durch je sechs solche Massenpunkte bestimmt sind, sich in den fünf Massenpunkten schneiden, durch welche das gegebene System ebenfalls ersetzbar ist. Vorher jedoch bemerken wir, dass das gegebene System durch vier Massenpunkte im Allgemeinen nicht ersetzbar ist; denn die ersten Polaren von drei beliebigen Ebenen in Bezug auf die dritte Nullfläche des Massensystemes sind drei, im Allgemeinen ganz von einander unabhängige Flächen zweiter Classe; dieselben besitzen hingegen ein gemeinschaftliches Poltetraëder $(ABCD)$, müssen also sechs Bedingungen genügen, wenn das Massensystem durch vier Massenpunkte A, B, C, D ersetzbar ist. Wir wollen diesen Specialfall von jetzt an ausschliessen.

2. Die ersten Polaren von zwei beliebigen Ebenen ε_1 und ε_2 in Bezug auf die dritte Nullfläche eines gegebenen Massensystemes sind zwei von einander

unabhängige Flächen zweiter Classe; diese aber haben bekanntlich ein gemeinschaftliches Poltetraëder 1234, sodass sowohl ε_1 als auch ε_2 mit jeder Seitenfläche (z. B. 123) dieses Tetraëders und mit einer beliebig durch den gegenüberliegenden Eckpunkt (also 4) gelegten Ebene ein Ebenentripel bildet, in Bezug auf welches das Moment des Massensystemes Null ist.

Dem Eckpunkte $i\,(=1,2,3,4)$ jenes gemeinschaftlichen Poltetraëders 1234 können wir nun eine solche Masse m_i beilegen, dass deren Moment in Bezug auf ein Ebenentripel, welches gebildet wird von der gegenüberliegenden Tetraëderfläche, einer der beiden Ebenen ε_1 und ε_2 und einer willkürlich anzunehmenden Ebene ε, gleich wird dem Momente des gegebenen Massensystemes in Bezug auf dasselbe Ebenentripel. Weil die Momente des gegebenen Systemes und der Punktmasse m_i ebenfalls einander gleich (nämlich beide Null) werden, wenn die willkürliche Ebene ε dieses Tripels irgendwie durch den Punkt i geht, so sind sie einander gleich für vier von einander unabhängige und folglich (1.) für alle Lagen der Ebene ε, insbesondere auch dann, wenn das Tripel aus der dem Punkte i gegenüberliegenden Tetraëderfläche und den beiden Ebenen ε_1 und ε_2 besteht. Zufolge dieser letzten Bemerkung ist es gleichgültig, welche der beiden Ebenen ε_1 und ε_2 wir zur Bestimmung der vier Punktmassen m_1, m_2, m_3, m_4 benutzen; diese beiden Ebenen sind mit einander vertauschbar und können folglich (1.) in den genannten Tripeln auch ersetzt werden durch eine beliebig durch ihre Schnittlinie s gehende Ebene.

3. Den Eckpunkten 1, 2, 3, 4 jenes gemeinschaftlichen Poltetraëders können also solche Massen m_1, m_2, m_3, m_4 beigelegt werden, dass dieses vierpunktige und das gegebene Massensystem gleich grosse Momente haben in Bezug auf jedes Ebenentripel, welches aus einer willkürlich veränderlichen Ebene ε des Raumes, einer beliebig durch die Schnittlinie s von ε_1 und ε_2 gelegten Ebene und der einen oder der anderen Seitenfläche ε' des Tetraëders zusammengesetzt ist. Weil aber diese dritte Ebene ε' vier von einander unabhängige Lagen annehmen kann, so folgt hieraus (1.):

In Bezug auf jedes Ebenentripel, welches aus zwei ganz beliebigen Ebenen und einer willkürlich durch s gelegten Ebene besteht, ist das Moment der vier Punktmassen m_1, m_2, m_3, m_4 gleich demjenigen des gegebenen Massensystemes.

Insbesondere ist das dritte Moment des gegebenen Systemes Null bezüglich jeder Gruppe von drei Ebenen, welche die Gerade s und ausserdem die vier Punktmassen m_1, m_2, m_3, m_4 enthalten.

4. Legen wir nun durch eine Kante $\overline{12}$ des Tetraëders zwei beliebige Ebenen ε' und ε'' und construiren deren erste Polaren bezüglich der dritten Nullfläche des Massensystemes, so haben auch diese beiden Flächen zweiter Classe ein gemeinschaftliches Poltetraëder, von welchem jedoch zwei Eckpunkte mit 3 und 4 zusammenfallen müssen, während die übrigen beiden, 5 und 6, auf der Geraden s liegen; denn die Ebene ε' (und ebenso ε'') bildet z. B. mit der Ebene $s\overline{3}$ und jeder durch 4 gelegten Ebene ein Ebenentripel, in Bezug auf welches das Moment des gegebenen Massensystemes Null ist (3.), und folglich ist 4 der Pol der Ebene $s\overline{3}$ in Bezug auf jede der beiden Flächen zweiter Classe. Wir können (3.) den Eckpunkten 3, 4, 5, 6 dieses neuen Tetraëders solche Massen m_3', m_4', m_5, m_6 beilegen, dass ihr Moment und dasjenige des gegebenen Systemes in Bezug auf jedes Ebenentripel, welches die Gerade $\overline{12}$ enthält, gleichwerthig sind. Wenn die drei Ebenen dieses Tripels beliebig durch resp. $\overline{12}$, s und 3 gelegt werden, so sind in Bezug auf dasselbe die Momente des gegebenen Systemes, der Punktmasse m_4 und der Punktmasse m_4' einander gleich, d. h. es ist $m_4'=m_4$; und ebenso ergiebt sich $m_3'=m_3$.

Da die Gerade s nicht von allen Kanten des Tetraëders 1234 geschnitten wird, so dürfen wir annehmen, dass s und $\overline{12}$ nicht in einer Ebene liegen. Die vier Ebenen ε_1, ε_2, ε' und ε'' gehen also nicht durch einen Punkt; und weil in Bezug auf jedes Ebenentripel, welches eine dieser vier Ebenen enthält, das Moment der sechs Massenpunkte m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 gleich demjenigen des gegebenen Massensystemes ist, so gilt das Gleiche für *jedes beliebige* Ebenentripel des Raumes (1.). Also:

Die sechs Punktmassen m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 sind dem gegebenen Massensysteme äquivalent hinsichtlich der dritten Momente.

5. Jede durch die sechs Massenpunkte gehende Fläche zweiter Ordnung F^2 ist apolar zu der dritten Nullfläche des gegebenen Massensystemes, und insbesondere bildet jedes die sechs Punkte enthaltende Ebenenpaar eine apolare F^2. Es giebt zehn solche Ebenenpaare, nämlich die zehn Paar Gegenflächen des von den Massenpunkten gebildeten räumlichen Sechsecks. Weil ein solches Ebenenpaar mit jeder beliebigen Ebene ε des Raumes ein Ebenentripel bildet, in Bezug auf welches das Moment des gegebenen Massensystemes Null ist, so folgt:

Je zwei Gegenebenen des Massensechsecks 123456 *sind einander conjugirt in Bezug auf jede der dreifach unendlich vielen Flächen zweiter*

Classe, welche man erhält, wenn man von allen Ebenen ε des Raumes die ersten Polaren bezüglich der dritten Nullfläche des gegebenen Massensystemes construirt.

Das Massensechseck ist demnach ein gemeinschaftliches Polsechseck aller dieser Flächen zweiter Classe; wir wollen es kurzweg ein *Polsechseck jener dritten Nullfläche* nennen.

6. Die erste Polare jeder Ebene des Polsechsecks reducirt sich auf eine *Curve* zweiter Classe, welche in der ihr gegenüberliegenden Ebene des Polsechsecks liegt; denn der Pol jeder willkürlichen Ebene ε bezüglich jener ersten Polare ist (5.) in dieser Gegenebene enthalten. Also:

Die zwanzig Ebenen eines jeden Polsechsecks berühren die sogenannte Kernfläche der dritten Nullfläche; je zwei Gegenebenen des Polsechsecks sind conjugirte Ebenen dieser Kernfläche.

Bekanntlich ist diese Kernfläche von der vierten Classe, wie sich auch daraus ergiebt, dass jede beliebige Gerade s die Kante eines Polsechsecks bildet, von welchem vier Ebenen durch s gehen.

7. Die oben (2, 3, 4) angegebene Construction eines Polsechseckes lehrt uns:

Ein Polsechseck ist durch das gegebene Massensystem völlig bestimmt, sobald eine Kante s (oder $\overline{56}$) desselben willkürlich angenommen ist.

Aus der folgenden Betrachtung dagegen ergiebt sich, dass ein gegebener Punkt unendlich vielen Polsechsecken als Eckpunkt angehören kann.

Verbinden wir die Eckpunkte eines Polsechsecks durch eine Raumcurve k^3 dritter Ordnung, so ist jede durch diese k^3 gehende Fläche F^2 zweiter Ordnung apolar zu der dritten Nullfläche des gegebenen Massensystemes. Wählen wir nun irgend eine Secante s der k^3 zur Kante eines zweiten Polsechseckes, so ist, wie leicht gezeigt werden kann, auch dieses Sechseck der k^3 eingeschrieben. Denn verbinden wir von den vier ausserhalb s liegenden Massenpunkten dieses Sechsecks irgend drei durch eine Ebene ε und zugleich s mit k^3 durch eine F^2, so bilden F^2 und ε zusammen eine apolare F^3, in Bezug auf welche das Moment des vierten ausserhalb s liegenden Massenpunktes Null ist; dieser vierte, also überhaupt jeder der vier ausserhalb s liegenden Massenpunkte ist deshalb auf jeder durch k^3 und s gehenden F^2 enthalten, d. h. auf k^3. Vertauschen wir aber s mit einer anderen Kante des Sechsecks, so ergiebt sich ebenso, dass auch die beiden auf s befindlichen Sechseckpunkte auf k^3 liegen. — Hieraus folgt, weil je zwei Punkte von k^3 durch eine Secante verbunden werden können:

Wenn eine Raumcurve dritter Ordnung einem Polsechseck umschrieben ist, so bestimmen je zwei Punkte A, B der Curve ein ihr gleichfalls eingeschriebenes Polsechseck, von welchem A und B zwei Eckpunkte sind.

8. Die zwölf Eckpunkte von zwei beliebigen Polsechsecken liegen auf jeder Fläche F^3 dritter Ordnung, welche durch eilf derselben hindurchgeht. Denn diese F^3 ist einem der beiden Polsechsecke umschrieben, also apolar zu der dritten Nullfläche des gegebenen Massensystemes; das Moment der sechs Massenpunkte des anderen Polsechsecks, d. h. dasjenige des zwölften Massenpunktes bezüglich der F^3 ist folglich Null, weshalb auch der zwölfte Punkt auf F^3 liegt. Eine Ausnahme erleidet der Satz nur dann, wenn dieser zwölfte Punkt die Masse Null hat; in diesem Falle aber würde sich das eine der beiden Massensechsecke auf ein Massenfünfeck reduciren, welches dem gegebenen Massensystem äquivalent ist, und der *Sylvester*sche Satz wäre bewiesen. Die gleiche Bemerkung kann zum Beweise des folgenden Satzes gemacht werden:

Die zwölf Eckpunkte von zwei beliebigen Polsechsecken liegen auf einer Raumcurve $C^{2.2}$ vierter Ordnung erster Species.

Greifen wir nämlich unter den 12 Eckpunkten irgend vier nicht in einer Ebene liegende heraus, so lässt sich leicht zeigen, dass dieselben auf jeder durch die übrigen acht Eckpunkte gehenden F^2, also auch auf der Schnittlinie $C^{2.2}$ von allen diesen F^2 enthalten sind. Denn die Verbindungsebene von drei jener vier Punkte bildet mit jeder solchen F^2 zusammen eine F^3, welche durch eilf und folglich durch alle zwölf Eckpunkte geht; w. z. b. w.

9. Sind vier von den 12 Eckpunkten in einer Ebene enthalten, so muss jede F^2, welche 7 von den übrigen 8 Eckpunkten enthält, auch durch den letzten gehen; diese acht Eckpunkte bilden demnach eine Gruppe [2, 2, 2]. Und wenn die beiden Polsechsecke einen gemeinschaftlichen Eckpunkt besitzen, so kann man leicht wie oben (8.) beweisen, dass ihre eilf Eckpunkte auf jeder F^2 liegen, welche durch sieben derselben hindurchgeht; also:

Wenn zwei Polsechsecke einen gemeinschaftlichen Eckpunkt besitzen, so liegen ihre eilf Eckpunkte auf einer Raumcurve dritter Ordnung.

Die sämmtlichen Polsechsecke, welchen ein gegebener Punkt A als Eckpunkt angehört, sind also einer Raumcurve dritter Ordnung eingeschrieben. Wenn nun aber das gegebene Massensystem hinsichtlich der dritten Momente durch fünf Massenpunkte ersetzbar ist, so bilden auch diese Punkte mit A zusammen ein Polsechseck (mit der Masse Null im Punkte A); und die fünf

Massenpunkte müssen folglich, wenn sie überhaupt existiren, auf jener durch A gehenden Raumcurve dritter Ordnung liegen, eben so gut aber auf jeder anderen Raumcurve dritter Ordnung, welche irgend einem Polsechseck umschrieben ist. Diese Bemerkung zeichnet uns den Weg vor, auf welchem wir zum Beweise des *Sylvester*schen Satzes gelangen.

10. Seien zwei Raumcurven k^3 und k_1^3 dritter Ordnung gegeben, welche zwei beliebigen Polsechsecken umschrieben sind. Verbinden wir eilf von den Eckpunkten der Polsechsecke mit je vier anderen Punkten von k^3 und k_1^3 durch eine Fläche F^3 dritter Ordnung (was möglich ist, da eine F^3 durch 19 beliebige Punkte gelegt werden kann), so enthält diese F^3, weil sie auch durch den zwölften Eckpunkt geht (8.), je zehn und folglich alle Punkte von k^3 und k_1^3. Daraus folgt aber, dass k^3 und k_1^3 mindestens einen Punkt P mit einander gemein haben; denn F^3 wird von jeder durch k^3 gehenden F^2 in k^3 und noch einer anderen Raumcurve k_2^3 dritter Ordnung geschnitten, und da letztere, wenn sie nicht mit k_1^3 zusammenfällt, höchstens fünf Punkte mit k_1^3 gemein haben kann, so muss mindestens einer (P) von den sechs Schnittpunkten der k_1^3 mit F^2 auf k^3 liegen.

Verbinden wir nun diesen Punkt P, welcher beiden Raumcurven k^3 und k_1^3 angehört, mit derjenigen $C^{2,2}$, welche den beiden, jenen Curven eingeschriebenen Polsechsecken umschrieben werden kann (8.), durch eine Fläche zweiter Ordnung, so enthält diese je sieben und folglich alle Punkte der Raumcurven k^3 und k_1^3 dritter Ordnung. Also:

Je zwei Raumcurven k^3 und k_1^3 dritter Ordnung, welche zwei beliebigen Polsechsecken umschrieben sind, können durch eine Fläche zweiter Ordnung verbunden werden.

Es folgt aus (7.), dass eine Secante s von k^3 nur in dem Falle zugleich Secante von k_1^3 sein kann, wenn sie zwei Schnittpunkte der beiden Curven verbindet; die eine Regelschaar der Fläche zweiter Ordnung besteht demnach aus Secanten der einen, die andere Regelschaar aus Secanten der anderen Raumcurve, und diese Curven k^3 und k_1^3 schneiden sich folglich nicht in vier, sondern in fünf (reellen oder imaginären) Punkten.

11. Dem Beweise, dass diese Schnittpunkte die gesuchten fünf Massenpunkte sind, schicken wir folgenden Satz voraus:

Eine Raumcurve k^3 dritter Ordnung, welche einem Polsechseck umschrieben ist, wird von jeder nicht durch sie gehenden, zu der dritten Nullfläche apolaren Fläche zweiter Ordnung in einem Polsechseck geschnitten.

Nämlich zwei beliebige dieser Schnittpunkte bestimmen (7.) ein der k^3 eingeschriebenes Polsechseck, und wir haben nur zu zeigen, dass auch die übrigen vier Eckpunkte desselben auf der apolaren F^2 liegen. Zu dem Ende verbinden wir drei von diesen vier Eckpunkten durch eine Ebene; dieselbe bildet mit F^2 zusammen eine apolare F^3, in Bezug auf welche also das Moment der im vierten Eckpunkte concentrirten Masse Null ist; u. s. w., vgl. (8.). —

12. Diesem so bewiesenen Satze zufolge wird k^3 auch von jeder durch die Raumcurve k_1^3 gelegten F^2 in einem Polsechsecke geschnitten. Die Massen, welche den Eckpunkten eines *dieser* Polsechsecke beigelegt werden müssen, damit sie das gegebene Massensystem hinsichtlich der dritten Momente ersetzen, sind aber nur für die gemeinschaftlichen fünf Punkte der k^3 und k_1^3 von Null verschieden; die Masse des sechsten Punktes wird Null. Denn wir können durch k_1^3 auch solche Flächen zweiter Ordnung legen, welche nicht durch den sechsten Punkt gehen, und jede derselben bildet mit einer ganz beliebigen Ebene eine F^3, in Bezug auf welche das Moment des sechsten Punktes Null ist, obgleich der Punkt ausserhalb F^3 liegt. Da somit der sechste Punkt die Masse Null hat, so ergiebt sich:

Ein beliebig gegebenes Massensystem kann hinsichtlich der dritten Momente auf eine einzige Art durch fünf Massenpunkte ersetzt werden. In diesen fünf Punkten schneiden sich alle Raumcurven dritter Ordnung, welche den Polsechsecken der dritten Nullfläche des Massensystems umschrieben werden können.

13. Das von den fünf Massenpunkten gebildete Fünfeck wird von jedem beliebigen Punkte des Raumes zu einem Polsechseck der dritten Nullfläche ergänzt. Jede demselben umschriebene F^2 ist zu dieser Nullfläche apolar. Daraus folgt (vgl. 5):

Jede Ebene des Massenfünfecks ist der ihr gegenüberliegenden Kante conjugirt in Bezug auf jede der dreifach unendlich vielen Flächen zweiter Classe, welche den sämmtlichen Ebenen des Raumes als erste Polaren bezüglich der dritten Nullfläche des gegebenen Massensystemes entsprechen.

Die Kernfläche dieser dritten Nullfläche (6.) wird demnach von allen Ebenen berührt, welche durch die zehn Kanten des Massenfünfecks gelegt werden können; d. h. diese 10 Kanten selbst gehören der Kernfläche an.

Wir wissen, dass alle zu einer Fläche dritter Classe apolaren Flächen F^2 zweiter Ordnung ein (specielles) Flächensystem von fünf Dimensionen bilden. Diejenigen F^2 eines Systemes, welche in je zwei Ebenen zerfallen, umhüllen die Kernfläche jener Fläche dritter Classe; also:

Die Flächen zweiter Ordnung, welche aus je zwei conjugirten Ebenen dieser Kernfläche vierter Classe bestehen, gehören einem Flächensysteme von fünf Dimensionen an.

14. Zum Schlusse stellen wir die geometrischen Ergebnisse dieses Aufsatzes übersichtlich zusammen, und zwar in der reciproken Form, als

Lehrsätze über die Kernfläche einer Fläche F^3 dritter Ordnung.

Die Kernfläche einer F^3 ist bekanntlich *) der geometrische Ort eines Punktes P, dessen erste Polare bezüglich der F^3 eine Kegelfläche zweiter Ordnung ist; sie ist zugleich Ort des Mittelpunktes P_1 dieser Kegelfläche. Die Punkte P und P_1 sind einander conjugirt in Bezug auf die ersten Polaren aller Punkte des Raumes; sie heissen „reciproke Pole in Bezug auf die cubische Fläche F^3".

Die Kernfläche der F^3 ist von der vierten Ordnung; sie enthält, wie gleichfalls bekannt, die zehn Eckpunkte und die zehn Kanten eines Fünfflaches oder Pentaëders. Ich will dieses Pentaëder das „*Polfünfflach der* F^3" nennen, weil jeder Eckpunkt desselben der ihm gegenüberliegenden Kante conjugirt ist in Bezug auf die dreifach unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung, welche den Punkten des Raumes als erste Polaren bezüglich der F^3 entsprechen, und weil demnach das Pentaëder ein gemeinschaftliches Polfünfflach aller dieser F^2 ist.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich nun folgende neue Sätze:

15. Der Kernfläche einer F^3 können unendlich viele Sechsflache oder Hexaëder eingeschrieben werden, sodass die sämmtlichen 20 Eckpunkte jedes solchen Sechsflaches auf der Kernfläche liegen (6.). Je zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte eines so gelegenen Sechsflaches sind reciproke Pole in Bezug auf F^3 (5.); das Sechsflach ist ein gemeinschaftliches Polsechsflach der dreifach unendlich vielen F^2, welche den Punkten des Raumes als erste Polaren in Bezug auf F^3 entsprechen, und soll kurzweg ein *Polsechsflach der cubischen Fläche* F^3 genannt werden (5.).

Ein Polsechsflach der F^3 ist bestimmt durch eine willkürlich anzunehmende Kante desselben (7.). Die Kernfläche wird von der Kante in vier Eckpunkten des Polsechsflaches geschnitten, vier andere Eckpunkte fallen in

*) Vgl. u. A. *Cremona,* Mémoire sur les surfaces du troisième ordre; dieses Journal Bd. 68. *R. Sturm,* Synthet. Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Lpz. 1867. *Salmon,* Analyt. Geometrie des Raumes, deutsch von *Fiedler,* Lpz. 1865, 2. Thl.

die reciproken Pole jener ersteren vier und bestimmen sechs Kanten des Polsechsflaches, von welchen die Kernfläche in den übrigen zwölf Eckpunkten des Polsechsflaches geschnitten wird. — Bekannt dürfte sein der hieraus folgende Satz: Legt man durch die reciproken Pole von drei jener ersten vier, auf einer Geraden liegenden Eckpunkte eine Ebene, so enthält dieselbe den vierten Eckpunkt.

16. Unabhängig von der Kernfläche kann das Polsechsflach wie folgt construirt werden. Man bestimmt von irgend zwei Punkten der gegebenen Kante die ersten Polaren bezüglich der F^3 und sucht deren gemeinschaftliches Poltetraëder; dann gehören die Flächen und Kanten dieses Tetraëders dem gesuchten Polsechsflache an (2., 3., 4.), und letzteres wird vervollständigt durch analoge Benutzung von einer dieser neu gefundenen Kanten (4.).

Eine beliebig angenommene Ebene gehört unendlich vielen Polsechsflachen an (7., 13.), und zwar bilden die Flächen aller dieser Polsechsflache einen Ebenenbüschel dritter Ordnung (9.), d. h. sie schmiegen sich einer Raumcurve dritter Ordnung an. Jeder Ebenenbüschel dritter Ordnung, welcher die sechs Ebenen eines Polsechsflaches der F^3 enthält, geht auch durch die fünf Ebenen des Polfünfflaches dieser F^3 (12.); woraus sich eine Construction des Polfünfflaches ergiebt; je zwei solche Ebenenbüschel dritter Ordnung sind folglich allemal einer Fläche zweiter Classe umschrieben.

17. Eine Fläche zweiter Classe, welche die sechs Ebenen eines Polsechsflaches der F^3 berührt, hat mit jedem der im vorigen Satze (16.) bezeichneten Ebenenbüschel dritter Ordnung sechs Ebenen gemein, welche ebenfalls ein Polsechsflach der F^3 bilden (11.); jede Berührungsebene der Fläche zweiter Classe gehört *einem* dieser Polsechsflache an und bestimmt dasselbe. Jeder beliebigen Fläche einer Flächenschaar zweiter Classe können unendlich viele Polsechsflache umschrieben werden, wenn irgend zwei dieser Flächen solchen Polsechsflachen eingeschrieben sind. — Die zwölf Ebenen von zwei beliebigen Polsechsflachen werden von unendlich vielen Flächen zweiter Classe berührt, und zwar bilden alle diese Flächen eine Flächenschaar (8.), d. h. ihre gemeinschaftlichen Berührungsebenen bilden einen Ebenenbüschel vierter Ordnung erster Species.

Strassburg i./E., den 20. November 1873.

Darstellung quaternärer biquadratischer Formen als Summen von zehn Biquadraten.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i./E.)

---

1. In No. 13 der vorhergehenden Arbeit über eine *„Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen“* wurde gezeigt, dass eine quaternäre biquadratische Form im Allgemeinen nicht als Summe von neun Biquadraten darstellbar ist. Wir wollen nunmehr den Satz beweisen:

Eine quaternäre biquadratische Form kann auf unendlich viele Arten als Summe der vierten Potenzen von zehn linearen quaternären Formen dargestellt werden.

Wir denken uns die gegebene quaternäre Form vierten Grades repräsentirt durch die vierten Momente eines Massensystemes in Bezug auf alle Ebenen des Raumes, und ertheilen demgemäss dem zu beweisenden Satze die für uns bequemere Form:

Ein beliebig gegebenes Massensystem kann hinsichtlich seiner vierten Momente auf unendlich viele Arten durch zehn Massenpunkte ersetzt werden.

Zugleich dürfen wir annehmen, dass das gegebene Massensystem aus einer endlichen Anzahl von Massenpunkten (etwa aus $N(4)+1=35$ Massenpunkten) bestehe.

2. Die vierte Nullfläche des Massensystemes, deren Gleichung lautet:

$$\Sigma m(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^4 = 0,$$

ist als eine beliebig gegebene Fläche vierter Classe zu betrachten. In Bezug auf dieselbe hat jede Fläche F^2 zweiter Ordnung eine bestimmte Fläche zweiter Classe zur Polare, und zwar wird diese Polare repräsentirt durch die Gleichung:

$$\Sigma m.F^2(x, y, z).(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^2 = 0,$$

wenn $F^2(\xi, \eta, \zeta)=0$ die Gleichung der F^2 ist. Da die Flächen zweiter Ordnung und zweiter Classe von gleich viel (nämlich neun) willkürlichen Parametern abhängen, so überzeugt man sich leicht, dass auch umgekehrt

jeder beliebig gegebenen Fläche zweiter Classe eine bestimmte Fläche zweiter Ordnung entspricht, von welcher jene die Polare ist. Diese Bemerkung gilt auch für solche Flächen zweiter Classe, welche sich auf einzelne Punkte oder auf Punktenpaare oder auch auf Curven zweiter Classe reduciren.

Wenn nun das gegebene Massensystem hinsichtlich seiner vierten Momente durch zehn Massenpunkte ersetzt werden kann, so muss die Polare einer jeden F^2, welche durch neun dieser Punkte geht, sich auf den zehnten Punkt reduciren. Diese Bemerkung lehrt uns, auf welchem Wege wir zehn solche Punkte zu suchen haben.

3. Wir wollen sagen, die Fläche F^2 zweiter Ordnung und jeder auf ihr liegende Punkt seien dem Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) *associirt* bezüglich der gegebenen Fläche vierter Classe, wenn die Polare der F^2 sich auf diesen Punkt reducirt, also durch die Gleichung:

$$(\alpha\xi_1+\beta\eta_1+\gamma\zeta_1-p)^2 = 0$$

dargestellt werden kann. Damit aber die Polare der durch die Gleichung:

$$F^2(\xi,\eta,\zeta) \equiv a_{11}\xi^2+a_{12}\xi\eta+a_{13}\xi\zeta+a_{14}\xi+a_{22}\eta^2+a_{23}\eta\zeta+a_{24}\eta+a_{33}\zeta^2+a_{34}\zeta+a_{44}=0$$

repräsentirten F^2 sich auf den Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) reducire, müssen die zehn Constanten a_{ik} der F^2 für alle Werthe von α, β, γ, p der folgenden Gleichung genügen:

$$\Sigma m.F^2(x,y,z).(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^2 = K.(\alpha\xi_1+\beta\eta_1+\gamma\zeta_1-p)^2.$$

Diese Bedingungsgleichung, in welcher K einen unbekannten Factor bezeichnet, zerfällt in zehn andere, welche für K und die zehn a_{ik} linear und homogen sind; dieselben lauten:

$$-K\xi_1^2 + a_{11}\Sigma mx^4 + a_{12}\Sigma mx^3y + a_{13}\Sigma mx^3z + a_{14}\Sigma mx^3 + a_{22}\Sigma mx^2y^2+\cdots+a_{44}\Sigma mx^2 = 0$$

$$-K\xi_1\eta_1+ a_{11}\Sigma mx^3y + a_{12}\Sigma mx^2y^2+ a_{13}\Sigma mx^2yz + a_{14}\Sigma mx^2y + a_{22}\Sigma mx\,y^3+\cdots+a_{44}\Sigma mxy = 0$$

u. s. w.

Eliminiren wir die eilf Unbekannten K und a_{ik} aus diesen zehn Gleichungen und der Gleichung $F^2(\xi,\eta,\zeta)=0$, so erhalten wir die Gleichung derjenigen F^2, welche dem Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) associirt ist.

Die Determinante dieser eilf Gleichungen, in welchen wir zur Abkürzung

$$\Sigma m\,x^q y^r z^s = A_{qrst} \quad \text{für} \quad q+r+s+t=4$$

setzen, ist die folgende:

$$[P, P_1] = \begin{vmatrix} 0 & \xi^2 & \xi\eta & \xi\zeta & \xi & \eta^2 & \eta\zeta & \eta & \zeta^2 & \zeta & 1 \\ \xi_1^2 & A_{4000} & A_{3100} & A_{3010} & A_{3001} & A_{2200} & A_{2110} & A_{2101} & A_{2020} & A_{2011} & A_{2002} \\ \xi_1\eta_1 & A_{3100} & A_{2200} & A_{2110} & A_{2101} & A_{1300} & A_{1210} & A_{1201} & A_{1120} & A_{1111} & A_{1102} \\ \xi_1\zeta_1 & A_{3010} & A_{2110} & A_{2020} & A_{2011} & A_{1210} & A_{1120} & A_{1111} & A_{1030} & A_{1021} & A_{1012} \\ \xi_1 & A_{3001} & A_{2101} & A_{2011} & A_{2002} & A_{1201} & A_{1111} & A_{1102} & A_{1021} & A_{1012} & A_{1003} \\ \eta_1^2 & A_{2200} & A_{1300} & A_{1210} & A_{1201} & A_{0400} & A_{0310} & A_{0301} & A_{0220} & A_{0211} & A_{0202} \\ \eta_1\zeta_1 & A_{2110} & A_{1210} & A_{1120} & A_{1111} & A_{0310} & A_{0220} & A_{0211} & A_{0130} & A_{0121} & A_{0112} \\ \eta_1 & A_{2101} & A_{1201} & A_{1111} & A_{1102} & A_{0301} & A_{0211} & A_{0202} & A_{0121} & A_{0112} & A_{0103} \\ \zeta_1^2 & A_{2020} & A_{1120} & A_{1030} & A_{1021} & A_{0220} & A_{0130} & A_{0121} & A_{0040} & A_{0031} & A_{0022} \\ \zeta_1 & A_{2011} & A_{1111} & A_{1021} & A_{1012} & A_{0211} & A_{0121} & A_{0112} & A_{0031} & A_{0022} & A_{0013} \\ 1 & A_{2002} & A_{1102} & A_{1012} & A_{1003} & A_{0202} & A_{0112} & A_{0103} & A_{0022} & A_{0013} & A_{0004} \end{vmatrix}.$$

Wir stellen sie dar durch das Symbol $[P, P_1]$, indem wir mit P einen veränderlichen Punkt (ξ, η, ζ) und mit P_1 den Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) bezeichnen. Demnach repräsentirt die Gleichung:

$$[P, P_1] = 0$$

diejenige Fläche zweiter Ordnung, deren Polare sich auf den Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) oder P_1 reducirt, und jeder Punkt P, dessen Coordinaten (ξ, η, ζ) dieser Gleichung genügen, ist dem Punkte P_1 associirt bezüglich der vierten Nullfläche des gegebenen Massensystemes.

4. Die Determinante $[P, P_1]$ ändert sich nicht, wenn in ihr die gleichnamigen Coordinaten der Punkte P und P_1 mit einander vertauscht werden, es ist vielmehr $[P, P_1] = [P_1, P]$; d. h.:

Wenn von zwei Punkten der eine auf der dem anderen associirten Fläche zweiter Ordnung liegt, so liegt auch der letztere auf der associirten Fläche des ersteren.

Der Punkt P_1 ist nur dann sich selbst associirt, wenn seine Coordinaten der für sie biquadratischen Gleichung $[P_1, P_1] = 0$ genügen; hieraus folgt:

Alle sich selbst associirten Punkte liegen auf einer Fläche vierter Ordnung.

Ein beliebig angenommener Punkt ist demnach im Allgemeinen nicht sich selbst associirt.

Zwei gegebenen Punkten P_1, P_2 sind alle Punkte einer Raumcurve $C^{2,2}$ vierter Ordnung erster Species associirt,

nämlich derjenigen Raumcurve, welche durch die beiden, für die laufenden Coordinaten ξ, η, ζ quadratischen Gleichungen:

$$[P, P_1] = 0 \quad \text{und} \quad [P, P_2] = 0$$

repräsentirt wird. Wir wollen diese Curve $C^{2,2}$ *dem Punktenpaare* P_1, P_2 *associirt* nennen. — Ebenso ergiebt sich:

Drei gegebenen Punkten P_1, P_2, P_3 *sind im Allgemeinen acht Punkte associirt; dieselben bilden eine „dem Punktentripel* P_1, P_2, P_3 *associirte" Punktengruppe* [2,2,2], *in welcher drei Flächen zweiter Ordnung sich schneiden.*

5. Wir sind zu diesen Ergebnissen gelangt, indem wir (3.) ausgingen von der Identität:

$$\Sigma m.F^2(x,y,z).(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^2 = K.(\alpha\xi_1+\beta\eta_1+\gamma\zeta_1-p)^2,$$

und zugleich die dem Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) associirte Fläche zweiter Ordnung durch die Gleichung

$$F^2(\xi,\eta,\zeta) = 0$$

darstellten. Die rechte Seite jener Identität kann aufgefasst werden als das zweite (oder Trägheits-) Moment einer im Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) concentrirten Masse K in Bezug auf eine beliebige Ebene $(\alpha, \beta, \gamma, p)$. Wir setzen

$$K = M_1.F^2(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$$

und betrachten auch den Coefficienten M_1 als eine dem Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) beizulegende Masse; dann ist auch die Gleichung

$$\Sigma m.F^2(x,y,z).(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^2-M_1.F^2(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)(\alpha\xi_1+\beta\eta_1+\gamma\zeta_1-p)^2 = 0$$

identisch erfüllt für alle Werthe von α, β, γ, p. Diese Identität aber bedeutet, dass die Fläche zweiter Ordnung $F^2(\xi,\eta,\zeta)=0$ apolar ist zu der vierten Nullfläche eines Massensystemes, welches sich von dem gegebenen nur um die im Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) concentrirte Masse M_1 unterscheidet. Diese Masse $M_1 = \dfrac{K}{F^2(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)}$ ist endlich, wenn $F^2(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ von Null verschieden, also der Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) nicht sich selbst associirt ist bezüglich der vierten Nullfläche des gegebenen Massensystemes. Also:

Einem beliebigen Punkte P_1 *kann eine solche endliche Masse* M_1 *beigelegt werden, dass, wenn dieselbe von dem gegebenen Massensysteme subtrahirt wird, das neu entstehende Massensystem eine zu seiner vierten Nullfläche apolare Fläche* F^2 *zweiter Ordnung erhält. Diese* F^2 *ist dem Punkte* P_1 *associirt bezüglich der vierten Nullfläche des gegebenen Massensystemes.*

Wir dürfen diese zu P_1 associirte F^2 als bekannt ansehen, weil wir ihre Gleichung in Determinantenform bereits (3.) aufgestellt haben. Ergänzen wir sie durch eine andere Fläche zweiter Ordnung oder durch ein Ebenenpaar zu einer F^4, so finden wir die Grösse M_1 der dem Punkte P_1 beizu-

legenden Masse, indem wir ihr Moment bezüglich dieser F^4 demjenigen des gegebenen Massensystemes gleichsetzen.

6. *Eilf Punkten, von denen acht den drei übrigen P_1, P_2, P_3 und diese paarweise einander associirt sind bezüglich der vierten Nullfläche des gegebenen Massensystemes, können solche Massen beigelegt werden, dass sie das Massensystem ersetzen hinsichtlich der vierten Momente.*

Zunächst nämlich können wir den Punkten P_1, P_2, P_3 drei solche Massen M_1, M_2, M_3 beilegen, dass, wenn wir dieselben von dem gegebenen Massensystem subtrahiren, das neu entstehende Massensystem drei zu seiner vierten Nullfläche apolare F^2 erhält (5.). Und zwar verbinden diese apolaren F^2 je zwei der Punkte P_1, P_2, P_3 mit der Gruppe $[2, 2, 2]$ der übrigen acht ihnen associirten Punkte, und können auf die vorhin angegebene Weise zur Bestimmung der Massen M_1, M_2, M_3 benutzt werden. Dass aber das neue Massensystem hinsichtlich seiner vierten Momente durch acht Massen, welche in jenen acht Schnittpunkten der drei apolaren F^2 concentrirt sind, ersetzt werden kann, wurde schon in No. 21 und 22 der Arbeit über die „Erweiterung der Polarentheorie“ bewiesen. Der obige Satz ist folglich richtig.

Wir können den Punkt P_1 ganz beliebig, P_2 irgendwo auf der dem P_1 associirten F^2 und P_3 beliebig auf der dem Punktenpaare P_1, P_2 associirten Raumcurve $C^{2.2}$ annehmen; die übrigen acht Punkte sind dann bestimmt, sie bilden (4.) die dem Punktentripel P_1, P_2, P_3 associirte Gruppe $[2, 2, 2]$. Die Punkte P_1, P_2, P_3 dürfen keine sich selbst associirten Punkte sein, weil sonst die ihnen beizulegenden Massen unendlich gross ausfallen würden (5.).

7. Wir wollen nun die einander associirten Punkte P_1 und P_2 fest annehmen, wodurch die ihnen beizulegenden Massen völlig bestimmt sind (5.); den Punkt P dagegen wollen wir die den beiden ersteren associirte Raumcurve $C^{2.2}$ durchlaufen lassen, sodass auch die Gruppe $[2, 2, 2]$ der übrigen acht zu P_1, P_2 und P_3 associirten Punkte sich auf $C^{2.2}$ bewegt. Dann muss mindestens einmal der Fall eintreten, dass zwei Punkte P_4 und P_4' dieser Gruppe auch einander associirt werden.

Denn sei zunächst P ein beliebiger Punkt des Raumes, welcher den beiden associirten Punkten P_3 und P_4 der $C^{2.2}$ associirt ist; derselbe ist ein willkürlicher Punkt derjenigen Raumcurve $C_1^{2.2}$, welche durch die beiden quadratischen Gleichungen $[P, P_3] = 0$ und $[P, P_4] = 0$ repräsentirt wird. Wenn nun P_3 und damit zugleich P_4 die Curve $C^{2.2}$ durchläuft, so beschreibt $C_1^{2.2}$ eine algebraische Fläche Φ, deren Gleichung sich ergiebt durch Elimination

der sechs Coordinaten von P_3 und P_4 aus den sieben Gleichungen:

$$[P_1, P_3] = 0, \quad [P_1, P_4] = 0, \quad [P_2, P_3] = 0, \quad [P_2, P_4] = 0, \quad [P_3, P_4] = 0,$$
$$[P, P_3] = 0 \quad \text{und} \quad [P, P_4] = 0.$$

Diese Fläche Φ ist mindestens vom sechzehnten Grade; denn weil P_4 für jede Lage von P_3 acht verschiedene Lagen in der Punktengruppe [2, 2, 2] annehmen kann, so hat die Fläche F^2 zweiter Ordnung, welche einer bestimmten Lage von P_3 associirt ist, mit Φ acht verschiedene $C_1^{2,2}$ gemein, ausserdem aber alle Punkte, in welchen die F^2 von den nicht auf ihr liegenden $C_1^{2,2}$ der Fläche Φ geschnitten wird. Von der zu P_1 und P_2 associirten Raumcurve $C^{2,2}$ wird folglich Φ in mindestens 64 Punkten geschnitten; zu denselben gehören die sechzehn sich selbst associirten Punkte der $C^{2,2}$ als einfache Schnittpunkte, und jeder von den übrigen Schnittpunkten P_4' ist zwei, von ihm und von einander verschiedenen, associirten Punkten P_3 und P_4 der Raumcurve $C^{2,2}$ associirt.

8. Es giebt also auf der zu P_1 und P_2 associirten $C^{2,2}$ drei Punkte Q, R, S, welche paarweise einander, nicht aber sich selbst associirt sind. Lassen wir nun den beweglichen Punkt P_3 einmal mit Q und einmal mit R zusammenfallen, so erhalten wir (6.) zwei verschiedene Gruppen von je eilf Massenpunkten, welche hinsichtlich der vierten Momente dem gegebenen Massensystem und folglich auch einander äquivalent sind. Diese beiden Gruppen haben die Punkte P_1, P_2, Q, R, S, nicht aber alle übrigen Punkte gemein; denn den drei Punkten P_1, P_2, Q ist eine andere Gruppe [2, 2, 2] associirt als dem Punktentripel P_1, P_2, R. In beiden eilfpunktigen Massensystemen sind ferner die Massen M_1 und M_2 der Punkte P_1 und P_2 dieselben (7.), und die Differenz beider Systeme ist folglich ein indifferentes Massensystem, welches (da die Massen von P_1 und ebenso von P_2 durch die Subtraction aufgehoben werden) aus höchstens fünfzehn auf $C^{2,2}$ liegenden Massenpunkten besteht.

Nun lässt sich aber leicht zeigen, dass die sämmtlichen Massen dieses fünfzehnpunktigen indifferenten Massensystemes Null sein müssen. Legt man nämlich durch irgend vierzehn von den fünfzehn Punkten eine F^4, welche den fünfzehnten nicht enthält (was möglich ist, indem man z. B. die vierzehn Punkte in zwei siebenpunktige Gruppen theilt und durch letztere zwei F^2 legt), so ist das Moment des fünfzehnten Massenpunktes bezüglich dieser F^4 Null, und folglich auch die Masse desselben Null.

Die beiden Systeme von je eilf Massenpunkten, welche beide dem gegebenen Massensystem äquivalent sind und die fünf Punkte P_1, P_2, Q, R, S mit einander gemein haben, heben sich also gegenseitig auf, wenn wir sie von einander subtrahiren; und da mindestens ein Punkt des einen Systemes dem anderen nicht angehört, so muss die Masse dieses Punktes Null sein. Die beiden zu dem gegebenen Massensysteme äquivalenten Systeme reduciren sich also auf ein und dasselbe zehnpunktige Massensystem; denn (1.) auf weniger als zehn Massenpunkte können sie sich im Allgemeinen nicht reduciren.

9. Wir haben also nunmehr bewiesen:

Ein beliebig gegebenes Massensystem kann hinsichtlich seiner vierten Momente auf unendlich viele Arten durch zehn Massenpunkte ersetzt werden. Einen dieser Punkte kann man der Lage nach willkürlich annehmen; dadurch ist aber die ihm beizulegende Masse völlig bestimmt, und zugleich eine Fläche F^2 zweiter Ordnung, auf welcher die übrigen neun Punkte liegen. Nimmt man auf dieser F^2 den zweiten Punkt beliebig an, so ist dadurch die Masse desselben bestimmt, sowie eine Raumcurve $C^{2,2}$ vierter Ordnung erster Species, auf welcher die letzten acht Punkte liegen. Von diesen acht Punkten ist keiner mehr willkürlich auf $C^{2,2}$ annehmbar, ihre Lagen und ihre Massen sind vielmehr durch die Lage der ersten beiden Punkte bestimmt. Zugleich ergiebt sich:

Wenn ein gegebenes Massensystem eine zu seiner vierten Nullfläche apolare Fläche F^2 zweiter Ordnung besitzt, so kann es hinsichtlich seiner vierten Momente auf unendlich viele Arten durch neun Massenpunkte ersetzt werden. Einer dieser Massenpunkte kann der Lage nach willkürlich auf der apolaren F^2 angenommen werden; dadurch sind Lage und Massen aller neun Punkte bestimmt.

Aus dem Beweise in (7.) scheint übrigens hervorzugehen, dass die letzten acht Massenpunkte durch die Lage des ersten oder der beiden ersten nicht *eindeutig* bestimmt sind; doch dürfte sich dieser Schein als trügerisch erweisen, weil die acht paarweise einander associirten Punkte, welche mit P_1 und P_2 zusammen die Träger des gesuchten zehnpunktigen Massensystemes bilden, mehrfache Punkte der bei jenem Beweise benutzten Fläche Φ sind.

Strassburg i./E., den 29. November 1873.

Zur Theorie der inneren Reibung.

(Von Herrn *Oskar Emil Meyer* in Breslau.)

Für die theoretische Begründung der Elektrodynamik hat man in neuerer Zeit mehrfach die, einem Gedanken von *Laplace* ähnelnde Hypothese zu verwerthen gesucht, dass die von einem elektrisirten Punkte auf einen anderen ausgeübte Kraft nicht momentan zur Wirkung gelange, sondern einer gewissen Zeit bedürfe, die zwischen beiden Punkten gelegene Entfernung zu durchlaufen. Es liegt nahe, dieselbe Vorstellung auf die Elasticität anzuwenden, also von den Kräften der Cohäsion ebenso anzunehmen, dass Ursache und Wirkung nicht in einen und denselben Zeitmoment zusammenfallen. Denn wenn auch die Molecularkräfte, in denen wir den Grund der Cohäsion und Elasticität suchen, nur bei unmessbar kleinem Abstande der auf einander einwirkenden kleinsten Theilchen eine merkliche Stärke besitzen, so ist dieser Abstand doch nicht im mathematischen Sinne unendlich klein; und es wird einer zwar sehr kleinen, jedoch immer noch endlichen Zeit bedürfen, dass die ausgeübte Wirkung, ähnlich wie eine Welle, den Weg von dem wirkenden Theilchen bis zu dem angezogenen oder abgestossenen mit einer freilich sehr grossen, aber doch endlichen Geschwindigkeit durchlaufe. Der ebenfalls sehr kleine Werth der von einem Theilchen auf ein anderes ausgeübten Kraft erfährt also, wenn die Anwendung jener Hypothese berechtigt ist, durch dieselbe eine zwar geringe Correction, aber doch in solchem Betrage, dass dieselbe nur dann vernachlässigt werden darf, wenn die Uebertragung der Kraft mit wirklich unendlich grosser Geschwindigkeit erfolgt.

Ich enthalte mich hier, wo es mir vornehmlich darauf ankommt, die mathematischen Folgerungen aus jener Hypothese zu entwickeln, billig jeder Speculation über die Frage, durch welches Medium die Uebertragung der Kraft vermittelt werde. Ich überlasse es dem Leser, ob er die Vorstellung eines Lichtäthers, wie sie in den älteren mathematischen Untersuchungen über die Elasticität sich findet, festhalten, oder ob er sich den neueren Ideen zuwenden will, nach denen die Uebertragung einer Kraft nur durch unmittelbaren Zusammenstoss der Theilchen, hier also entweder durch die gröberen, die Molekeln, oder durch die feineren, die Atome, erfolgen soll. Denn beide Vor-

stellungen stimmen in dem für jetzt einzig wesentlichen Punkte, dass die Uebertragung der Kraft Zeit erfordert, mit einander überein.

Führt man diese Hypothese in die Theorie der Elasticität ein, so liefert die Rechnung Formeln, welche sich von den bekannten durch hinzugefügte Glieder unterscheiden, durch welche, wie ihre Form sofort erkennen lässt, der inneren Reibung des elastischen Mediums Rechnung getragen wird. Diese Betrachtung führt also zu einer neuen theoretischen Begründung der Differentialgleichungen für die Reibung, durch welche diese Kraft als ein durch zeitliche Verzögerung entstehender Mangel an vollkommener Elasticität erscheint.

Diese neue Herleitung jener Gleichungen wünschte ich an die Stelle derjenigen treten zu lassen, welche ich in meiner ersten Abhandlung über die innere Reibung im 59. Bande dieses Journals gegeben habe, welche ich aber jetzt nicht mehr für allgemein gültig anerkenne.

Die Rechnung will ich nicht bis ins einzelne durchführen, sondern ich beschränke mich auf diejenigen Andeutungen, welche für den, mit den älteren Theorien vertrauten Leser ausreichend sind. Ich lege mir diese Beschränkung um so lieber auf, als ich mich nicht an eine besondere jener Theorien eng anschliessen möchte, sondern mich in grösserer Allgemeinheit auszudrücken vorziehe.

Alle älteren Theorien der Elasticität stützen sich auf die Vorstellung, dass ein Theilchen des Körpers auf ein anderes mit einer Kraft wirke, deren Stärke nur von der Entfernung der beiden Theilchen abhänge. Diese Annahme behalte ich auch hier bei, jedoch mit einer durch die erwähnte Hypothese gebotenen Abänderung: es handelt sich nicht um die Entfernung, in welcher die beiden Theilchen sich zu *derselben* Zeit befinden, sondern um die Entfernung zweier Orte, welche sie zu *verschiedenen* Zeiten einnahmen; für das wirkende Theilchen ist der Ort zu wählen, an welchem es sich zu der Zeit, als die Wirkung ausgeübt wurde, befand; für das angezogene oder abgestossene dagegen sein Ort zu der späteren Zeit, als es die Einwirkung der Kraft empfing.

Die beiden soeben erwähnten Entfernungen mit etwas verschiedener Bedeutung werden einen um so beträchtlicheren Unterschied ihrer Werthe aufweisen, je grösser die Geschwindigkeiten sind, mit denen die Theilchen des elastischen Mediums während der kurzen Zeit, in der die Wirkung ausgeübt und empfangen wird, sich bewegen. Es lässt sich daher ohne Rechnung

übersehen, dass zu den bekannten Ausdrücken der elastischen Kräfte Glieder hinzutreten müssen, welche von der Geschwindigkeit abhängige Kräfte darstellen; und in dem speciellen Falle, dass die elastischen Verrückungen, also auch die Geschwindigkeiten so klein sind, dass ihre höheren Potenzen vernachlässigt werden dürfen, lässt sich sogar erkennen, dass die neu hinzutretenden Glieder lineare Functionen der Geschwindigkeiten sein werden.

Nach dieser Ueberlegung bedarf es kaum noch eines Beweises durch Formeln, dass die neu auftretenden Terme mit den Ausdrücken identisch sind, welche man für die Kräfte der inneren Reibung direct aus der Hypothese *Newtons* hergeleitet hat*), da nach dieser Hypothese die Reibung der Geschwindigkeit der relativen Bewegung der Theilchen gegen einander proportional angenommen wird. Doch mag es nicht ganz überflüssig sein, durch einige Formeln die Sache klarer darzulegen.

Ein Massentheilchen m besitze eine Ruhelage, welche durch die Coordinaten x, y, z bestimmt sei. Zur Zeit t habe es eine Verrückung erlitten, deren Componenten u, v, w seien. Ein zweites Massentheilchen $\mathfrak{m}$, welches auf m eine Wirkung zur Zeit $t-\mathfrak{t}$ ausübt, die zur Zeit t zu dem letzteren gelangt, habe die Gleichgewichtslage $x+\mathfrak{x}$, $y+\mathfrak{y}$, $z+\mathfrak{z}$; zur Zeit $t-\mathfrak{t}$ habe es die Verrückungen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ erlitten. Dann ist der Ausdruck der von $\mathfrak{m}$ auf m ausgeübten Kraft

$$f(r),$$

wo f eine unbekannte Function und r die durch die Gleichung

$$r^2 = (\mathfrak{x}+\mathfrak{u}-u)^2+(\mathfrak{y}+\mathfrak{v}-v)^2+(\mathfrak{z}+\mathfrak{w}-w)^2$$

ausgedrückte Entfernung bedeutet; zugleich besteht die Beziehung

$$r = \varkappa\mathfrak{t},$$

falls $\varkappa$ die constante Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher die Wirkung die Entfernung r in der Zeit $\mathfrak{t}$ durchläuft. Die 3 Componenten der ausgeübten Kraft sind

$$\frac{\mathfrak{x}+\mathfrak{u}-u}{r}f(r), \quad \frac{\mathfrak{y}+\mathfrak{v}-v}{r}f(r), \quad \frac{\mathfrak{z}+\mathfrak{w}-w}{r}f(r).$$

Um diese Ausdrücke weiter zu entwickeln, dient die Bemerkung, dass, wie u, v, w als Functionen von x, y, z und t aufgefasst werden können, ebenso auch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ Functionen und zwar dieselben Functionen von den Argumenten

---

*) *Cauchy,* Exerc. de math. 3ième année. S. 183. *Barré de St. Venant,* Comptes rendus Tome 17. S. 1240. *Stefan,* Wiener Sitzungsberichte, Band 46, Abth. 2, S. 8.

$x+\mathfrak{x}$, $y+\mathfrak{y}$, $z+\mathfrak{z}$, $t-\mathfrak{t}$ sind. Hieraus folgt, falls $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, sowie die Zeit $\mathfrak{t}$ kleine Grössen sind, die Gültigkeit der Entwicklung

$$\mathfrak{u} = u+\frac{du}{dx}\mathfrak{x}+\frac{du}{dy}\mathfrak{y}+\frac{du}{dz}\mathfrak{z}-\frac{du}{dt}\mathfrak{t}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\mathfrak{x}^2+\frac{d^2u}{dy^2}\mathfrak{y}^2+\cdots-2\frac{d^2u}{dx\,dt}\mathfrak{x}\mathfrak{t}-2\frac{d^2u}{dy\,dt}\mathfrak{y}\mathfrak{t}-\cdots\right\}+\cdots$$

und zweier entsprechenden für $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$. Ferner ist, wenn ϱ die Entfernung der Theilchen m und $\mathfrak{m}$ im natürlichen Zustande, also

$$\varrho^2 = \mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2$$

ist, unter Vernachlässigung höherer Potenzen der relativen Verrückungen

$$r = \varrho+\frac{\mathfrak{x}}{\varrho}(\mathfrak{u}-u)+\frac{\mathfrak{y}}{\varrho}(\mathfrak{v}-v)+\frac{\mathfrak{z}}{\varrho}(\mathfrak{w}-w).$$

Entwickelt man endlich

$$\frac{\mathfrak{x}+\mathfrak{u}-u}{r}f(r) = \mathfrak{x}\psi(\varrho)+\mathfrak{x}\psi'(\varrho)(r-\varrho)+(\mathfrak{u}-u)\psi(\varrho),$$

wo zur Abkürzung

$$\psi(\varrho)=\frac{f(\varrho)}{\varrho},\quad \psi'(\varrho)=\frac{d\psi(\varrho)}{d\varrho}$$

gesetzt ist, und ebenso die beiden andern Ausdrücke und setzt aus den obigen Formeln die Werthe ein, so sind die elastischen Kräfte durch Reihen dargestellt, deren einzelne Glieder die Verrückungen u, v, w, die Geschwindigkeiten $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ und die Differentialquotienten dieser 6 Grössen linear als Factoren enthalten.

Es erübrigt noch, die Resultante dieser Kräfte zu finden, das heisst die Summe der obigen Ausdrücke in Bezug auf sämmtliche Theilchen zu bilden, deren Wechselwirkung in Betracht kommt. Diese Rechnung wird sich verschieden gestalten, je nachdem man die Methode *Naviers**) verfolgt und die Resultante der Kräfte selber bildet, oder nach der von *Poisson***) herrührenden die Werthe der resultirenden Druckcomponenten aufstellt, oder endlich nach *Carl Neumanns****) Methode das Potential der elastischen Kräfte entwickelt. Das Ergebniss der Rechnung lässt sich aber in allen Fällen leicht übersehen.

---

*) Mémoires de l'Académie de Paris. Tome 7, 1824. S. 375.

**) Mémoires de l'Académie de Paris. Tome 8, 1829. S. 357. Journal de l'école polytechnique. 20 Cah. Tome 13. 1831. S. 1.

***) Dieses Journal, Bd. 57.

Werden bei dieser Rechnung, wie bisher, alle Glieder vernachlässigt, welche in Bezug auf die Verrückungen u, v, w und die Geschwindigkeiten zweiter oder höherer Ordnung sind, so ist es erlaubt, die Zeit t überall durch die Gleichung

$$\varrho = \varkappa t$$

zu definiren. In der veränderlichen Grösse t sind also nur gerade Potenzen von x, y, z enthalten.

Dies erleichtert wesentlich die Ausscheidung derjenigen Glieder, welche bei den nach x, y, z auszuführenden Summationen im Falle eines isotropen oder auch eines durch drei auf einander rechtwinklige Ebenen symmetrisch theilbaren Mediums verschwinden. Man erkennt aus der für u aufgestellten Formel leicht, dass, wenn in den Schlussformeln der Rechnung ein z. B. u enthaltendes Glied auftritt, welches nicht verschwindet, weil es nur gerade Potenzen von x, y, z enthält, dann allemal ein ähnliches hinzutreten muss, welches mit dem Factor $\frac{du}{dt}$ behaftet ist; dasselbe gilt von v und w und den entsprechenden Componenten der Geschwindigkeit.

Hieraus ergiebt sich, dass die bekannten Formeln für die Componenten des elastischen Druckes folgende abgeänderte Gestalt annehmen werden:

$$-X_x = k\left(2\frac{du}{dx}+\vartheta\right)+\eta\frac{d}{dt}\left(2\frac{du}{dx}+\vartheta\right),$$

$$-X_y = -Y_x = k\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)+\eta\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)$$

und entsprechend die übrigen; hierin bedeutet ϑ die räumliche Dilatation

$$\vartheta = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz},$$

und es ist k die von *Poisson* ebenso bezeichnete Elasticitätsconstante, während η als Reibungscoefficient zu deuten ist.

Die Differentialgleichungen zur Bestimmung von u, v, w werden also, wenn ε die Dichtigkeit bedeutet:

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dt^2} = k\left(\triangle u+2\frac{d\vartheta}{dx}\right)+\eta\frac{d}{dt}\left(\triangle u+2\frac{d\vartheta}{dx}\right)$$

$$\varepsilon\frac{d^2v}{dt^2} = k\left(\triangle v+2\frac{d\vartheta}{dy}\right)+\eta\frac{d}{dt}\left(\triangle v+2\frac{d\vartheta}{dy}\right)$$

$$\varepsilon\frac{d^2w}{dt^2} = k\left(\triangle w+2\frac{d\vartheta}{dz}\right)+\eta\frac{d}{dt}\left(\triangle w+2\frac{d\vartheta}{dz}\right),$$

worin $\triangle$ eine Abkürzung für die Operation

$$\triangle = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$

ist. Diese Gleichungen enthalten den Beweis für die in der Einleitung aufgestellte Behauptung, dass unsere Hypothese zu Formeln führe, welche sowohl der Elasticität, als auch der inneren Reibung des Mediums Rechnung tragen.

Die vorstehenden Gleichungen dürfen sowohl auf feste, als auch auf flüssige und gasförmige Medien angewandt werden. Im ersteren Falle, für feste Körper, muss jedoch die, bekanntlich auch für die einfacheren *Navier*schen und *Poisson*schen Gleichungen erforderliche Verbesserung angebracht werden, dass statt der einzigen Elasticitätsconstante deren zwei einzuführen sind. Vielleicht hat man ebenso für diese Classe von Medien zwei verschiedene Constanten der inneren Reibung zu unterscheiden, je nachdem die Bewegung mit oder ohne Aenderung des Volumens vor sich geht.

Für den Fall einer tropfbaren oder elastischen Flüssigkeit ist diese Verbesserung überflüssig. Die elastischen Druckkräfte fallen dann aus den Formeln fort oder werden vielmehr durch den hydrostatischen Druck ersetzt; und mit den von diesem abhängigen Gliedern der Formeln vereinigen sich von selbst die Ausdrücke derjenigen Reibung, welche bei einer Aenderung des Volumens ausgeübt wird. Für tropfbar oder elastisch flüssige Medien existirt also nur ein einziger, der Beobachtung zugänglicher Reibungscoefficient.

Zum Schluss bilden wir noch die Werthe der beiden Constanten k und η. Nach *Poisson* ist der Werth der Elasticitätsconstante

$$k = \frac{1}{30\lambda^3} \Sigma \varrho^3 \frac{d\psi(\varrho)}{d\varrho},$$

wo λ den Abstand zweier benachbarten kleinsten Theilchen bezeichnet; also wird der Reibungscoefficient

$$\eta = -\frac{1}{30\varkappa\lambda^3} \Sigma \varrho^4 \frac{d\psi(\varrho)}{d\varrho}.$$

Diese letztere Formel scheint zu einem doppelten Bedenken Anlass zu geben, erstens wegen des negativen Vorzeichens, zweitens wegen des Umstandes, dass die Potenz der sehr kleinen Grösse ϱ einen Grad höher ist, als in k; man könnte also vermuthen, dass η sehr klein und negativ sei. Dieses Bedenken aber wird durch die Ueberlegung beseitigt, dass die Function $\psi(\varrho)$ und ihr Differentialquotient mit wachsendem Argumente einen Wechsel der Vorzeichen erleiden müssen.

Breslau im October 1873.

Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten elastischen Schale.

(Von Herrn *H. Aron*.)

Herr *Kirchhoff* hat zuerst in seiner Abhandlung, dieses Journal Bd. 40, aus den allgemeinen Gleichungen der Elasticität die wahren Gleichungen für kleine Verschiebungen und Schwingungen unendlich dünner elastischer Platten hergeleitet und aus ihnen die Klangfiguren auf kreisrunden, dünnen Scheiben berechnet. Im 56. Bande des Journals entwickelte ebenfalls Herr *Kirchhoff* die Theorie der Bewegung und des Gleichgewichts unendlich dünner Stäbe, bei welchen, ohne dass die Elemente mehr als kleine Dilatationen erleiden, — welches die einzige Voraussetzung der allgemeinen Elasticitätstheorie ist — endliche Formänderungen möglich sind, und bemerkt zugleich, dass man seine Resultate für unendlich dünne Platten auf dieselbe Weise erhalten könne. Demgemäss hat dann Herr *Gehring* in seiner in Berlin 1860 eingereichten Dissertation die Differentialgleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung unendlich dünner Platten, die kleine Formänderungen erleiden, behandelt, indem er zugleich eine krystallinische Beschaffenheit der Platten zuliess. *Clebsch* hat sodann in seinem Buche: „Theorie der Elasticität fester Körper“, auch unter Anwendung der von Herrn *Kirchhoff* bei Gelegenheit der Behandlung dünner Stäbe entwickelten Principien, die Gleichungen für endliche Formänderungen dünner Platten, die in den Elementen nur unendlich kleine Dilatationen erleiden, aufgestellt und aus ihnen die Gleichungen für unendlich kleine Verschiebungen hergeleitet. Hier will ich, gestützt auf die vorher erwähnten Arbeiten, für beliebig gekrümmte Flächen, also für sehr dünne elastische Schalen, die endliche Formänderungen erleiden können, bei denen aber in den Elementen nur unendlich kleine Dilatationen eintreten, die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung aufstellen, alsdann aber den Fall unendlich kleiner Verschiebungen besonders berücksichtigen.

I.

Die Coordinaten der Mittelfläche der Schale, bezogen auf ein geradlinig rechtwinkliges, festes Coordinatensystem, seien X, Y, Z. Diese 3 Coordinaten

seien als Functionen zweier unabhängigen Variablen u, v gegeben. Man setze sodann nach *Gauss*

$$\frac{\partial X}{\partial u} = a, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = b, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = c,$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = a', \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = b', \quad \frac{\partial Z}{\partial v} = c';$$

ferner

$$a^2 + b^2 + c^2 = E,$$
$$aa' + bb' + cc' = F,$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = G.$$

Ich will nun die uv-Coordinaten so wählen, dass $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ zwei Schaaren sich rechtwinklig schneidender Curven auf der Fläche bilden, oder mit anderen Worten, dass $F = 0$ ist. Ein solches Coordinatensystem auf der Fläche ist nicht nur immer vorhanden, sondern es giebt sogar noch eine unendliche Anzahl auf jeder Fläche. Haben die uv-Coordinaten diese Eigenschaft, und ist ds ein Bogenelement auf der Fläche, so ist

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Es soll nun s_1 die Länge der Curve $v = \text{const.}$, die durch den Punkt u, v geht, bezeichnen und zwar von ihrem Schnittpunkte mit der Curve $u = 0$ an bis zu dem Punkte u, v; s_2 dagegen bezeichne die Länge der Curve $u = \text{const.}$, die durch den Punkt u, v geht, von ihrem Schnittpunkte mit der Curve $v = 0$ an bis zum Punkte u, v.

Es ist alsdann

$$ds_1^2 = E\,du^2, \quad ds_2^2 = G\,dv^2,$$

weil im Verlauf dieser Curven u resp. v constant sind, also du resp. $dv = 0$ sind.

Ich zerlege durch zwei solche Curvenschaaren $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ die Fläche in eine doppelt unendliche Schaar kleiner Rechtecke, deren Dimensionen in Breite und Länge von der Ordnung der Dicke der Schale sind. Die Raumcoordinaten der Mittelpunkte P dieser Rechtecke, welche vor der Deformation X, Y, Z waren, mögen nach der Deformation ξ, η, ζ sein. Ein solches Element erleidet, während die Schale endliche Formänderungen erfährt, nur unendlich kleine Deformationen, und die diesen Deformationen entsprechende Arbeit lässt sich somit aus den allgemeinen Gleichungen der Elasticität finden.

Zu diesem Zwecke denke ich mir in jedem Elemente ein zweites Coordinatensystem. Dieses sei weder im Elemente noch im Raume fest. Es

soll nun seine Lage für jede Form der Schale festgestellt werden. Bei der Ruhelage der Schale sei sein Anfangspunkt in P, dem Mittelpunkte des gerade betrachteten Elementes, und die Axe der x, y und z habe die Richtung von ds_1, ds_2 und n, der Normale zur Fläche im betreffenden Punkte. $x+\mathfrak{u}_0$, $y+\mathfrak{v}_0$, $z+\mathfrak{w}_0$ seien alsdann die Coordinaten irgend eines Punktes im Elemente, bezogen auf das bezeichnete Coordinatensystem. Hier sollen x, y, z die Coordinaten desselben Punktes sein bei der Ruhelage des Elementes für sich. Diese Ruhelage des Elementes für sich ist aber bei gekrümmten Flächen eine andere, als die Ruhelage desselben Elementes, während es mit der Fläche verbunden ist; denn alsdann wird von dem einen Theil ein Zwang auf den andern ausgeübt, dadurch wird erst dem Elemente, das an sich in der Tangentialebene zu bleiben bestrebt ist, seine Krümmung ertheilt. Nach der Deformation seien die Coordinaten desselben materiellen Punktes in Bezug auf das verlegte Coordinatensystem

$$x+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u}, \quad y+\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v}, \quad z+\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w}.$$

Die Lage der Coordinatensysteme im Elemente für sich und im Elemente in Verbindung mit der Schale während oder nach der Deformation sollen nun so bestimmt werden, dass $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ weder gemeinschaftliche Verschiebungen, noch gemeinschaftliche Drehungen enthalten sollen. Sollen nämlich keine gemeinschaftlichen Verschiebungen mitbetrachtet sein, so muss der Anfangspunkt des Coordinatensystems sich noch in dem mit P bezeichneten Punkt befinden, es muss für

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

auch

$$\mathfrak{u}_0=0, \quad \mathfrak{v}_0=0, \quad \mathfrak{w}_0=0,$$
$$\mathfrak{u}=0, \quad \mathfrak{v}=0, \quad \mathfrak{w}=0$$

sein.

Es soll nun aber auch von gemeinschaftlichen Drehungen abgesehen werden. — Wenn die Lage eines Punktes in einem Körper gegeben ist, so ist durch die Lage einer Ebene, die durch diesen Punkt geht, und einer nach einer Richtung von diesem Punkte ausgehenden Geraden die Lage des Körpers bestimmt. Es soll nun die xy-Ebene in beiden veränderten Lagen so gewählt sein, dass sie eine Tangentialebene im Punkte P zur Fläche bildet, in die die ursprüngliche xy-Ebene in beiden Fällen übergeht. Im Punkte P ist alsdann

$$\frac{\partial \mathfrak{w}_0}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}_0}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}=0.$$

Ferner soll die x-Axe in beiden Fällen die Tangente der Curve im Punkte P sein, die die ursprüngliche x-Axe jedes Mal bildet, und zwar mit der positiven Seite dahin gerichtet, wo die positive Seite der ursprünglichen x-Axe liegt.

Es ist alsdann im Punkte P auch $\frac{\partial \mathfrak{v}_0}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} = 0$. Da aber dann in der Nähe des Punktes P keine Verschiebung oder Drehung stattgefunden hat, so hat überhaupt keine gemeinschaftliche Verschiebung oder Drehung stattgefunden; dies haben wir dadurch erreicht, dass für die jedesmalige Lage der Coordinaten folgende sechs Festsetzungen getroffen wurden, dass für

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

$$\mathfrak{u}_0 = 0, \quad \mathfrak{v}_0 = 0, \quad \mathfrak{w}_0 = 0.$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}_0}{\partial y} = 0,$$

resp.

$$\mathfrak{u} = 0, \quad \mathfrak{v} = 0, \quad \mathfrak{w} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} = 0$$

sein soll.

Die Richtungscosinusse der x-, y- und z-Axe nach der Deformation mit den drei festen Coordinaten-Axen seien resp.

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \gamma_0, \quad \alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2,$$

und ξ', η', ζ' seien alsdann die Coordinaten des ursprünglichen Punktes x, y, z im Elemente mit den festen Coordinatenaxen. Es lässt sich nun schon erkennen, dass, wenn die Lage des Mittelpunktes P der einzelnen Elemente nach der Deformation gegeben ist, also die Coordinaten ξ, η, ζ, die Form der Schale überhaupt bestimmt ist; es müssen sich also auch eindeutig dadurch die 9 Grössen

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \gamma_0, \quad \alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2$$

bestimmen, ferner für jeden Punkt x, y, z im Elemente P sind dann schon bestimmt ξ', η', ζ' und, wenn die ursprüngliche Form der Schale bekannt ist, auch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$.

Für die 9 Richtungscosinusse bestehen bereits 6 Gleichungen

$$(1.) \quad \begin{cases} \alpha_0^2+\beta_0^2+\gamma_0^2 = 1, & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 = 0, \\ \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = 1, & \alpha_2\alpha_0+\beta_2\beta_0+\gamma_2\gamma_0 = 0, \\ \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 = 1, & \alpha_0\alpha_1+\beta_0\beta_1+\gamma_0\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Es handelt sich nur darum, noch drei Gleichungen zu finden, die sie mit ξ, η, ζ in Relation setzen.

Der Punkt u, v hat nach der Deformation die Coordinaten ξ, η, ζ. Dem Punkte $u+du$, v entspricht somit nach der Deformation der Punkt

$$\xi+\frac{\partial\xi}{\partial u}du, \quad \eta+\frac{\partial\eta}{\partial u}du, \quad \zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial u}du$$

oder, da

$$du = \frac{ds_1}{\sqrt{E}},$$

$$\xi+\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{ds_1}{\sqrt{E}}, \quad \eta+\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{ds_1}{\sqrt{E}}, \quad \zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{ds_1}{\sqrt{E}}.$$

Während ξ, η, ζ die Coordinaten des Anfangspunktes des Elementes ds_1 nach der Deformation sind, sind das die Endcoordinaten. Nun gehe ds_1 bei der Deformation in ds_1' über, somit haben wir als die Richtungscosinusse der Elemente ds_1' nach der Deformation

$$\frac{\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{ds_1}{\sqrt{E}}}{ds_1'}, \quad \frac{\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{ds_1}{\sqrt{E}}}{ds_1'}, \quad \frac{\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{ds_1}{\sqrt{E}}}{ds_1'}.$$

Es sei nun ε_1 die Dilatation in der Richtung der x-Axe, es ist alsdann

$$\frac{ds_1'-ds_1}{ds_1} = \varepsilon_1, \quad ds_1' = ds_1(1+\varepsilon_1);$$

setzen wir das oben ein, so folgt, dass die Richtungscosinusse der Elemente ds_1 nach der Deformation

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{1}{(1+\varepsilon_1)\sqrt{E}}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{1}{(1+\varepsilon_1)\sqrt{E}}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{1}{(1+\varepsilon_1)\sqrt{E}}$$

sind.

Da aber das Element ds_1' auch nach der Formänderung die x-Axe bildet, deren Richtungscosinusse α_0, β_0, γ_0 sind, so haben wir:

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{1}{(1+\varepsilon_1)\sqrt{E}}=\alpha_0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{1}{(1+\varepsilon_1)\sqrt{E}}=\beta_0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{1}{(1+\varepsilon_1)\sqrt{E}}=\gamma_0;$$

daher:

$$(2.) \quad \frac{\partial\xi}{\partial u}=\alpha_0\sqrt{E}(1+\varepsilon_1), \quad \frac{\partial\eta}{\partial u}=\beta_0\sqrt{E}(1+\varepsilon_1), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial u}=\gamma_0\sqrt{E}(1+\varepsilon_1).$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir, indem wir mit

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \gamma_0, \quad \alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2$$

multipliciren und je drei addiren, andere Formen für diese drei Gleichungen,

die wir später brauchen werden:

$$(2^a.)\qquad \begin{cases} \alpha_0\frac{\partial\xi}{\partial u}+\beta_0\frac{\partial\eta}{\partial u}+\gamma_0\frac{\partial\zeta}{\partial u}=\sqrt{E}(1+\varepsilon_1), \\ \alpha_1\frac{\partial\xi}{\partial u}+\beta_1\frac{\partial\eta}{\partial u}+\gamma_1\frac{\partial\zeta}{\partial u}=0, \\ \alpha_2\frac{\partial\xi}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial\eta}{\partial u}+\gamma_2\frac{\partial\zeta}{\partial u}=0. \end{cases}$$

Für die Richtungscosinusse des Elementes ds_2 nach der Deformation finden wir ähnlich, wenn wir seine Dilatation gleich ε_2 setzen:

$$\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)\sqrt{G}},\quad \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)\sqrt{G}},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)\sqrt{G}}.$$

Aber das Element ds_2 bildet nach der Deformation nicht mehr die η-Axe, sondern sie weicht von ihr um einen kleinen Winkel τ ab, folglich

$$\alpha_1\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)\sqrt{G}}+\beta_1\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)\sqrt{G}}+\gamma_1\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)\sqrt{G}}=\cos\tau \quad \text{oder} \quad =1,$$

indem wir Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen. Da aber die xy-Ebene auch nach der Deformation die Elemente ds_1 und ds_2 enthalten soll, so bildet die x-Axe mit ds_2 nach der Deformation den Winkel $90^0-\tau$, daher:

$$\alpha_0\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)\sqrt{G}}+\beta_0\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)\sqrt{G}}+\gamma_0\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)\sqrt{G}}=\cos(90-\tau)=\sin\tau=\tau,$$

indem wir Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen. Dagegen bildet die z-Axe nach der Deformation noch immer einen rechten Winkel mit ds_2, und wir haben:

$$\alpha_2\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)\sqrt{G}}+\beta_2\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)\sqrt{G}}+\gamma_2\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)\sqrt{G}}=0.$$

Diese Gleichungen umgeformt und umgestellt und die Grösse $\tau\varepsilon$, als Grösse zweiter Ordnung, vernachlässigt, geben:

$$(3^a.)\qquad \begin{cases} \alpha_0\frac{\partial\xi}{\partial v}+\beta_0\frac{\partial\eta}{\partial v}+\gamma_0\frac{\partial\zeta}{\partial v}=\tau\sqrt{G}, \\ \alpha_1\frac{\partial\xi}{\partial v}+\beta_1\frac{\partial\eta}{\partial v}+\gamma_1\frac{\partial\zeta}{\partial v}=\sqrt{G}(1+\varepsilon_2), \\ \alpha_2\frac{\partial\xi}{\partial v}+\beta_2\frac{\partial\eta}{\partial v}+\gamma_2\frac{\partial\zeta}{\partial v}=0. \end{cases}$$

Die Axen der x, y, z bilden nach der Deformation mit den Axen X, Y, Z die Neigungswinkel, deren Cosinusse

$$\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0,\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2$$

sind; umgekehrt, die X, Y, Z mit den x, y, z die Neigungswinkel deren Cosinusse

$$\alpha_0,\quad \alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \beta_0,\quad \beta_1,\quad \beta_2,\quad \gamma_0,\quad \gamma_1,\quad \gamma_2;$$

also ist:

$$\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2=1,\qquad \alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0,$$
$$\beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2=1,\qquad \beta_0\gamma_0+\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2=0,$$
$$\gamma_0^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2=1,\qquad \gamma_0\alpha_0+\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2=0.$$

Wir multipliciren die Gleichungen (3^{α}.) der Reihe nach mit:

$$\alpha_0,\quad \alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \beta_0,\quad \beta_1,\quad \beta_2,\quad \gamma_0,\quad \gamma_1,\quad \gamma_2$$

und addiren je drei, so erhalten wir:

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial v} = \sqrt{G}\,(\alpha_1(1+\varepsilon_2)+\alpha_0\tau), \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial v} = \sqrt{G}\,(\beta_1(1+\varepsilon_2)+\beta_0\tau), \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial v} = \sqrt{G}\,(\gamma_1(1+\varepsilon_2)+\gamma_0\tau). \end{cases}$$

Die 6 Gleichungen (2.) und (3.) zusammen bilden in der That, da sie ausser den gesuchten Grössen noch drei neue, ε_1, ε_2, τ enthalten, drei neue Gleichungen. Die Grössen ε_1, ε_2, τ lassen sich leicht durch ξ, η, ζ ausdrücken.

Aus (2.) erhalten wir durch Quadriren und Addiren eine Gleichung für ε_1:

$$(4.)\qquad \left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2 = E(1+\varepsilon_1)^2.$$

Aus (3.) folgt durch Quadriren und Addiren mit Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung:

$$(5.)\qquad \left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2 = G(1+\varepsilon_2)^2.$$

Aus (2.) und (3.) fliesst, indem wir je 2 gleichgeordnete multipliciren und addiren mit Vernachlässigung von Grössen höherer Ordnung,

$$(6.)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}+\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}+\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v} = \sqrt{EG}\,\tau,$$

oder bezeichne ich nach *Gauss*, was E, G, F für die Fläche X, Y, Z bedeutet, für die Fläche ξ, η, ζ mit E', G', F', so folgt:

$$\sqrt{\frac{E'}{E}}=1+\varepsilon_1,\qquad \sqrt{\frac{G'}{G}}=1+\varepsilon_2,\qquad \frac{F'}{\sqrt{EG}}=\tau.$$

Aus diesen Gleichungen kann man bereits einen bemerkenswerthen

Schluss ziehen. Vernachlässigen wir in diesen Gleichungen die kleinen Grössen ε_1, ε_2, τ gegen die endlichen Grössen, so folgt:

$$\sqrt{\frac{E'}{E}} = 1, \quad \sqrt{\frac{G'}{G}} = 1, \quad \frac{F'}{\sqrt{EG}} = 0,$$

$$E = E', \qquad G = G', \qquad F = F' = 0;$$

d. h. bei allen Formänderungen bleiben die Schalen aufeinander abwickelbar. Da wir aber kleine Grössen gegen endliche vernachlässigt haben, so dürfen wir nur sagen, dass die Schalen mit sehr kleinen Abweichungen aufeinander abwickelbare Flächen bleiben.

Nunmehr handelt es sich darum, ξ', η', ζ' sowie die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ als Functionen von u und v zu erhalten.

Zunächst ergeben sich sofort 3 Gleichungen.

Weil ξ', η', ζ' der Punkt

$$x+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u}, \qquad y+\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v}, \qquad z+\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w}$$

im Elemente P ist, dessen Anfangspunkt die Coordinaten ξ, η, ζ und dessen Axen die Richtungscosinusse

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \gamma_0, \quad \alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2$$

haben, ist

$$(7.) \quad \begin{cases} \xi' = \xi+\alpha_0(x+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})+\alpha_1(y+\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})+\alpha_2(z+\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w}), \\ \eta' = \eta+\beta_0(x+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})+\beta_1(y+\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})+\beta_2(z+\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w}), \\ \zeta' = \zeta+\gamma_0(x+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})+\gamma_1(y+\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})+\gamma_2(z+\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w}). \end{cases}$$

Um noch fernere 3 Gleichungen zu erhalten, stelle ich folgende Betrachtungen an: Einem Werthsystem u, v entspricht ein bestimmtes Werthsystem s_1, s_2: es lässt sich somit ξ, η, ζ und die Cosinusse der Neigungswinkel in der Nähe eines Punktes u, v als Functionen von s_1 und s_2 auffassen. ξ', η', ζ' stellen sich entsprechend als Functionen von

$$s_1+x+\mathfrak{u}_0, \qquad s_2+y+\mathfrak{v}_0, \qquad z$$

dar, demnach ist

$$\frac{\partial\xi'}{\partial s_1} = \frac{\partial\xi'}{\partial(s_1+x+\mathfrak{u}_0)} \cdot \frac{\partial(s_1+x+\mathfrak{u}_0)}{\partial s_1} = \frac{\partial\xi'}{\partial(s_1+x+\mathfrak{u}_0)} \cdot \left(1+\frac{\partial\mathfrak{u}_0}{\partial s_1}\right),$$

$$\frac{\partial\xi'}{\partial x} = \frac{\partial\xi'}{\partial(s_1+x+\mathfrak{u}_0)} \cdot \frac{\partial(s_1+x+\mathfrak{u}_0)}{\partial x} = \frac{\partial\xi'}{\partial(s_1+x+\mathfrak{u}_0)} \cdot \left(1+\frac{\partial\mathfrak{u}_0}{\partial x}\right),$$

da x von s_1 unabhängig ist.

Aber $\frac{\partial\mathfrak{u}_0}{\partial x}$ ist von der Ordnung der Dilatation, also unendlich klein

und gegen 1 zu vernachlässigen, $\frac{\partial u_0}{\partial s_1}$ ist dagegen unendlich von einer noch höheren Ordnung, wie alsbald unten gezeigt werden soll; wir dürfen daher bis auf kleine Grössen $\frac{\partial \xi'}{\partial s_1} = \frac{\partial \xi'}{\partial x}$ setzen, oder auch

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \xi'}{\partial u} = \frac{\partial \xi'}{\partial x},$$

ähnlich folgt

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \eta'}{\partial u} = \frac{\partial \eta'}{\partial x}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \zeta'}{\partial u} = \frac{\partial \zeta'}{\partial x},$$

ebenso folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \xi'}{\partial v} = \frac{\partial \xi'}{\partial y}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \eta'}{\partial v} = \frac{\partial \eta'}{\partial y}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \zeta'}{\partial v} = \frac{\partial \zeta'}{\partial y};$$

indem wir das Gleichungssystem (7.) erst nach x differentiiren, dann nach u und mit $\sqrt{E}$ dividiren, ebenso nach y differentiiren, dann nach v und mit $\sqrt{G}$ dividiren, erhalten wir 12 Gleichungen; in je zweien sind die linken Seiten gleich, indem wir die rechten gleich setzen, eliminiren wir die 6 Ableitungen von ξ', η', ζ' und erhalten 6 Gleichungen für die partiellen Differentialquotienten von $\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w}$ nach x und y; die erste dieser Gleichungen lautet:

$$\alpha_0\left(1+\frac{\partial(u_0+\mathfrak{u})}{\partial x}\right)+\alpha_1\frac{\partial(\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial(\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E}}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial \alpha_0}{\partial u}(x+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})+\alpha_0\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial u}$$

$$+\frac{\partial \alpha_1}{\partial u}(y+\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})+\alpha_1\frac{\partial(\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})}{\partial u}$$

$$+\frac{\partial \alpha_2}{\partial u}(z+\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})+\alpha_2\frac{\partial(\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})}{\partial u}\Big).$$

Wir dürfen nun $\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w}$ gegen x, y und z vernachlässigen; aber auch $\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial u}$ etc. ist gegen $\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial x}$ etc. zu vernachlässigen, denn es ist

$$\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial u} = \sqrt{E}\,\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial s_1}.$$

In $\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial s_1}$ ist der Zähler die Differenz der Verschiebungen *innerhalb* der Elemente in der Richtung der x-Axe an zwei *entsprechenden* Punkten *benachbarter* Elemente; der Nenner ∂s_1 ist der Abstand der Mittelpunkte dieser Elemente, geschätzt in der Richtung der x-Axe. In $\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial x}$ bedeutet der Zähler ebenfalls eine Differenz von Verschiebungen innerhalb eines Elementes,

allerdings hier an 2 *benachbarten Punkten desselben* Elementes, dennoch aber ist er von derselben Ordnung wie oben; der Nenner dx dagegen ist ein unendlich kleiner Theil von ds_1; somit ist $\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial s_1}$ sehr klein und zu vernachlässigen gegen $\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial x}$; dasselbe gilt von den entsprechenden Ausdrücken, daher folgt:

$$\alpha_0\Big(1+\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial x}\Big)+\alpha_1\frac{\partial(\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial(\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{E}}\Big(\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\alpha_0}{\partial u}x+\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}y+\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}z\Big),$$

$$\beta_0\Big(1+\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial x}\Big)+\beta_1\frac{\partial(\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})}{\partial x}+\beta_2\frac{\partial(\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{E}}\Big(\frac{\partial\eta}{\partial u}+\frac{\partial\beta_0}{\partial u}x+\frac{\partial\beta_1}{\partial u}y+\frac{\partial\beta_2}{\partial u}z\Big),$$

$$\gamma_0\Big(1+\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial x}\Big)+\gamma_1\frac{\partial(\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})}{\partial x}+\gamma_2\frac{\partial(\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{E}}\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial u}+\frac{\partial\gamma_0}{\partial u}x+\frac{\partial\gamma_1}{\partial u}y+\frac{\partial\gamma_2}{\partial u}z\Big).$$

Entsprechend ergiebt die Differentiation nach y und v

$$\alpha_0\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial y}+\alpha_1\Big(1+\frac{\partial(\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})}{\partial y}\Big)+\alpha_2\frac{\partial(\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{G}}\Big(\frac{\partial\xi}{\partial v}+\frac{\partial\alpha_0}{\partial v}x+\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}y+\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}z\Big),$$

$$\beta_0\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial y}+\beta_1\Big(1+\frac{\partial(\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})}{\partial y}\Big)+\beta_2\frac{\partial(\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{G}}\Big(\frac{\partial\eta}{\partial v}+\frac{\partial\beta_0}{\partial v}x+\frac{\partial\beta_1}{\partial v}y+\frac{\partial\beta_2}{\partial v}z\Big),$$

$$\gamma_0\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial y}+\gamma_1\Big(1+\frac{\partial(\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})}{\partial y}\Big)+\gamma_2\frac{\partial(\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{G}}\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\frac{\partial\gamma_0}{\partial v}x+\frac{\partial\gamma_1}{\partial v}y+\frac{\partial\gamma_2}{\partial v}z\Big).$$

Indem wir die ersten und letzten drei Gleichungen der Reihe nach mit

$$\alpha_0,\quad \beta_0,\quad \gamma_0,\quad \alpha_1,\quad \beta_1,\quad \gamma_1,\quad \alpha_2,\quad \beta_2,\quad \gamma_2$$

multipliciren und je drei addiren, erhalten wir mit Rücksicht auf $(2^a.)$ und $(3^a.)$:

$$(7^a.)\begin{cases}\dfrac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial x}=\varepsilon_1+\dfrac{1}{\sqrt{E}}\Big(\alpha_0\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial u}+\beta_0\dfrac{\partial\beta_1}{\partial u}+\gamma_0\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u}\Big)y+\dfrac{1}{\sqrt{E}}\Big(\alpha_0\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial u}+\beta_0\dfrac{\partial\beta_2}{\partial u}+\gamma_0\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u}\Big)z,\\ \dfrac{\partial(\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\Big(\alpha_1\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial u}+\beta_1\dfrac{\partial\beta_0}{\partial u}+\gamma_1\dfrac{\partial\gamma_0}{\partial u}\Big)x+\dfrac{1}{\sqrt{E}}\Big(\alpha_1\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial u}+\beta_1\dfrac{\partial\beta_2}{\partial u}+\gamma_1\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u}\Big)z,\\ \dfrac{\partial(\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\Big(\alpha_2\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial u}+\beta_2\dfrac{\partial\beta_0}{\partial u}+\gamma_2\dfrac{\partial\gamma_0}{\partial u}\Big)x+\dfrac{1}{\sqrt{E}}\Big(\alpha_2\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial u}+\beta_2\dfrac{\partial\beta_1}{\partial u}+\gamma_2\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u}\Big)y;\end{cases}$$

ferner:

$$(7^b.)\begin{cases}\dfrac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial y}=\tau+\dfrac{1}{\sqrt{G}}\Big(\alpha_0\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial v}+\beta_0\dfrac{\partial\beta_1}{\partial v}+\gamma_0\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial v}\Big)y+\dfrac{1}{\sqrt{G}}\Big(\alpha_0\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial v}+\beta_0\dfrac{\partial\beta_2}{\partial v}+\gamma_0\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial v}\Big)z,\\ \dfrac{\partial(\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})}{\partial y}=\varepsilon_2+\dfrac{1}{\sqrt{G}}\Big(\alpha_1\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial v}+\beta_1\dfrac{\partial\beta_0}{\partial v}+\gamma_1\dfrac{\partial\gamma_0}{\partial v}\Big)x+\dfrac{1}{\sqrt{G}}\Big(\alpha_1\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial v}+\beta_1\dfrac{\partial\beta_2}{\partial v}+\gamma_1\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial v}\Big)z,\\ \dfrac{\partial(\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\Big(\alpha_2\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial v}+\beta_2\dfrac{\partial\beta_0}{\partial v}+\gamma_2\dfrac{\partial\gamma_0}{\partial v}\Big)x+\dfrac{1}{\sqrt{G}}\Big(\alpha_2\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial v}+\beta_2\dfrac{\partial\beta_1}{\partial v}+\gamma_2\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial v}\Big)y.\end{cases}$$

Es genügt, die Coefficienten x, y, z bis auf Grössen erster Ordnung zu berücksichtigen; denn da x, y, z selbst Grössen erster Ordnung sind, ist der dadurch entstehende Fehler von der zweiten Ordnung.

Nun ist nach Gleichung (2.) bis auf kleine Grössen

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\xi}{\partial u}, \quad \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\eta}{\partial u}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\zeta}{\partial u},$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\xi}{\partial v}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\eta}{\partial v}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\zeta}{\partial v}.$$

Ich setze nun analog der *Gauss*ischen Bezeichnungsweise, indem ich aber deutsche Buchstaben für die lateinischen wähle, um zu bezeichnen, dass die Fläche eine andere ist, als während der Ruhelage,

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \mathfrak{a}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial u} = \mathfrak{b}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial u} = \mathfrak{c},$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial v} = \mathfrak{a}', \quad \frac{\partial\eta}{\partial v} = \mathfrak{b}', \quad \frac{\partial\zeta}{\partial v} = \mathfrak{c}'.$$

Daher folgt:

$$\alpha_0\frac{\partial\alpha_1}{\partial u} + \beta_0\frac{\partial\beta_1}{\partial u} + \gamma_0\frac{\partial\gamma_1}{\partial u} = \frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{E}}\frac{\partial\left(\frac{\mathfrak{a}'}{\sqrt{G}}\right)}{\partial u} + \frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{E}}\frac{\partial\left(\frac{\mathfrak{b}'}{\sqrt{G}}\right)}{\partial u} + \frac{\mathfrak{c}}{\sqrt{E}}\frac{\partial\left(\frac{\mathfrak{c}'}{\sqrt{G}}\right)}{\partial u}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\mathfrak{a}\frac{\partial\mathfrak{a}'}{\partial u} + \mathfrak{b}\frac{\partial\mathfrak{b}'}{\partial u} + \mathfrak{c}\frac{\partial\mathfrak{c}'}{\partial u}\right) + \frac{1}{\sqrt{E}}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}\mathfrak{c}')\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\right)}{\partial u}.$$

Nun ist aber bis auf kleine Grössen:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}\mathfrak{c}' = F' = 0$$

wie oben gezeigt ist; ferner ist:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\xi}{\partial v\partial u},$$

daher:

$$\frac{\partial\mathfrak{a}'}{\partial u} = \frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial v},$$

daher:

$$\alpha_0\frac{\partial\alpha_1}{\partial u} + \beta_0\frac{\partial\beta_1}{\partial u} + \gamma_0\frac{\partial\gamma_1}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\mathfrak{a}\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial v} + \mathfrak{b}\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial v} + \mathfrak{c}\frac{\partial\mathfrak{c}}{\partial v}\right) = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial E'}{\partial v};$$

aber E' war bis auf kleine Grössen gleich E, daher:

$$(8.) \qquad \alpha_0\frac{\partial\alpha_1}{\partial u} + \beta_0\frac{\partial\beta_1}{\partial u} + \gamma_0\frac{\partial\gamma_1}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}.$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$(9.) \qquad \alpha_1 \frac{\partial \alpha_0}{\partial v} + \beta_1 \frac{\partial \beta_0}{\partial v} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_0}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial u}.$$

Nun ist

$$\alpha_2 \mathfrak{a} + \beta_2 \mathfrak{b} + \gamma_2 \mathfrak{c} = 0,$$
$$\alpha_2 \mathfrak{a}' + \beta_2 \mathfrak{b}' + \gamma_2 \mathfrak{c}' = 0,$$

daher:

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = (\mathfrak{b}\mathfrak{c}' - \mathfrak{c}\mathfrak{b}') : (\mathfrak{c}\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\mathfrak{c}') : (\mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}\mathfrak{a}'),$$

und indem ich auch hier eine der *Gauss*ischen Bezeichnungsweise entprechende Bezeichung einführe,

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C}.$$

Nun ist: $\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1$, folglich:

$$\alpha_2 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}, \quad \beta_2 = \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}.$$

Nun ist $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 = E'G' - F'^2$, oder bis auf kleine Grössen:

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 = EG,$$

daher:

$$\alpha_2 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{EG}}, \quad \beta_2 = \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{EG}}, \quad \gamma_2 = \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{EG}},$$

daher:

$$\alpha_2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial \beta_0}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_0}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\mathfrak{A} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{E}}\right) + \mathfrak{B} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{E}}\right) + \mathfrak{C} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{c}}{\sqrt{E}}\right) \right.$$

$$= \frac{1}{E\sqrt{G}} \cdot \left(\mathfrak{A} \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial u} + \mathfrak{B} \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial u} + \mathfrak{C} \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial u} \right) + \frac{1}{\sqrt{EG}} (\mathfrak{A}\mathfrak{a} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}) \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)}{\partial u}.$$

Nun ist aber:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{c} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{a}' & \mathfrak{b}' & \mathfrak{c}' \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist Null, weil in ihr zwei gleiche Horizontalreihen vorkommen. Aber:

$$\mathfrak{A} \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial u} + \mathfrak{B} \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial u} + \mathfrak{C} \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial u}$$

ist dasjenige, was in lateinischen Buchstaben geschrieben, *Gauss* mit *D* bezeichnet hat; für die Fläche in der Ruhelage soll die *Gauss*ische Bezeichnungs-

weise bleiben, dagegen für die deformirte Fläche soll Δ, Δ', Δ'' statt D, D', D'' gesetzt werden; wir bekommen somit, indem wir ein diesem ähnliches Verfahren wiederholt anwenden:

$$(10.)\quad \begin{cases} \alpha_2\frac{\partial\alpha_0}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial\beta_0}{\partial u}+\gamma_2\frac{\partial\gamma_0}{\partial u} = \frac{1}{E\sqrt{G}}\Delta, \\ \alpha_2\frac{\partial\alpha_0}{\partial v}+\beta_2\frac{\partial\beta_0}{\partial v}+\gamma_2\frac{\partial\gamma_0}{\partial v} = \frac{1}{E\sqrt{G}}\Delta', \\ \alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial\beta_1}{\partial u}+\gamma_2\frac{\partial\gamma_1}{\partial u} = \frac{1}{G\sqrt{E}}\Delta', \\ \alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}+\beta_2\frac{\partial\beta_1}{\partial v}+\gamma_2\frac{\partial\gamma_1}{\partial v} = \frac{1}{G\sqrt{E}}\Delta''. \end{cases}$$

Ferner ist wegen:

$$\alpha_1\alpha_0+\beta_1\beta_0+\gamma_1\gamma_0 = 0 \quad \text{etc.},$$

$$\alpha_1\frac{\partial\alpha_0}{\partial u}+\beta_1\frac{\partial\beta_0}{\partial u}+\gamma_1\frac{\partial\gamma_0}{\partial u} = -\left(\alpha_0\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}+\beta_0\frac{\partial\beta_1}{\partial u}+\gamma_0\frac{\partial\gamma_1}{\partial u}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v} \quad \text{etc.};$$

daher folgt:

$$\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial x} = \frac{y}{2E\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\Delta}{E\sqrt{EG}}z+\varepsilon_1,$$

$$\frac{\partial(\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})}{\partial x} = -\frac{x}{2E\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\Delta'}{EG}z,$$

$$\frac{\partial(\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})}{\partial x} = \frac{\Delta}{E\sqrt{EG}}x+\frac{\Delta'}{EG}y,$$

$$\frac{\partial(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u})}{\partial y} = -\frac{y}{2G\sqrt{E}}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\Delta'}{EG}z+\tau,$$

$$\frac{\partial(\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v})}{\partial y} = \frac{x}{2G\sqrt{E}}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\Delta''}{G\sqrt{EG}}z+\varepsilon_2,$$

$$\frac{\partial(\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w})}{\partial y} = \frac{\Delta'}{EG}x+\frac{\Delta''}{G\sqrt{EG}}y.$$

Für den Fall der Gleichgewichtslage der Schale ist aber:

$$\mathfrak{u}=0, \quad \mathfrak{v}=0, \quad \mathfrak{w}=0,$$
$$\varepsilon_1=0, \quad \varepsilon_2=0, \quad \tau=0,$$
$$\Delta=D, \quad \Delta'=D', \quad \Delta''=D'',$$

und wir erhalten durch Einführung dieser besonderen Werthe:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{y}{2E\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{Dz}{E\sqrt{EG}} \quad \text{etc.},$$

indem man diese Ausdrücke von den obigen abzieht, erhält man nunmehr:

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} = \frac{D-\Delta}{E\sqrt{EG}}\,z + \varepsilon_1, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} = \frac{D'-\Delta'}{EG}\,z, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} = -\frac{D-\Delta}{E\sqrt{EG}}\,x - \frac{D'-\Delta'}{EG}\,y.$$

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y} = \frac{D'-\Delta'}{EG}\,z + \tau, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} = \frac{D''-\Delta''}{G\sqrt{EG}}\,z + \varepsilon_2, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} = -\frac{D'-\Delta'}{EG}\,x - \frac{D''-\Delta''}{G\sqrt{EG}}\,y.$$

Während die obigen Ausdrücke für $\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}_0+\mathfrak{w}$ nicht integrirbar waren, sind diese für $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ integrirbar. Es ergiebt sich:

$$\mathfrak{u} = \frac{D-\Delta}{E\sqrt{EG}}\,zx + \frac{D'-\Delta'}{EG}\,zy + \varepsilon_1 x + \tau y + \mathfrak{u}_1,$$

$$\mathfrak{v} = \frac{D'-\Delta'}{EG}\,zx + \frac{D''-\Delta''}{G\sqrt{EG}}\,zy + \varepsilon_2 y + \mathfrak{v}_1,$$

$$\mathfrak{w} = -\frac{D-\Delta}{E\sqrt{EG}}\,\frac{x^2}{2} - \frac{D'-\Delta'}{EG}\,xy - \frac{D''-\Delta''}{G\sqrt{EG}}\,\frac{y^2}{2} + \mathfrak{w}_1,$$

wo $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ noch Functionen von z sein können; diese zu bestimmen stellen wir folgende Betrachtungen an: Für die Gestalt der Schale, also auch für die Formänderung des Elementes, ist der Theil der äusseren Kräfte, welcher gerade auf der Oberfläche oder im Innern eines Elementes angebracht ist, wenn nur die übrigen die gleiche Vertheilung behalten, unwesentlich. Ihr Einfluss macht sich in den Kräften geltend, die auf den nicht freien Theil der Oberfläche des Elementes, d. h. auf seinen Rand wirken. Wir dürfen also fordern, dass die gefundenen Verschiebungen den Gleichungen der Elasticität für das Innere und für die freie Oberfläche des Elementes genügen, wenn wir die Annahme machen, dass keine äusseren Kräfte im Innern und auf die Oberfläche wirken, und dies reicht gerade aus, die Functionen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ zu bestimmen. Es ist nämlich alsdann nach den Gleichungen der Elasticität für das Innere:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0,$$

und für die Oberfläche, weil die z-Axe die Normale zur Oberfläche ist:

$$X_z = 0, \quad Y_z = 0, \quad Z_z = 0.$$

Nun ist:

$$X_x = 2k\left[\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \Theta\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\right)\right],$$

$$Y_y = 2k\left[\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \Theta\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\right)\right],$$

$$Z_z = 2k\left[\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} + \Theta\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\right)\right],$$

$$\mathbf{Z}_y = \mathbf{Y}_z = k\Big(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}\Big),$$

$$\mathbf{Z}_x = \mathbf{X}_z = k\Big(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z}\Big),$$

$$\mathbf{X}_y = \mathbf{Y}_x = k\Big(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\Big).$$

Nun setze ich:

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = \boldsymbol{J}.$$

Es ist also:

$$\boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{E}\sqrt{\boldsymbol{EG}}}\boldsymbol{z} + \frac{\boldsymbol{D''}-\boldsymbol{\Delta''}}{\boldsymbol{G}\sqrt{\boldsymbol{EG}}}\boldsymbol{z} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{\partial \mathfrak{w}_1}{\partial z},$$

$$\boldsymbol{X}_x = 2k\Big(\frac{\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{E}\sqrt{\boldsymbol{EG}}}\boldsymbol{z} + \varepsilon_1 + \boldsymbol{\Theta J}\Big),$$

$$\boldsymbol{Y}_y = 2k\Big(\frac{\boldsymbol{D''}-\boldsymbol{\Delta''}}{\boldsymbol{G}\sqrt{\boldsymbol{EG}}}\boldsymbol{z} + \varepsilon_2 + \boldsymbol{\Theta J}\Big),$$

$$\mathbf{Z}_z = 2k\Big(\frac{\partial \mathfrak{w}_1}{\partial z} + \boldsymbol{\Theta J}\Big),$$

$$\mathbf{Z}_y = \mathbf{Y}_z = k\frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial z},$$

$$\mathbf{Z}_x = \mathbf{X}_z = k\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial z},$$

$$\boldsymbol{X}_y = \boldsymbol{Y}_x = k\Big(\frac{2(\boldsymbol{D'}-\boldsymbol{\Delta'})}{\boldsymbol{EG}}\boldsymbol{z} + \tau\Big),$$

also ist:

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}_x}{\partial \boldsymbol{x}} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{X}_y}{\partial \boldsymbol{y}} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{Y}_x}{\partial \boldsymbol{x}} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{Y}_y}{\partial \boldsymbol{y}} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_x}{\partial \boldsymbol{x}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{Z}_y}{\partial \boldsymbol{y}} = 0,$$

daher muss für das Innere sein:

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}_z}{\partial \boldsymbol{z}} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{Y}_z}{\partial \boldsymbol{z}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{Z}_z}{\partial \boldsymbol{z}} = 0,$$

oder:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{v}_1}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_1}{\partial z^2} + \boldsymbol{\Theta}\Big(\frac{\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{E}\sqrt{\boldsymbol{EG}}} + \frac{\boldsymbol{D''}-\boldsymbol{\Delta''}}{\boldsymbol{G}\sqrt{\boldsymbol{EG}}} + \frac{\partial^2 \mathfrak{w}_1}{\partial z^2}\Big) = 0,$$

und für die freie Oberfläche:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} \pm \Theta\Big(\frac{(D-\Delta)h}{2E\sqrt{EG}} + \frac{(D''-\Delta'')h}{2G\sqrt{EG}} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{\partial w_1}{\partial z}\Big) = 0,$$

wenn h die Dicke der Schale, und die betrachtete Fläche die Mittelfläche der Schale ist, so dass für die freie Oberfläche $z = \pm\frac{h}{2}$ ist.

Aus den Gleichungen für das Innere folgt, dass überhaupt:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = \text{Const.}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = \text{Const.},$$

aus den Gleichungen für die Oberfläche, dass diese Constanten 0 sind, also dass überhaupt:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0,$$

daher:

$$u_1 = \text{Const.}, \quad v_1 = \text{Const.},$$

und weil für $x = y = z = 0$, $u = 0$, $v = 0$ sein soll, folgt:

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0.$$

Aus den Gleichungen für das Innere folgt ferner:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = -\frac{\Theta}{1+\Theta}\Big(\frac{D-\Delta}{E\sqrt{EG}} + \frac{D''-\Delta''}{G\sqrt{EG}}\Big),$$

daher:

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} = -\frac{\Theta}{1+\Theta}\Big(\frac{D-\Delta}{E\sqrt{EG}}z + \frac{D''-\Delta''}{G\sqrt{EG}}z\Big) + \text{Const.},$$

aber für $z = \pm\frac{h}{2}$

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} = \mp\frac{\Theta}{1+\Theta}\Big(\frac{D-\Delta}{2E\sqrt{EG}}h + \frac{D''-\Delta''}{2G\sqrt{EG}}h + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\Big),$$

daher überhaupt:

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} = -\frac{\Theta}{1+\Theta}\Big(\frac{D-\Delta}{E\sqrt{EG}}z + \frac{D''-\Delta''}{G\sqrt{EG}}z + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\Big),$$

$$w_1 = -\frac{\Theta}{1+\Theta}\Big(\frac{(D-\Delta)}{E\sqrt{EG}}\frac{z^2}{2} + \frac{(D''-\Delta'')}{G\sqrt{EG}}\frac{z^2}{2} + \varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z\Big) + \text{Const.},$$

aber weil für $x = y = z = 0$, $w = 0$ ist, also auch $w_1 = 0$ ist, ist auch diese Const. gleich 0, und wir bekommen:

$$(11.)\quad \begin{cases} \mathfrak{u} = \dfrac{D-\Delta}{E\sqrt{EG}}\,z\,x + \dfrac{D'-\Delta'}{EG}\,z\,y + \varepsilon_1 x + \tau y, \\ \mathfrak{v} = \dfrac{D'-\Delta'}{EG}\,z\,x + \dfrac{D''-\Delta''}{G\sqrt{EG}}\,z\,y + \varepsilon_2 y, \\ \mathfrak{w} = -\Big(\dfrac{(D-\Delta)}{E\sqrt{EG}}\,\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{D'-\Delta'}{EG}\,xy + \dfrac{(D''-\Delta'')}{G\sqrt{EG}}\,\dfrac{y^2}{2}\Big) \\ \qquad -\dfrac{\Theta}{1+\Theta}\Big(\dfrac{(D-\Delta)}{E\sqrt{EG}}\,\dfrac{z^2}{2} + \dfrac{(D''-\Delta'')}{G\sqrt{EG}}\,\dfrac{z^3}{2} + \varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z\Big). \end{cases}$$

Diese Verschiebungen sind nun von der Form, wie sie den Gleichungen der Elasticität für das Innere und die freie Oberfläche genügen, wo wir die äusseren Kräfte vernachlässigen dürfen; was nun die nicht freie Oberfläche betrifft, also den Rand des Elementes, so treten da in Folge dieser Verschiebungen Spannungen auf; aber diese sind stets gleich den hier wirkenden äusseren Kräften, das sind hier die von dem übrigen Theil der Schale ausgeübten Kräfte, weil Wirkung und Gegenwirkung gleich sind; daher sind auch am Rande die Gleichungen der Elasticität befriedigt, und weil, wie man sieht, für

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= 0, & z &= 0, \\ \mathfrak{u} &= 0, & \mathfrak{v} &= 0, & \mathfrak{w} &= 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

also keine gemeinsamen Verschiebungen oder Drehungen stattfinden, sind $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ in der That Verrückungen, welche lediglich gegen die elastischen Kräfte stattfanden. Die in Folge dieser Verrückungen auftretenden Spannungen sind, wenn:

$$J = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = \frac{1}{1+\Theta}\Big(\frac{D-\Delta}{E\sqrt{EG}}\,z + \frac{D''-\Delta''}{G\sqrt{EG}}\,z + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\Big)$$

gesetzt wird,

$$(12.)\quad \begin{cases} X_x = 2k\Big(\dfrac{D-\Delta}{E\sqrt{EG}}\,z + \varepsilon_1 + \Theta J\Big), \\ Y_y = 2k\Big(\dfrac{D''-\Delta''}{G\sqrt{EG}}\,z + \varepsilon_2 + \Theta J\Big), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Z_z &= 0, \\ Z_y &= Y_z = 0, \\ Z_x &= X_z = 0, \\ X_y &= Y_x = k\Big(\frac{2(D'-\Delta')}{EG}\,z + \tau\Big). \end{aligned}$$

Die Arbeit, welche zur Deformation eines Elementes $dx\,dy\,dz$ aufgewandt werden muss, während die Schale aus ihrer ersten Lage in die zweite überging, wird dargestellt durch $dx\,dy\,dz$ multiplicirt mit:

$$F = k\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2$$
$$+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2+\Theta\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2\Big],$$

somit stellt sich die Gesammtarbeit, welche zur Deformation der ganzen Schale nöthig ist, dar als

$$\iiint F\,ds_1\,ds_2\,dz = \iiint F\sqrt{EG}\,du\,dv\,dz.$$

Dass man das Element jeder Schicht, nicht nur der Mittelschicht, durch $ds_1\,ds_2\,dz$ darstellen kann, folgt daraus, dass die Schale unendlich dünn angenommen ist, also das Element der Schicht von der Mittelfläche bis zur Dicke z durch $ds_1\,ds_2\,z$ dargestellt wird.

II.

Wir können nunmehr mit Hülfe des *Hamilton*schen Princips, wenn wir noch das Potential Ω der äusseren Kräfte, welche auf das Innere und den Rand wirken, kennen, sowie die äusseren Bedingungen, denen die Schale bei ihrer Deformation unterliegen soll — die inneren Bedingungen, die aus der Annahme der Continuität herrühren, haben wir bereits entwickelt — die allgemeinen Bewegungsgleichungen darstellen:

$$0 = \delta\iiiint\Big(\tfrac{1}{2}\varrho v^2-\Omega-F+\lambda\varphi+\mu\psi\ldots\Big)\sqrt{EG}\,du\,dv\,dz\,dt,$$

wo v die Geschwindigkeit in einem Punkte zur Zeit t, ϱ die Dichtigkeit in diesem Punkte, und $\varphi=0$, $\psi=0$ etc. sowohl die äusseren, wie die inneren Bedingungen, denen die Fläche unterworfen ist, λ und μ unbestimmte Coefficienten bedeuten mögen.

Da wir aber nicht annehmen wollen, dass die äusseren Kräfte ein Potential haben, so werden wir statt $-\delta\Omega$ das virtuelle Moment der auf das Innere und den Rand wirkenden äusseren Kräfte einführen. Ich will aber zunächst den von der inneren Arbeit herrührenden Theil umformen:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}\,\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}\,\delta\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\,\delta\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}\,\delta\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}}\,\delta\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}}\,\delta\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}\,\delta\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}\,\delta\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}\,\delta\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} = X_x, \quad \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} = X_y, \quad \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} = X_z,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} = Y_x, \quad \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} = Y_y, \quad \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} = Y_z,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} = Z_x, \quad \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} = Z_y, \quad \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}} = Z_z.$$

Nun ist nach (12.):

$$X_z = 0, \quad Y_z = 0, \quad Z_x = 0, \quad Z_y = 0, \quad Z_z = 0,$$

somit bleibt, wenn wir noch $X_y = Y_x = T_z$ setzen:

$$\delta F = X_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + T_z \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + Y_y \delta \frac{\partial v}{\partial y},$$

also nach (11.)

$$\delta \iiiint F \sqrt{EG}\, du\, dv\, dz\, dt = \iiiint \left\{ \begin{array}{l} -X_x \ \dfrac{z\,\delta\Delta}{E} + X_x \sqrt{EG}\,\delta\varepsilon_1 \\ -2T_z \dfrac{z\,\delta\Delta'}{\sqrt{EG}} + T_z \sqrt{EG}\,\delta\tau \\ -Y_y \ \dfrac{z\,\delta\Delta''}{G} + Y_y \sqrt{EG}\,\delta\varepsilon_2 \end{array} \right\} du\, dv\, dz\, dt.$$

Die Integration nach z ist mit Benutzung der Gleichungen (12.) leicht auszuführen. Ich setze:

$$(13.) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \int X_x\, dz = X_1, & \int X_x z\, dz = X_2, \\ \int Y_y\, dz = Y_1, & \int Y_y z\, dz = Y_2, \\ \int T_z\, dz = T_1, & \int T_z z\, dz = T_2, \end{array} \right.$$

und indem wir die Variationen weiter ausführen, also einführen nach Gleichung (10.):

$$-\frac{\Delta}{E} = \sqrt{G}\left(\alpha_0 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} + \beta_0 \frac{\partial \beta_2}{\partial u} + \gamma_0 \frac{\partial \gamma_2}{\partial u}\right),$$

$$\frac{-2\Delta'}{\sqrt{EG}} = \sqrt{G}\left(\alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial u} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_2}{\partial u}\right) + \sqrt{E}\left(\alpha_0 \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} + \beta_0 \frac{\partial \beta_2}{\partial v} + \gamma_0 \frac{\partial \gamma_2}{\partial v}\right),$$

$$\frac{-\Delta''}{G} = \sqrt{E}\left(\alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} + \beta_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial v} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_2}{\partial v}\right),$$

ε_1, ε_2 und τ dagegen aus den Gleichungen (2^a.) und (3^a.) ausdrücken, erhalten wir als den von der inneren Arbeit herrührenden Theil:

$$-\iiint \left\{ \begin{array}{l} X_2\sqrt{G}\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}\delta\alpha_0+\frac{\partial\beta_2}{\partial u}\delta\beta_0+\frac{\partial\gamma_2}{\partial u}\delta\gamma_0+\alpha_0\frac{\partial\delta\alpha_2}{\partial u}+\beta_0\frac{\partial\delta\beta_2}{\partial u}+\gamma_0\frac{\partial\delta\gamma_2}{\partial u}\right) \\ +T_2\sqrt{G}\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}\delta\alpha_1+\frac{\partial\beta_2}{\partial u}\delta\beta_1+\frac{\partial\gamma_2}{\partial u}\delta\gamma_1+\alpha_1\frac{\partial\delta\alpha_2}{\partial u}+\beta_1\frac{\partial\delta\beta_2}{\partial u}+\gamma_1\frac{\partial\delta\gamma_2}{\partial u}\right) \\ +T_2\sqrt{E}\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}\delta\alpha_0+\frac{\partial\beta_2}{\partial v}\delta\beta_0+\frac{\partial\gamma_2}{\partial v}\delta\gamma_0+\alpha_0\frac{\partial\delta\alpha_2}{\partial v}+\beta_0\frac{\partial\delta\beta_2}{\partial v}+\gamma_0\frac{\partial\delta\gamma_2}{\partial v}\right) \\ +Y_2\sqrt{E}\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}\delta\alpha_1+\frac{\partial\beta_2}{\partial v}\delta\beta_1+\frac{\partial\gamma_2}{\partial v}\delta\gamma_1+\alpha_1\frac{\partial\delta\alpha_2}{\partial v}+\beta_1\frac{\partial\delta\beta_2}{\partial v}+\gamma_1\frac{\partial\delta\gamma_2}{\partial v}\right) \\ +X_1\sqrt{G}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\delta\alpha_0+\frac{\partial\eta}{\partial u}\delta\beta_0+\frac{\partial\zeta}{\partial u}\delta\gamma_0+\alpha_0\frac{\partial\delta\xi}{\partial u}+\beta_0\frac{\partial\delta\eta}{\partial u}+\gamma_0\frac{\partial\delta\zeta}{\partial u}\right) \\ +T_1\sqrt{E}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\delta\alpha_0+\frac{\partial\eta}{\partial v}\delta\beta_0+\frac{\partial\zeta}{\partial v}\delta\gamma_0+\alpha_0\frac{\partial\delta\xi}{\partial v}+\beta_0\frac{\partial\delta\eta}{\partial v}+\gamma_0\frac{\partial\delta\zeta}{\partial v}\right) \\ +Y_1\sqrt{E}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\delta\alpha_1+\frac{\partial\eta}{\partial v}\delta\beta_1+\frac{\partial\zeta}{\partial v}\delta\gamma_1+\alpha_1\frac{\partial\delta\xi}{\partial v}+\beta_1\frac{\partial\delta\eta}{\partial v}+\gamma_1\frac{\partial\delta\zeta}{\partial v}\right) \end{array} \right\} du\,dv\,dt.$$

Wir müssen nun die letzten drei Summanden jeder Reihe, welche die Variationen der Differentiale enthalten, umformen, zunächst:

$$\iint X_2\sqrt{G}\,\alpha_0\frac{\partial\delta\alpha_2}{\partial u}\,du\,dv=\iint\frac{\partial(X_2\sqrt{G}\,\alpha_0\,\delta\alpha_2)}{\partial u}\,du\,dv-\iint\frac{\partial(X_2\sqrt{G}\,\alpha_0)}{\partial u}\,\delta\alpha_2\,du\,dv.$$

Um nun das Integral:

$$\iint\frac{\partial(X_2\sqrt{G}\,\alpha_0\,\delta\alpha_2)}{\partial u}\,du\,dv$$

weiter umformen zu können, muss ich hier einen für die Ebene sehr bekannten Satz so erweitern, dass er für beliebige Flächen gilt.

Es sollen nun u und v die rechtwinkligen Coordinaten einer beliebigen Fläche bedeuten, und f eine Function von u und v sein; wir wollen jetzt untersuchen, was:

$$\int_{u_0}^{u_1}\int_{v_0}^{v_1}\frac{\partial f}{\partial v}\,du\,dv,$$

über ein geschlossenes Flächenstück genommen, bedeutet, wenn f eindeutig, stetig und endlich auf der ganzen Fläche ist. Es ist zunächst, wenn ich dieses Integral mit J bezeichne,

$$J=\int_{u_0}^{u_1}(f_1-f_0)\,du,$$

wo ich mit f_0 und f_1 die Werthe von f bezeichne, in denen v_0 resp. v_1 für v eingesetzt ist; oder, indem ich mit derselben Grösse multiplicire und dividire:

$$J = \int_{u_0}^{u_1} \left(\frac{f_1}{\sqrt{E_1}} \sqrt{E_1}\, du - \frac{f_0}{\sqrt{E_0}} \sqrt{E_0}\, du \right);$$

hier bedeuten wieder E_0 und E_1 die Werthe für E, in denen v_0 resp. v_1 für v gesetzt ist.

Nun war aber unser Coordinatensystem ein rechtwinkeliges, also:

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Die Bogenlänge der Curve, für die $v = \text{const.}$ ist, haben wir mit s_1 bezeichnet, somit:

$$ds_1^2 = E\,du^2$$

$$ds_1 = \sqrt{E}\,du.$$

Das Zeichen der Wurzel ist noch willkürlich, weil ich noch nicht festgestellt habe, in welchem Sinne ich die Curve positiv rechnen will. Es soll nun s_1 nach der Seite als positiv gerechnet werden, nach welcher u wächst; wenn du positiv ist, soll ds_1 positiv sein, also muss $\sqrt{E}$ das Zeichen $+$ bekommen, also

$$J = \int_{u_0}^{u_1} \left[\left(\frac{f}{\sqrt{E}}\, ds_1 \right)_1 - \left(\frac{f}{\sqrt{E}}\, ds_1 \right)_0 \right]$$

sein, wo das Wurzelzeichen positiv zu nehmen ist, und die Indices 1 und 0 bedeuten sollen, dass die entsprechenden Ausdrücke an den Werthstellen $v = v_0$ und $v = v_1$ genommen werden sollen.

Nun will ich ds, das Bogenelement der Randcurve der Fläche, über welche zu integriren ist, einführen. Ich muss jetzt festsetzen, in welchem Sinne ich ds positiv rechnen will.

Ich gebe zunächst einige einfache Definitionen und Sätze für die Ebene, die, weil jede Fläche in ihrem Elemente als eben angesehen werden kann, auch für beliebig gekrümmte Flächen ihren Sinn behalten.

Wenn a und b zwei Richtungen in einer Ebene sind, so sage ich, b liegt links von a, wenn man a um weniger als 2 Rechte nach links zu drehen braucht, damit es in die Richtung b fällt, sonst liegt es rechts von b; daraus folgt, dass, wenn a links von b liegt, b rechts von a liegt und umgekehrt. Ferner folgt, dass, wenn a und b auf derselben Seite von c liegen und a bildet mit c einen rechten Winkel, a mit b einen spitzen Winkel bildet. Dagegen bilden sie einen stumpfen Winkel, wenn sie auf verschiedenen Seiten von c

liegen. ds_1 und ds_2, die Bogenelemente der Curven $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, waren definirt als $\sqrt{E}\,du$, resp. $\sqrt{E}\,dv$, wo die Wurzeln positiv zu nehmen sind; dadurch waren ds_1 und ds_2 auch ihrer Richtung nach bestimmt.

Ich will nun beweisen, dass ds_2 auf der ganzen Fläche an derselben Seite von ds_1 liegt; ich will es zunächst für die Elemente einer bestimmten Curve s_1 beweisen.

Die Curve $v = c + dc$, wo c eine Constante, dc eine constante kleine Grösse bedeutet, kann die Curve $v = c$ nicht schneiden; der senkrechte Abstand beider Curven ist $ds_2 = \sqrt{G}\,dc$, im Schnittpunkte müsste dieser 0 sein, und da dc nicht 0 ist, müsste $G = 0$ sein; weil G aber eine Summe von 3 Quadraten ist, müssten diese einzeln 0 sein; das wären 3 Gleichungen für die 2 Variabeln u und v; solche Punkte können also auf der Fläche im Allgemeinen nicht existiren: käme dennoch auf einer Fläche ein solcher Punkt vor, so müsste man durch den Punkt irgend einen Schnitt führen und nun die entstandenen Flächentheile betrachten. Diese Ausnahmepunkte sind diejenigen, in welchen die Fläche eine Schneide oder Spitze hat, denn die Krümmung ist in *Gauss*ischen Zeichen:

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{(EG - F^2)^2};$$

bei uns ist $F = 0$, also $E = 0$ oder $G = 0$ bedeutet, dass die Fläche in dem betreffenden Punkte unendlich gekrümmt ist, d. h. eine Schneide oder Spitze hat. Schalen mit solchen Discontinuitäten betrachten wir aber nicht.

Schneidet aber die Curve $v = c + dc$ die Curve $v = c$ nicht, so heisst das, ds_2 liegt längs der Curve $v = c$ stets auf derselben Seite von ds_1. Ebenso schneidet aber auch eine Curve $u = c_1$ die Curve $u = c_1 + dc_1$ nicht, d. h. ds_1 liegt längs der Curve $u = c_1$ auf derselben Seite von ds_2, also umgekehrt ds_2 längs dieser Curven auf derselben Seite von ds_1; würde es aber längs zweier Curven $u = c_1$ und $u = C_1$ auf verschiedenen Seiten von ds_1 liegen, so müsste es auch in dem Schnittpunkte dieser Curve mit der Curve $v = c$ auf verschiedenen Seiten von ds_1 liegen; nun aber musste ds_2 längs der Curve $v = c$ ebenfalls auf derselben Seite von ds_1 bleiben, also liegt ds_2 überhaupt auf der ganzen Fläche auf derselben Seite von ds_1; diese Seite nenne ich die Plusseite. Nun setze ich den Sinn, in welchem die Randcurve positiv zu nehmen ist, so fest, dass, wenn ich mir durch irgend einen Punkt der Randcurve Linien in die Flächen eintreten denke, dieselben nach ihrem Eintritt stets zur Plusseite von ds, dem als positiv angenommenen Element der Randcurve, liegen sollen,

oder, was dasselbe ist, dass die Richtung der in die Fläche eintretenden Linien zur Plusseite von der Richtung ds liegen soll. Es hat nunmehr einen bestimmten Sinn, wenn ich von ds_1, ds_2, ds spreche. Ich bezeichne den Winkel, den ds in irgend einem Punkte der Randcurve mit ds_1, dem Bogenelement der Curve $v = \text{const.}$, in diesem Punkte bildet, mit (s, v).

ds und ds_1 bilden Hypotenuse und Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, die entweder den Winkel (s, v) oder $(s, v) - \frac{\pi}{2}$ bilden, also ist:

$$ds_1 = \pm ds \cos(s, v).$$

Man kann nun zeigen, dass für die Theile der Randcurve, für welche v kleinere Werthe hat als in den angrenzenden Flächentheilen selbst, das positive Zeichen, dagegen für die Theile, für welche v grössere Werthe hat als in den angrenzenden Flächentheilen, das negative Zeichen zu nehmen ist. Bei dem kleineren Werth von v tritt die Curve $u = \text{const.}$ wachsend in die Fläche ein, ds_2 hat also die Richtung in die Fläche eintretender Linien, liegt also zur Plusseite von ds; aber ds_2 liegt stets auf der Plusseite von ds_1, also umgekehrt liegen ds und ds_1 auf derselben Seite von ds_2; ds_1 bildet mit ds_2 einen rechten Winkel, also ds mit ds_1 einen spitzen Winkel. Es ist also, wo

$$v = v_0$$

ist,

$$ds_1 = ds \cos(s, v),$$

dagegen tritt die Curve $u = \text{const.}$ an den Randtheilen, wo v grössere Werthe als in der angrenzenden Fläche hat, wachsend aus, ds_2 hat also die Richtung aus der Fläche austretender Linien, liegt also zur Minusseite von ds; ds_2 liegt aber stets zur Plusseite von ds_1, also liegen ds und ds_1 auf verschiedenen Seiten von ds_2. ds_1 und ds_2 bilden einen rechten Winkel, demnach ds_1 und ds einen stumpfen Winkel, demnach an den Stellen $v = v_1$:

$$ds_1 = -ds \cos(s, v),$$

also ist:

$$\left(\frac{f}{\sqrt{E}} ds_1\right)_1 = -\left(\frac{f}{\sqrt{E}} ds \cos(s, v)\right)_1,$$

$$\left(\frac{f}{\sqrt{E}} ds_1\right)_0 = \left(\frac{f}{\sqrt{E}} ds \cos(s, v)\right)_0,$$

daher:

$$\int_{u_0}^{u_1} \left[\left(\frac{f}{\sqrt{E}} ds_1\right)_1 - \left(\frac{f}{\sqrt{E}} ds_1\right)_0\right] = -\int \left[\left(\frac{f}{\sqrt{E}} ds \cos(s, v)\right)_1 + \left(\frac{f}{\sqrt{E}} ds \cos(s, v)\right)_0\right]$$

über die ganze Randcurve.

Daher ist schliesslich das Integral über die Fläche:

$$\int_{u_0}^{u_1}\int_{v_0}^{v_1} \frac{\partial f}{\partial v}\, du\, dv \;=\; -\int \frac{f}{\sqrt{E}}\, ds \cos(s, v),$$

wo letzteres Integral über die ganze Randcurve zu nehmen ist.

Ferner ist:

$$\int_{u_0}^{u_1}\int_{v_0}^{v_1} \frac{\partial f}{\partial u}\, du\, dv \;=\; \int_{v_0}^{v_1} \Big[\Big(\frac{f}{\sqrt{G}}\, ds_2\Big)_1 - \Big(\frac{f}{\sqrt{G}}\, ds_2\Big)_0\Big],$$

wo ebenfalls $\sqrt{G}$ positiv zu nehmen ist.

Nun ist $ds_2 = \pm\, ds \cos(s, u)$, wenn (s, u) den Winkel bedeutet, den ds, das Element der Randcurve, mit ds_2, dem Element der Curve $u = \text{const.}$, bildet. Hier ist ebenfalls das positive oder negative Zeichen zu nehmen, je nachdem (s, u) ein spitzer oder stumpfer Winkel ist. Für die kleineren Werthe von u treten die Curven $v = \text{const.}$ wachsend in die Fläche ein, ds_1 hat also die Richtung in die Fläche eintretender Curven, liegt also zur Plusseite von ds; also ds zur Minusseite von ds_1, ds_2 liegt aber stets zur Plusseite von ds_1, also liegen ds und ds_2 auf verschiedenen Seiten von ds, ds_1 und ds_2 bilden einen rechten Winkel, ds und ds_2 also einen stumpfen Winkel, wir haben, wo $u = u_0$:

$$ds_2 \;=\; -\, ds \cos(s, u),$$

wo $u = u_1$, treten die Curven $v = \text{const.}$ wachsend aus der Fläche aus; ds_2 liegt auf der Minusseite von ds, also ds auf der Plusseite von ds_2; ds_2 liegt aber stets auf der Plusseite von ds_1, also liegen ds und ds_2 auf derselben Seite von ds_1; ds_2 und ds_1 bilden einen rechten Winkel, somit ds und ds_2 einen spitzen Winkel. Hier ist

$$ds_2 \;=\; ds \cos(s, u),$$

und so folgt:

$$\Big(\frac{f}{\sqrt{G}}\, ds_2\Big)_1 \;=\; \Big(\frac{f}{\sqrt{E}}\, ds \cos(s, u)\Big)_1,$$

$$\Big(\frac{f}{\sqrt{G}}\, ds_2\Big)_0 \;=\; -\Big(\frac{f}{\sqrt{G}}\, ds \cos(s, u)\Big)_0,$$

daher schliesslich:

$$\int_{u_0}^{u_1}\int_{v_0}^{v_1} \frac{\partial f}{\partial u}\, du\, dv \;=\; \int \frac{f}{\sqrt{G}}\, ds \cos(s, u).$$

Diese Sätze wollen wir zur Umformung der bereits bezeichneten, von der inneren Arbeit herrührenden Theile benutzen.

Es war z. B.:

$$\iint X_2\sqrt{G}\alpha_0\frac{\partial\delta\alpha_2}{\partial u}du\,dv = \iint\frac{\partial(X_2\sqrt{G}\alpha_0\delta\alpha_2)}{\partial u}du\,dv - \iint\frac{\partial(X_2\sqrt{G}\alpha_0)}{\partial u}\delta\alpha_2\,du\,dv,$$

also:

$$\iint X_2\sqrt{G}\alpha_0\frac{\partial\delta\alpha_2}{\partial u}du\,dv = \int X_2\alpha_0\delta\alpha_2\,ds\cos(s,u) - \iint\frac{\partial(X_2\sqrt{G}\alpha_0)}{\partial u}\delta\alpha_2\,du\,dv,$$

und somit sind die aus der innern Arbeit zunächst folgenden Summanden:

$$\text{(I.)}\quad -\iiint\Sigma\left\{\begin{array}{l}\left(X_2\sqrt{G}\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}+T_2\sqrt{E}\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}+X_1\sqrt{G}\frac{\partial\xi}{\partial u}+T_1\sqrt{E}\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)\delta\alpha_0\\ +\left(T_2\sqrt{G}\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}+Y_2\sqrt{E}\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}+Y_1\sqrt{E}\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)\delta\alpha_1\end{array}\right\}du\,dv\,dt,$$

wo das Zeichen Σ hier und im Folgenden bedeutet, dass noch zwei ähnliche Summanden hinzuzufügen sind, in denen statt α und ξ die Buchstaben β und η resp. γ und ζ stehen.

$$\text{(II.)}\quad +\iiint\Sigma\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial(X_2\sqrt{G}\alpha_0)}{\partial u}+\frac{\partial(T_2\sqrt{G}\alpha_1)}{\partial u}+\frac{\partial(T_2\sqrt{E}\alpha_0)}{\partial v}+\frac{\partial(Y_2\sqrt{E}\alpha_1)}{\partial v}\right)\delta\alpha_2\\ +\left(\frac{\partial(X_1\sqrt{G}\alpha_0)}{\partial u}+\frac{\partial(T_1\sqrt{E}\alpha_0)}{\partial v}+\frac{\partial(Y_1\sqrt{E}\alpha_1)}{\partial v}\right)\delta\xi\end{array}\right\}dudvdt.$$

$$\text{(III.)}\quad -\iint\Sigma\left\{\begin{array}{l}[X_2\alpha_0\cos(s,u)+T_2\alpha_1\cos(s,u)-T_2\alpha_0\cos(s,v)-Y_2\alpha_1\cos(s,v)]\delta\alpha_2\\ +[X_1\alpha_0\cos(s,u)-T_1\alpha_0\cos(s,v)-Y_1\alpha_1\cos(s,v)]\delta\xi\end{array}\right\}dsdt.$$

Es soll nun die von den äusseren Kräften herrührende Arbeit berechnet werden; zunächst für die, die auf die Punkte in allen Schichten im Innern der Schale, deren Coordinaten ξ', η' ζ' waren, wirken. Es seien A, B, C die in einem Punkte ξ', η', ζ' wirkenden Kraftcomponenten, genommen nach den drei Axen; alsdann ist die von ihnen geleistete Arbeit:

$$\iiiint(A\delta\xi'+B\delta\eta'+C\delta\zeta')\sqrt{EG}\,du\,dv\,dz\,dt.$$

A, B, C müssen als Functionen von ξ, η, ζ, z gegeben sein; nun folgt aus der Gleichung (7.), wenn man $x=0$ und $y=0$ setzt, was man darf, wenn man nur in den obigen Integralen u, v alle möglichen Werthe beilegt, mit Vernachlässigung der kleinen Grössen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ gegen Grössen höherer Ordnung

$$\delta\xi'=\delta\xi+z\delta\alpha_2,\quad \delta\eta'=\delta\eta+z\delta\beta_2,\quad \delta\zeta'=\delta\zeta+z\delta\gamma_2.$$

Im Allgemeinen darf man nun aber auch $z\delta\alpha_2$ gegen $\delta\xi$ etc. vernach-

lässigen, weil ja z unendlich klein ist; doch giebt es einen Fall, in dem das nicht gestattet ist.

Es ist nämlich:

$$\alpha_0\delta\alpha_0+\alpha_1\delta\alpha_1+\alpha_2\delta\alpha_2 = 0;$$

nun ist bis auf kleine Grössen:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\xi}{\partial u},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\xi}{\partial v}.$$

Indem ich E und G während der Deformation als constant ansehe, was bis auf kleine Grössen richtig ist, folgt:

$$\frac{1}{E}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\delta\xi}{\partial u}+\frac{1}{G}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\delta\xi}{\partial v}+\alpha_2\delta\alpha_2 = 0.$$

Nun ist $\frac{\partial\delta\xi}{\partial u}$ und $\frac{\partial\delta\xi}{\partial v}$ im Allgemeinen von der Ordnung $\delta\xi$, somit $\delta\alpha_2$ von der Ordnung $\delta\xi$, also $z\,\delta\alpha_2$ gegen $\delta\xi$ zu vernachlässigen. In einem Falle ist dieser Schluss nicht gestattet, wenn nämlich $\alpha_2 = 0$ ist, d. h. wenn die X-Axe parallel der Fläche ist. Dasselbe gilt, wenn die Y- oder Z-Axe parallel der Fläche ist, für $\delta\beta_2$ und $\delta\gamma_2$ im Vergleich mit $\delta\eta$ resp. $\delta\zeta$, also z. B. bei einer elastischen Platte, die parallel der XY-Ebene ist, oder wenn die elastische Schale einen Cylinder bildet, dessen Axe parallel der Z-Axe ist. Indessen werden wir später auch für den allgemeinen Fall eine Veränderung der Gleichungen vorzunehmen haben, bei der dieser Ausnahmefall sogar für jeden Punkt einer beliebigen Schale in Rücksicht zu ziehen sein wird, wir wollen daher $z\,\delta\alpha_2$ etc. auch für den allgemeinen Fall nicht gegen $\delta\xi$ etc. vernachlässigen, somit ist die von den äusseren Kräften bei der Deformation der Schale geleistete Arbeit:

$$\iiiint(A\delta\xi+B\delta\eta+C\delta\zeta+Az\delta\alpha_2+Bz\delta\beta_2+Cz\delta\gamma_2)\sqrt{EG}\,du\,dv\,dz\,dt.$$

Die in den Punkten der Oberfläche der Schale mit Ausschluss des Randes wirkenden Kräfte mögen die Componenten A', B', C' in der Richtung der Axen haben; alsdann ist die von ihnen geleistete Arbeit:

$$\iiint(A'\delta\xi+B'\delta\eta+C'\delta\zeta+A'z\delta\alpha_2+B'z\delta\beta_2+C'z\delta\gamma_2)\sqrt{EG}\,du\,dv\,dt.$$

Nun setze ich:

$$\int A\,dz + A' = A_1,\quad \int B\,dz + B' = B_1,\quad \int C\,dz + C' = C_1,$$

$$\int Az\,dz + A'z = A_2,\quad \int Bz\,dz + B'z = B_1,\quad \int Cz\,dz + C'z = C_2.$$

Aus der Art der Summation kann man schliessen, dass die an der Oberfläche angreifenden Kräfte so wirken, wie die aufs Innere vertheilten Kräfte, und umgekehrt.

Die von diesen Kräften herrührende Arbeit ist somit:

$$\text{(IV.)} \quad \iiint (A_1 \delta\xi + B_1 \delta\eta + C_1 \delta\zeta + A_2 \delta\alpha_2 + B_2 \delta\beta_2 + C_2 \delta\gamma_2) \sqrt{EG}\, du\, dv\, dt.$$

Aber auch auf den Rand können äussere Kräfte wirken; es mögen dieselben nach den Richtungen der Axen die Componenten U, V, W haben; die von ihnen geleistete Arbeit ist somit:

$$\iiint (U \delta\xi' + V \delta\eta' + W \delta\zeta')\, ds\, dz\, dt,$$

oder:

$$\iiint (U \delta\xi + V \delta\eta + W \delta\zeta + U z \delta\alpha_2 + V z \delta\beta_2 + W z \delta\gamma_2)\, ds\, dz\, dt.$$

Setze ich:

$$\int U dz = U_1, \quad \int V dz = V_1, \quad \int W dz = W_1,$$

$$\int U z dz = U_2, \quad \int V z dz = V_2, \quad \int W z dz = W_2,$$

so ist diese Arbeit:

$$\text{(V.)} \quad \iiint (U_1 \delta\xi + V_1 \delta\eta + W_1 \delta\zeta + U_2 \delta\alpha_2 + V_2 \delta\beta_2 + W_2 \delta\gamma_2)\, ds\, dt.$$

Wir kommen zu dem Theil, der von den lebendigen Kräften herrührt:

$$\tfrac{1}{2}\delta \iiint \left[\left(\frac{\partial\xi'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta'}{\partial t}\right)^2\right] \varrho \sqrt{EG}\, du\, dv\, dz\, dt,$$

wo ϱ die Dichtigkeit bedeutet.

Nun ist:

$$\tfrac{1}{2}\delta \int \left(\frac{\partial\xi'}{\partial t}\right)^2 dt = \int \frac{\partial\xi'}{\partial t}\, \partial \frac{\delta\xi'}{\partial t}\, dt = \left(\frac{\partial\xi'}{\partial t}\, \delta\xi'\right)_{t_1}^{t_2} - \int \delta\xi' \frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2}\, dt.$$

Der erste Summand rechts ist Null, da $\delta\xi'$ an den Grenzen Null ist, weil der Weg, nicht Anfangs- und Endlage variiren soll.

Nun ist:

$$\xi' = \xi + \alpha_2 z,$$

daher:

$$\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \frac{z\partial^2\alpha_2}{\partial t^2},$$

ferner:

$$\delta\xi' = \delta\xi + z\,\delta\alpha_2,$$

daher:

$$\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2}\delta\xi' = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\delta\xi + z\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\delta\alpha_2 + z\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\delta\xi + z^2\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\delta\alpha_2.$$

Wir wollen nunmehr von der Annahme Gebrauch machen, dass die Fläche ξ, η, ζ die Mittelfläche der Schale ist. Ist h die Dicke der Schale, so ist nach z von $-\frac{h}{2}$ bis $+\frac{h}{2}$ zu integriren, und durch Ausführung der Integration erhält man:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}dz = \frac{h\partial^2\xi}{\partial t^2}, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}dz = 0,$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}dz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}dz = \frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}.$$

Somit liefern die lebendigen Kräfte folgende Summanden:

$$\text{(VI.)} \qquad -\iiint\Sigma\left(h\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\delta\xi + \frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\delta\alpha_2\right)\varrho\sqrt{EG}\,du\,dv\,dt.$$

Wir haben nun die von den inneren Bedingungsgleichungen herrührenden Summanden zu berechnen. Diese Bedingungsgleichungen unter den bestehenden variirenden Grössen sind:

$$\alpha_0^2+\beta_0^2+\gamma_0^2-1=0, \quad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0,$$
$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2-1=0, \quad \alpha_2\alpha_0+\beta_2\beta_0+\gamma_2\gamma_0=0,$$
$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2-1=0, \quad \alpha_0\alpha_1+\beta_0\beta_1+\gamma_0\gamma_1=0.$$

$$\alpha_1\frac{\partial\xi}{\partial u}+\beta_1\frac{\partial\eta}{\partial u}+\gamma_1\frac{\partial\zeta}{\partial u} = 0,$$

$$\alpha_2\frac{\partial\xi}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial\eta}{\partial u}+\gamma_2\frac{\partial\zeta}{\partial u} = 0,$$

$$\alpha_2\frac{\partial\xi}{\partial v}+\beta_2\frac{\partial\eta}{\partial v}+\gamma_2\frac{\partial\zeta}{\partial v} = 0.$$

Diese 9 Bedingungsgleichungen sind mit unbestimmten Coefficienten zu versehen; ich multiplicire die ersten drei mit L_0, L_1, L_2, die zweiten drei mit M_0, M_1, M_2, die letzten drei mit N_0, N_1, N_2.

Die Coefficienten der Variationen der Cosinusse der Neigungswinkel sind sofort hinzuschreiben; sie bilden den Summanden:

$$\text{(VII.)} \quad +\iiint\Sigma\left\{\begin{array}{l}(2L_0\alpha_0+M_1\alpha_2+M_2\alpha_1)\delta\alpha_0 \\ +\left(2L_1\alpha_1+M_2\alpha_0+M_0\alpha_2+N_0\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)\delta\alpha_1 \\ +\left(2L_2\alpha_2+M_0\alpha_1+M_1\alpha_0+N_1\frac{\partial\xi}{\partial u}+N_2\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)\delta\alpha_2\end{array}\right\}\sqrt{EG}\,du\,dv\,dt.$$

Dagegen formen wir die Integrale, welche die Variationen der Ableitungen von ξ, η, ζ enthalten, in der wiederholt angewandten Weise in ein Integral über die Fläche und ein Integral über die Randcurve um und erhalten:

$$\text{(VIII.)} \quad -\iiint\Sigma\left\{\left(\frac{\partial(\sqrt{EG}N_0\alpha_1)}{\partial u}+\frac{\partial(\sqrt{EG}N_1\alpha_2)}{\partial u}+\frac{\partial(\sqrt{EG}N_2\alpha_2)}{\partial v}\right)\delta\xi\right\}du\,dv\,dt,$$

$$\text{(IX.)} \quad +\iiint\Sigma\left\{(N_0\alpha_1\sqrt{E}\cos(s,u)+N_1\alpha_2\sqrt{E}\cos(s,u)-N_2\alpha_2\sqrt{G}\cos(s,v))\,\delta\xi\right\}ds\,dt.$$

Die inneren Bedingungsgleichungen nehmen für den Rand eine andere Gestalt an; zunächst kommen für den Rand nur die Variationen $\delta\alpha_2$, $\delta\beta_2$, $\delta\gamma_2$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ in Betracht, wir bedürfen also auch nur der Bedingungsgleichungen:

$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 = 1,$$

$$\alpha_2\frac{\partial\xi}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial\eta}{\partial u}+\gamma_2\frac{\partial\zeta}{\partial u} = 0,$$

$$\alpha_2\frac{\partial\xi}{\partial v}+\beta_2\frac{\partial\eta}{\partial v}+\gamma_2\frac{\partial\zeta}{\partial v} = 0.$$

Aber diese letzten beiden Bedingungsgleichungen sind nur scheinbar zwei; sie sagen aus, dass die z-Axe jedes Elementes normal zur Mittelfläche bleiben soll; dies kann aber für den Rand nur bedeuten, dass die z-Axe des Randelementes normal zum Rande bleiben soll, und dies giebt nur die eine Gleichung:

$$\alpha_2\frac{\partial\xi}{\partial s}+\beta_2\frac{\partial\eta}{\partial s}+\gamma_2\frac{\partial\zeta}{\partial s} = 0.$$

Ich multiplicire die erste Bedingungsgleichung mit P, diese mit Q, die Coefficienten der Variationen $\delta\alpha_2$, $\delta\beta_2$, $\delta\gamma_2$ sind sofort hinzuschreiben:

$$\text{(X.)} \quad \iint\Sigma\left[\left(2P\alpha_2+Q\alpha_2\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)\delta\alpha_2\right]ds\,dt.$$

Dagegen ist:

$$\int Q\alpha_2\,\partial\frac{\delta\xi}{\partial s}\,ds = (Q\alpha_2\delta\xi)-\int\frac{\partial(Q\alpha_2)}{\partial s}\,\delta\xi\,ds;$$

in dem ersten Theil ist zu subtrahiren der Werth am Anfang der Randcurve von dem am Ende derselben; aber die Curve ist eine geschlossene, daher ist dieser Theil 0, und wir bekommen schliesslich den mit $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ behafteten Theil:

$$\text{(XI.)} \quad -\int\Sigma\left(\frac{\partial(Q\alpha_2)}{\partial s}\,\delta\xi\right)ds\,dt.$$

III.

Die Summe der Integrale (I.), (II.) etc. bis (XI.) muss 0 sein; indem man nun die Coefficienten der einzelnen Variationen, die sich auf das Innere und

den Rand beziehen, $=0$ setzt, erhält man 12 Gleichungen, die sich auf das Innere der Mittelfläche, und 6, die sich auf die Lage der Randpunkte beziehen. Ich setze von diesen nur die erste, vierte etc. hin; die anderen werden dadurch erhalten, dass in diesen für α, ξ, A und U die Buchstaben β, η, B und V resp. γ, ζ, C und W gesetzt werden.

Hauptgleichungen.

$$(1.\text{–}3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(X_1\sqrt{G}\alpha_0)}{\partial u}+\dfrac{\partial(T_1\sqrt{E}\alpha_0)}{\partial v}+\dfrac{\partial(Y_1\sqrt{E}\alpha_1)}{\partial v}+\Big(A_1-h\varrho\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\Big)\sqrt{EG} \\ \quad -\dfrac{\partial(\sqrt{EG}N_0\alpha_1)}{\partial u}-\dfrac{\partial(\sqrt{EG}N_1\alpha_2)}{\partial u}-\dfrac{\partial(\sqrt{EG}N_2\alpha_2)}{\partial v}=0. \end{cases}$$

$$(4.\text{–}6.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(X_2\sqrt{G}\alpha_0)}{\partial u}+\dfrac{\partial(T_2\sqrt{G}\alpha_1)}{\partial u}+\dfrac{\partial(T_2\sqrt{E}\alpha_0)}{\partial v}+\dfrac{\partial(Y_2\sqrt{E}\alpha_1)}{\partial v} \\ +\Big(A_2-\dfrac{h^3\varrho\partial^2\alpha_2}{12\partial t^2}\Big)\sqrt{EG} \\ +\Big(2L_2\alpha_2+M_0\alpha_1+M_1\alpha_0+N_1\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+N_2\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\Big)\sqrt{EG}=0. \end{cases}$$

$$(7.\text{–}9.)\quad \begin{cases} -\Big(Y_2\sqrt{E}\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial v}+T_2\sqrt{G}\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial u}+Y_1\sqrt{E}\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\Big) \\ \qquad +\Big(2L_1\alpha_1+M_2\alpha_0+M_0\alpha_2+N_0\dfrac{\partial\xi}{\partial u}\Big)\sqrt{EG}=0. \end{cases}$$

$$(10.\text{–}12.)\quad \begin{cases} -\Big(X_2\sqrt{G}\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial u}+T_2\sqrt{E}\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial v}+X_1\sqrt{G}\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+T_1\sqrt{E}\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\Big) \\ \qquad +\Big(2L_0\alpha_0+M_1\alpha_2+M_2\alpha_1\Big)\sqrt{EG}=0. \end{cases}$$

Grenzgleichungen.

$$(1.\text{–}3.)\quad \begin{cases} -X_1\alpha_0\cos(s,u)+T_1\alpha_0\cos(s,v)+Y_1\alpha_1\cos(s,v)+U_1 \\ \qquad +N_0\alpha_1\sqrt{E}\cos(s,u)+N_1\alpha_2\sqrt{E}\cos(s,u) \\ \qquad -N_2\alpha_2\sqrt{G}\cos(s,v)-\dfrac{\partial(Q\alpha_2)}{\partial s}=0. \end{cases}$$

$$(4.\text{–}6.)\quad \begin{cases} -X_2\alpha_0\cos(s,u)-T_2\alpha_1\cos(s,u)+T_2\alpha_0\cos(s,v) \\ \quad +Y_2\alpha_1\cos(s,v)+U_2+2P\alpha_2+Q\alpha_2\dfrac{\partial\xi}{\partial s}=0. \end{cases}$$

Die 12 Hauptgleichungen lassen sich auf 5 zurückführen.

Ich multiplicire die Gleichungen (10.–12.) der Reihe nach mit α_2, β_2, γ_2 und addire, so folgt, indem man die Gleichungen (2^a.) und (3^a.) berücksichtigt: $M_1=0$.

Multiplicirt man dieselben Gleichungen mit α_1, β_1, γ_1 und addirt, so

folgt, indem man die Gleichungen 8, 9, 10 berücksichtigt und Grössen höherer Ordnung vernachlässigt:

$$\frac{X_2 \Delta'}{\sqrt{EG}} + \frac{T_2 \Delta''}{G} - T_1 \sqrt{EG} + M_2 \sqrt{EG} = 0.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (7.—9.) mit resp. α_2, β_2, γ_2 und addirt, so folgt: $M_0 = 0$.

Multiplicirt man dieselben Gleichungen resp. mit α_0, β_0, γ_0 und addirt, so folgt:

$$\frac{Y_2 \Delta'}{\sqrt{EG}} + \frac{T_2 \Delta}{E} + M_2 \sqrt{EG} + N_0 \sqrt{E} \sqrt{EG} = 0.$$

Aus beiden Gleichungen folgt nunmehr:

$$N_0 \sqrt{E} . \sqrt{EG} = \frac{X_2 \Delta'}{\sqrt{EG}} + \frac{T_2 \Delta''}{G} - T_1 \sqrt{EG} - \frac{Y_2 \Delta'}{\sqrt{EG}} - \frac{T_2 \Delta}{E}.$$

Weiter werden wir die Gleichungen 7—12 incl. nicht gebrauchen.

Wir multipliciren nun die Gleichungen 1—3 incl. resp. mit:

$$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2,$$

addiren jedes Mal und setzen zugleich für $\frac{\partial (X \sqrt{G} \alpha_0)}{\partial u}$ etc.

$$X_1 \sqrt{G} \frac{\partial \alpha_0}{\partial u} + \alpha_0 \frac{\partial X_1 \sqrt{G}}{\partial u} \quad \text{etc.},$$

so folgt, indem wir die Gleichungen 8, 9, 10 berücksichtigen und Grössen höherer Ordnung vernachlässigen:

Hauptgleichungen.

$$(1.) \quad \left\{ \begin{aligned} & h \varrho \sqrt{EG} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \alpha_0 + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \beta_0 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \gamma_0 \right) \\ & \quad - \sqrt{EG} (A_1 \alpha_0 + B_1 \beta_0 + C_1 \gamma_0) - \frac{\partial (X_1 \sqrt{G})}{\partial u} - \frac{\partial (T_1 \sqrt{E})}{\partial v} \\ & \quad + \frac{Y_1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{N_0}{2} \frac{\partial E}{\partial v} - N_1 \frac{\Delta}{\sqrt{E}} - N_2 \frac{\Delta'}{\sqrt{E}} = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(2.) \quad \left\{ \begin{aligned} & h \varrho \sqrt{EG} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \alpha_1 + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \beta_1 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \gamma_1 \right) \\ & \quad - \sqrt{EG} (A_1 \alpha_1 + B_1 \beta_1 + C_1 \gamma_1) - \frac{\partial (Y_1 \sqrt{E})}{\partial v} + \frac{X_1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{T_1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial u} \\ & \quad + \frac{\partial (N_0 \sqrt{EG})}{\partial u} - N_1 \frac{\Delta'}{\sqrt{G}} - N_2 \frac{\Delta''}{\sqrt{G}} = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(3.)\quad \begin{cases} h\varrho\sqrt{EG}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\alpha_2+\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\beta_2+\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\gamma_2\right) \\ \quad -\sqrt{EG}(A_1\alpha_2+B_1\beta_2+C_1\gamma_2)-X_1\frac{\Delta}{E}-Y_1\frac{\Delta''}{G} \\ \quad -T_1\frac{\Delta'}{\sqrt{EG}}+N_0\frac{\Delta'}{\sqrt{G}}+\frac{\partial(N_1\sqrt{EG})}{\partial u}+\frac{\partial(N_2\sqrt{EG})}{\partial v}=0. \end{cases}$$

Multipliciren wir die Gleichungen (4.–6.) der Reihe nach mit: α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, γ_1, und addiren, so folgt:

$$(4.)\quad \begin{cases} \frac{h^3\varrho}{12}\sqrt{EG}\left(\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\alpha_0+\frac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2}\beta_0+\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2}\gamma_0\right) \\ \quad -\sqrt{EG}(A_2\alpha_0+B_2\beta_0+C_2\gamma_0)-\frac{\partial(X_2\sqrt{G})}{\partial u}-\frac{\partial(T_2\sqrt{E})}{\partial v} \\ \quad -\frac{T_2}{2\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}+\frac{Y_2}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}-N_1E\sqrt{G}=0. \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} \frac{h^3\varrho}{12}\sqrt{EG}\left(\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\alpha_1+\frac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2}\beta_1+\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2}\gamma_1\right) \\ \quad -\sqrt{EG}(A_2\alpha_1+B_2\beta_1+C_2\gamma_1)-\frac{\partial(Y_2\sqrt{E})}{\partial v}-\frac{\partial(T_2\sqrt{G})}{\partial u} \\ \quad +\frac{X_2}{2\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{T_2}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}-N_2G\sqrt{E}=0. \end{cases}$$

Grenzgleichungen.

Die Gleichungen (1.–3.) der Grenzgleichungen multipliciren wir mit:

$$\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0,\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,$$

addiren je drei und setzen zugleich:

$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial s}=\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial s_1}{\partial s}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial s_2}{\partial s}$$
$$=\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}\frac{\cos(s,v)}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}\frac{\cos(s,u)}{\sqrt{G}},$$

so erhalten wir:

$$(1.)\quad \begin{cases} (U_1\alpha_0+V_1\beta_0+W_1\gamma_0)-X_1\cos(s,u)+T_1\cos(s,v) \\ \quad +\frac{Q\Delta}{E\sqrt{EG}}\cos(s,v)+\frac{Q\Delta'}{EG}\cos(s,u)=0. \end{cases}$$

$$(2.)\quad \begin{cases} (U_1\alpha_1+V_1\beta_1+W_1\gamma_1)+Y_1\cos(s,v)+N_0\sqrt{E}\cos(s,u) \\ \quad +\frac{Q\Delta'}{EG}\cos(s,v)+\frac{Q\Delta''}{G\sqrt{EG}}\cos(s,u)=0. \end{cases}$$

$$(3.)\quad (U_1\alpha_2+V_1\beta_2+W_1\gamma_2)+N_1\sqrt{E}\cos(s,u)-N_2\sqrt{G}\cos(s,v)-\frac{\partial Q}{\partial s}=0.$$

Die Gleichungen (4.—6.) multipliciren wir mit α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, γ_1 und beachten, dass

$$\frac{\partial\xi}{\partial s}=\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial s_1}{\partial s}+\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial s_2}{\partial s}$$

$$=\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\cos(s,v)}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\cos(s,u)}{\sqrt{G}}.$$

Es folgt:

$$(4.)\quad U_2\alpha_0+V_2\beta_0+W_2\gamma_0-X_2\cos(s,u)+T_2\cos(s,v)+Q\cos(s,v)=0.$$

$$(5.)\quad U_2\alpha_1+V_2\beta_1+W_2\gamma_1+Y_2\cos(s,v)-T_2\cos(s,u)+Q\cos(s,u)=0.$$

Hier sind:

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,\quad X_2,\ Y_2,\ Z_2$$

aus den Gleichungen (12.) Seite 152 zu berechnen und einzusetzen.

Da die Integrationen sich von $-\frac{h}{2}$ bis $+\frac{h}{2}$ erstrecken sollen, so erhalten wir:

$$X_1=\frac{2kh}{1+\Theta}((1+2\Theta)\varepsilon_1+\Theta\varepsilon_2),$$

$$Y_1=\frac{2kh}{1+\Theta}(\Theta\varepsilon_1+(1+2\Theta)\varepsilon_2),$$

$$T_1=kh\tau,$$

$$X_2=\frac{kh^3}{6(1+\Theta)}\left((1+2\Theta)\frac{D-\Delta}{E\sqrt{EG}}+\Theta\frac{(D''-\Delta'')}{G\sqrt{EG}}\right),$$

$$Y_2=\frac{kh^3}{6(1+\Theta)}\left(\Theta\frac{(D-\Delta)}{E\sqrt{EG}}+(1+2\Theta)\frac{(D''-\Delta'')}{G\sqrt{EG}}\right),$$

$$T_2=\frac{kh^3}{6}\frac{(D'-\Delta')}{EG}.$$

Daraus wiederum folgt:

$$N_0\sqrt{EG}=-kh\tau\sqrt{G}+\frac{kh^3}{6\sqrt{E}EG}\left(\frac{D\Delta'-D'\Delta}{E}+\frac{D''\Delta'-D'\Delta''}{G}\right).$$

Ist die Schale eine Platte, also die Mittelfläche eine Ebene, so sind $D=D'=D''=0$; denn diese enthalten die Ableitungen der Cosinusse der Neigungswinkel der Normale mit den Axen nach u und v als Factoren, bei der Ebene sind aber jene Winkel constant, also ihre Ableitungen 0. Setzt man ferner $E=1$, $G=1$, so ist das auf der Platte angenommene Coordinatensystem ein geradlinig orthogonales, alsdann gehen, wenn wir von der

Beschleunigung absehen, unsere Gleichungen in die über, die *Clebsch* *) für das Gleichgewicht einer unendlich dünnen elastischen Platte, die endliche Formänderungen erleidet, angegeben hat.

Unendlich kleine Schwingungen in der Nähe der Gleichgewichtslage.

Während durch unsere Gleichungen für endliche Formänderungen die Coordinaten ξ, η, ζ jedes Punktes als Functionen von u, v und t bestimmt werden, kann man für den Fall, dass die Schale nur unendlich kleine Schwingungen ausführt, die Gleichungen so umformen, dass statt der Coordinaten die Verschiebungen jedes Punktes innerhalb und normal zur Fläche eintreten.

Es sollen nun zunächst die in jenen Gleichungen auftretenden Grössen:

$$\begin{matrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \tau, \\ \Delta, & \Delta', & \Delta'' \end{matrix}$$

durch die genannten Verschiebungen ausgedrückt werden. Es soll zu diesem Zwecke, was für die Fläche während der Formänderung mit α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 bezeichnet wurde, für die Fläche in der Gleichgewichtslage mit a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 bezeichnet werden.

Ich setze nun für kleine Formänderungen der Schale:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0+\alpha_0', & \beta_0 &= b_0+\beta_0', & \gamma_0 &= c_0+\gamma_0', \\ \alpha_1 &= a_1+\alpha_1', & \beta_1 &= b_1+\beta_1', & \gamma_1 &= c_1+\gamma_1', \\ \alpha_2 &= a_2+\alpha_2', & \beta_2 &= b_2+\beta_2', & \gamma_2 &= c_2+\gamma_2', \end{aligned}$$

wo die oben mit einem Strich versehenen Buchstaben kleine Grössen bedeuten.

Weil nun die α_0 etc. den Gleichungen (1.) pag. 139 genügen, die a_0 etc. aber ähnlichen Gleichungen genügen müssen, so folgt, indem man erwägt, dass α_0' etc. kleine Grössen bedeuten, und dass man Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen will:

$$a_0\alpha_0'+b_0\beta_0'+c_0\gamma_0'=0, \quad a_1\alpha_1'+b_1\beta_1'+c_1\gamma_1'=0, \quad a_2\alpha_2'+b_2\beta_2'+c_2\gamma_2'=0,$$

$$\begin{aligned} a_0\alpha_1'+b_0\beta_1'+c_0\gamma_1'+a_1\alpha_0'+b_1\beta_0'+c_1\gamma_0' &= 0, \\ a_1\alpha_2'+b_1\beta_2'+c_1\gamma_2'+a_2\alpha_1'+b_2\beta_1'+c_2\gamma_1' &= 0, \\ a_2\alpha_0'+b_2\beta_0'+c_2\gamma_0'+a_0\alpha_2'+b_0\beta_2'+c_0\gamma_2' &= 0. \end{aligned}$$

Diesen Gleichungen genügt man, indem man setzt:

$$\begin{aligned} \alpha_0' &= p_1a_2-p_2a_1, & \beta_0' &= p_1b_2-p_2b_1, & \gamma_0' &= p_1c_2-p_2c_1, \\ \alpha_1' &= p_2a_0-p_0a_2, & \beta_1' &= p_2b_0-p_0b_2, & \gamma_1' &= p_2c_0-p_0c_2, \\ \alpha_2' &= p_0a_1-p_1a_0, & \beta_2' &= p_0b_1-p_1b_0, & \gamma_2' &= p_0c_1-p_1c_0, \end{aligned}$$

*) Theorie der Elasticität §. 69, 92 und 93.

wo p_0, p_1, p_2 kleine Grössen bedeuten. Nun ist nach Gleichung (10.) p. 148:

$$\frac{\Delta}{E\sqrt{G}} = (a_2+\alpha_2')\frac{\partial(a_0+\alpha_0')}{\partial u}+(b_2+\beta_2')\frac{\partial(b_0+\beta_0')}{\partial u}+(c_2+\gamma_2')\frac{\partial(c_0+\gamma_0')}{\partial u},$$

$$\frac{\Delta}{E\sqrt{G}} = a_2\frac{\partial a_0}{\partial u}+b_2\frac{\partial b_0}{\partial u}+c_2\frac{\partial c_0}{\partial u}+a_2\frac{\partial\alpha_2'}{\partial u}+b_2\frac{\partial\beta_2'}{\partial u}+c_2\frac{\partial\gamma_2'}{\partial u}$$
$$+\alpha_2'\frac{\partial a_0}{\partial u}+\beta_2'\frac{\partial b_0}{\partial u}+\gamma_2'\frac{\partial c_0}{\partial u},$$

daher folgt mit Hülfe der Gleichungen (8.), (9.) und (10.):

$$\frac{\Delta}{E\sqrt{G}} = \frac{D}{E\sqrt{G}}+\frac{\partial p_1}{\partial u}-\frac{p_2 D'}{G\sqrt{E}}-\frac{p_0}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}.$$

Aehnlich folgt:

$$\frac{\Delta'}{E\sqrt{G}} = \frac{D'}{E\sqrt{G}}+\frac{\partial p_1}{\partial v}-\frac{p_2 D''}{G\sqrt{E}}+\frac{p_0}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\frac{\Delta'}{G\sqrt{E}} = \frac{D'}{G\sqrt{E}}-\frac{\partial p_0}{\partial u}+\frac{p_2 D}{E\sqrt{G}}-\frac{p_1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\frac{\Delta''}{G\sqrt{E}} = \frac{D''}{G\sqrt{E}}-\frac{\partial p_0}{\partial v}+\frac{p_2 D'}{E\sqrt{G}}+\frac{p_1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

Nun ist nach Gleichung (2.) Seite 140:

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = (a_0+\alpha'_0)\sqrt{E}(1+\varepsilon_1), \quad \text{etc.}$$

Ich setze $\xi = X+\xi'$, $\eta = Y+\eta'$, $\zeta = Z+\zeta'$, wo ξ', η', ζ' die kleinen Aenderungen der Coordinaten während der Deformation bedeuten; also ist:

$$\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\partial\xi'}{\partial u} = (p_1 a_2-p_2 a_1)\sqrt{E}(1+\varepsilon_1)+a_0\sqrt{E}(1+\varepsilon_1).$$

Nun ist:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = a_0\sqrt{E},$$

daher folgt, dass mit Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung:

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\xi'}{\partial u} = p_1 a_2-p_2 a_1+a_0\varepsilon_1$$

ist; ebenso folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\eta'}{\partial u} = p_1 b_2-p_2 b_1+b_0\varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\zeta'}{\partial u} = p_1 c_2-p_2 c_1+c_0\varepsilon_1.$$

Auf ähnliche Weise folgt aus den Gleichungen (3.) pag. 142:

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\xi'}{\partial v} = p_2 a_0 - p_0 a_2 + a_1\varepsilon_2 + a_0\tau,$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\eta'}{\partial v} = p_2 b_0 - p_0 b_2 + b_1\varepsilon_2 + b_0\tau,$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\zeta'}{\partial v} = p_2 c_0 - p_0 c_2 + c_1\varepsilon_2 + c_0\tau.$$

Multiplicirt man die obigen Gleichungen der Reihe nach mit a_0, b_0, c_0 und addirt, so folgt:

$$\sqrt{E}\,\varepsilon_1 = a_0\frac{\partial\xi'}{\partial u} + b_0\frac{\partial\eta'}{\partial u} + c_0\frac{\partial\zeta'}{\partial u}.$$

Aehnlich folgt:

$$\sqrt{G}\,\varepsilon_2 = a_1\frac{\partial\xi'}{\partial v} + b_1\frac{\partial\eta'}{\partial v} + c_1\frac{\partial\zeta'}{\partial v},$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(a_0\frac{\partial\xi'}{\partial v} + b_0\frac{\partial\eta'}{\partial v} + c_0\frac{\partial\zeta'}{\partial v}\right) - p_2,$$

$$p_0 = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(a_2\frac{\partial\xi'}{\partial v} + b_2\frac{\partial\eta'}{\partial v} + c_2\frac{\partial\zeta'}{\partial v}\right),$$

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(a_2\frac{\partial\xi'}{\partial u} + b_2\frac{\partial\eta'}{\partial u} + c_2\frac{\partial\zeta'}{\partial u}\right),$$

$$p_2 = -\frac{1}{\sqrt{E}}\left(a_1\frac{\partial\xi'}{\partial u} + b_1\frac{\partial\eta'}{\partial u} + c_1\frac{\partial\zeta'}{\partial u}\right).$$

Diese Ausdrücke sind noch wesentlich zu vereinfachen. Ich denke mir den geometrischen Ort der Mittelfläche der Schale in ihrer Ruhelage fixirt; um dieselbe, als Gleichgewichtslage, schwingt nun die wirkliche Mittelfläche; u, v sei irgend ein Punkt dieser Mittelfläche während der Gleichgewichtslage. Nach der Deformation denke ich mir von diesem Punkte ein Loth auf jene fixirte Mittelfläche gefällt; $u+u'$, $v+v'$ seien die Flächencoordinaten des Fusspunktes dieses Lothes, n die Grösse desselben. Ich denke mir nun das feste Coordinatensystem so verlegt, dass sein Anfangspunkt in den Punkt u, v der Mittelfläche fällt, und die Axen so gedreht, dass die X-Axe die Richtung von ds_1, die Y-Axe die von ds_2 und die Z-Axe die Richtung der Normale annimmt. Alsdann sind die Cosinusse der Neigungswinkel von ds_1 mit den 3 Axen a_0, b_0, c_0 resp. 1, 0, 0; für $d\xi'$ aber kann man in der Nähe des Anfangspunktes $= \sqrt{E}\,du'$ setzen, und daher folgt:

$$a_0\frac{\partial\xi'}{\partial u} + b_0\frac{\partial\eta'}{\partial u} + c_0\frac{\partial\zeta'}{\partial u} = \sqrt{E}\frac{\partial u'}{\partial u},$$

und daher findet man:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u'}{\partial u}.$$

Auf ähnliche Weise folgt:

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v'}{\partial v}, \quad \tau = \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial u'}{\partial v} - p_2,$$

$$p_0 = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial n}{\partial u}, \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial n}{\partial u}, \quad p_2 = -\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial v'}{\partial u},$$

daher schliesslich:

$$\tau = \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial u'}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial v'}{\partial u}.$$

Mit Benutzung der oben gefundenen Werthe für p_0, p_1, p_2 lassen sich nun auch Δ, Δ', Δ'' durch u', v', n ausdrücken:

$$\frac{\Delta}{E\sqrt{G}} = \frac{D}{E\sqrt{G}} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial n}{\partial u}\right) + \frac{D'}{E\sqrt{G}}\frac{\partial v'}{\partial u} + \frac{1}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial v},$$

$$\frac{\Delta'}{E\sqrt{G}} = \frac{D'}{E\sqrt{G}} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial n}{\partial u}\right) + \frac{D''}{E\sqrt{G}}\frac{\partial v'}{\partial u} - \frac{1}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v},$$

$$\frac{\Delta'}{G\sqrt{E}} = \frac{D'}{G\sqrt{E}} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial n}{\partial v}\right) - \frac{D}{E\sqrt{E}}\frac{\partial v'}{\partial u} - \frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial u},$$

$$\frac{\Delta''}{G\sqrt{E}} = \frac{D''}{G\sqrt{E}} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial n}{\partial v}\right) - \frac{D'}{E\sqrt{E}}\frac{\partial v'}{\partial u} + \frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial u}.$$

Wir können aus diesen Gleichungen $\frac{\Delta'}{EG}$ auf zwei verschiedene Arten ausdrücken,

$$\frac{\Delta'}{EG} = \frac{D'}{EG} + \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial^2 n}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2E\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial u} + \frac{D''}{EG}\frac{\partial v'}{\partial u} - \frac{1}{2G\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v},$$

$$\frac{\Delta'}{EG} = \frac{D'}{EG} + \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial^2 n}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2G\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v} - \frac{D}{E^2}\frac{\partial v'}{\partial u} - \frac{1}{2E\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial u}.$$

Diese beiden Ausdrücke unterscheiden sich aber durch die Grössen, welche $\frac{\partial v'}{\partial u}$ enthalten; wir müssen im Allgemeinen daraus schliessen, dass $\frac{\partial v'}{\partial u}$ klein und zu vernachlässigen ist gegen die übrigen in Betracht kommenden Grössen, also die Ableitungen von n nach u und v. Wir erhalten daher schliesslich:

$$\frac{\Delta}{E\sqrt{EG}} = \frac{D}{E\sqrt{EG}} + \frac{1}{G}\frac{\partial^2 n}{\partial u^2} - \frac{1}{2E^2}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial u} + \frac{1}{2EG}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial v},$$

$$\frac{\Delta'}{EG} = \frac{D'}{EG} + \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial^2 n}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2E\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial u} - \frac{1}{2G\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v},$$

$$\frac{\Delta''}{G\sqrt{EG}} = \frac{D''}{G\sqrt{EG}} + \frac{1}{E}\frac{\partial^2 n}{\partial u^2} - \frac{1}{2G^2}\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial v} + \frac{1}{2EG}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial u},$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke und der für ε_1, ε_2 und τ:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u'}{\partial u}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v'}{\partial v}, \quad \tau = \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial u'}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial v'}{\partial u}$$

lassen sich die Seite 168 angegebenen Spannungen durch die allein noch von der Zeit abhängigen Grössen u', v', n ausdrücken. Aber man bemerkt, dass die Spannungen von D, D', D'' unabhängig werden und nur von E und G abhängen. Es folgt daraus der Satz: Wenn zwei Flächen aufeinander abwickelbar sind, und die Ableitungen von n, u', v' nach u und v, d. h. die relativen Verschiebungen sind an entsprechenden Stellen gleich, so sind auch die an diesen Stellen auftretenden Spannungen gleich.

Es erübrigt noch, indem wir von den äusseren Kräften absehen, die Summanden der Bewegungsgleichungen, die von den Beschleunigungen herrühren, umzuformen. Es ist nun:

$$\alpha_0\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \beta_0\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \gamma_0\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \sqrt{E}\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2},$$

$$\alpha_1\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \beta_1\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \gamma_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \sqrt{G}\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2},$$

$$\alpha_2\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \beta_2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \gamma_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 n}{\partial t^2},$$

$$\alpha_0\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2} + \beta_0\frac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2} + \gamma_0\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial^3 n}{\partial t^2\partial u},$$

$$\alpha_1\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2} + \beta_1\frac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2} + \gamma_1\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^3 n}{\partial t^2\partial v}.$$

Diese letzten zwei Summanden sind jetzt nicht für den Fall einer Ebene oder eines Cylinders, die parallel einer Axe sind, zu berücksichtigen, sondern überhaupt für jede Fläche. Denn indem wir unsere letzten Betrachtungen auf jeden Punkt anwenden, wird jeder Punkt zu einem Ausnahmepunkte, wie wir ihn Seite 161 bezeichnet haben.

Durch die gemachten Umformungen gingen unsere Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Schale, die in der Nähe der Gleichgewichtslage unendlich kleine Schwingungen ausführt, über in Gleichungen für u', v', n, die Verschiebungen innerhalb und normal zur Fläche.

Für die Ebene vereinfachen sich diese Gleichungen wesentlich dadurch, dass $D = D' = D'' = 0$ ist. Man sieht nämlich, dass alsdann die zwei ersten Haupt- und Grenzgleichungen nur u' und v' enthalten, während in den übrigen ausserdem noch n vorkommt; jene vier Gleichungen für die Schwingungen

innerhalb der Ebene werden befriedigt, wenn man $u' = 0$, $v' = 0$ setzt. Setzt man für u' und v' diese Werthe auch in die übrigen Gleichungen ein, so erhält man Gleichungen für die Transversalschwingungen der Platte, entsprechend denen, die Herr *Kirchhoff* zuerst zur Berechnung der Klangfiguren von Kreisscheiben angewandt hat. Um nun aus unseren Gleichungen jene Gleichungen, wie es für eine kreisrunde Scheibe passend ist, in Polarcoordinaten zu erhalten, wählt man $u = r$, $v = \vartheta$, wo r den Radius vector, ϑ die Amplitude bedeutet. Wegen:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$$

hat man $E = 1$, $G = r^2$ zu setzen. Man erhält alsdann dieselben Gleichungen, welche *Clebsch* *) durch Transformation der Gleichungen für geradlinige orthogonale Coordinaten erhalten hat.

---

*) Theorie der Elasticität §. 78, 129.
Berlin, 1873.

Zwei Erzeugnisse krumm-geometrischer Gebilde.

(Von Herrn *Milinowski* in Tilsit.)

Im 54. Bande dieses Journals giebt Herr *Schroeter* eine Methode an, die Einhüllende entsprechender Punkte zweier projectivischen Punktreihen auf zwei Kegelschnitten nach Classe und Ordnung zu bestimmen. Diese Methode lässt sich unmittelbar auf den Fall anwenden, dass die projectivischen Punktreihen auf zwei einander collinear entsprechenden Curven C^n und C_1^n n^{ter} Ordnung liegen. Es seien also $ABC...X$ und $A_1B_1C_1...X_1$ die projectivischen Punktreihen auf C^n und C_1^n; welches ist die Einhüllende $\mathfrak{K}$ der Geraden AA_1, BB_1, CC_1, ..., XX_1? Durch einen beliebigen Punkt P ziehen wir Strahlen $abc...x$ nach $ABC...X$, so entsprechen ihnen Strahlen $a_1b_1c_1...x_1$ durch $A_1B_1C_1...X_1$, welche sich in einem Punkt P_1 schneiden. Die Büschel $P(abc...x)$ und $P_1(a_1b_1c_1...x_1)$ sind projectivisch und erzeugen einen Kegelschnitt K, welcher jede der Curven C^n und C_1^n in $2n$ Punkten schneidet. Verbindet man P mit den Schnittpunkten von K und C^n, so erhält man die $2n$ Tangenten von P an die gesuchte Enveloppe $\mathfrak{K}$. Diese ist also von der $2n^{\text{ten}}$ Classe. — Von den Punkten $A_1B_1C_1...X_1$ nehmen wir in Bezug auf C^n die ersten Polaren; die Einhüllende derselben ist eine Curve der $n(n-1)^{2\text{ten}}$ Ordnung, durch jeden Punkt gehen n solche Polaren. Sind Q und Q_1 zwei einander collinear entsprechende Punkte von C^n und C_1^n, so sind die Büschel $Q(A...X)$ und $Q_1(A_1...X_1)$ in projectivischer Beziehung und daher können wir auch sagen, dass das Büschel $Q(A...X)$ in projectivischer Beziehung zur Punktreihe $A_1...X_1$ steht. Diese steht aber mit der Reihe der ersten Polaren ihrer Punkte in Bezug auf C^n in projectivischer Beziehung, also sind dadurch diese Reihen der Polaren und das Büschel $Q(A...X)$ projectivisch aufeinander bezogen. Eine beliebige Gerade g werde von einem Strahl von Q in $\mathfrak{A}$ geschnitten; die diesem Strahl entsprechende erste Polare schneidet g in $n-1$ Punkten $\mathfrak{A}'$; durch einen Punkt $\mathfrak{A}'$ gehen n solcher ersten Polaren, jeder entspricht ein Strahl durch Q, welcher g in einem Punkt $\mathfrak{A}$ schneidet. Die Punktreihen $\mathfrak{A}...$ und $\mathfrak{A}'...$ sind daher in $(n-1,n)$ gliedriger Beziehung und haben $2n-1$ Doppelpunkte; also ist der Ort der Schnittpunkte der Strahlen von Q mit den ihnen entsprechenden ersten Polaren eine Curve K^{2n-1} der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche in Q einen n fachen Punkt hat und C^n ausser in ihm noch in $2n(n-1)$ Punkten schneidet. In ihnen wird C^n von der Enveloppe $\mathfrak{K}$ berührt; auch C_1^n wird von $\mathfrak{K}$ in ebenso vielen Punkten berührt. — Drei Punkte giebt es in den collinearen Systemen, in denen C^n und C_1^n entsprechende Curven sind, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Wir nennen sie LMN. Der Kegelschnitt K, welcher durch die projectivischen Büschel $P(a...x)$ und $P_1(a_1...x_1)$ erzeugt wurde, muss durch die drei Punkte LMN gehen. Wenn also P auf einer Geraden g und P_1 sich auf der collinear entsprechenden Geraden g_1 bewegt, so gehört jedem Paar von Punkten P und P_1 ein Kegelschnitt K an; alle diese Kegelschnitte gehen ausser durch LMN noch durch den Schnittpunkt O von g und g_1 und bilden daher ein Büschel. Von ihnen berühren $n(n+1)$ jede der Curven C^n und C_1^n; daraus folgt, dass g oder g_1 die Enveloppe $\mathfrak{K}$ in $n(n+1)$ Punkten schneidet, also ist $\mathfrak{K}$ von der $n(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Ziehen wir durch L beliebige Strahlen und rechnen diese zum ersten System, so entsprechen ihnen im zweiten andere Strahlen auch durch L; die beiden so entstehenden Büschel sind in projectivischer Beziehung und haben zwei Doppelstrahlen, LM und LN, welche an die Stelle des Kegelschnitts K treten. Auf jede dieser Geraden fallen n Tangenten an $\mathfrak{K}$ zusammen, also sind LM, LN und ebenso MN n fache Tangenten von $\mathfrak{K}$. — Die erhaltenen Resultate sind zusammengefasst:

1. *Die Verbindungsgeraden homologer Punkte auf zwei Curven C^n und C_1^n der n^{ten} Ordnung, welche sich in collinearen Systemen entsprechen, werden von einer Curve $\mathfrak{K}$ der $2n^{\text{ten}}$ Classe und $n(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung eingehüllt, welche jede der Curven C^n und C_1^n in $2n(n-1)$ Punkten berührt und die drei Geraden, welche in den collinearen Systemen sich selbst entsprechen, zu n fachen Tangenten hat.*

Lässt man jedem Punkt P in der Ebene eines Kegelschnittbüschels seinen conjugirten Punkt P_1 entsprechen, so entsprechen allen Punkten einer Curve C^n, welche in einem der drei Tripelpunkte QRS des Kegelschnittbüschels, z. B. in Q einen $(n-1)$ fachen Punkt hat, alle Punkte einer Curve C_1^{n+1} von der Ordnung $n+1$, welche durch die Tripelpunkte QRS des Kegelschnittbüschels geht und Q zu einem n fachen Punkt hat. Sind wieder $ABC\ldots X$ und $A_1B_1C_1\ldots X_1$ entsprechende Punkte auf C^n und C_1^{n+1}, welches ist die Enveloppe aller Geraden $AA_1, \ldots XX_1$? — Einem Strahlenbüschel durch A entspricht ein projectivisches Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten A_1QRS; beide Büschel erzeugen eine Curve dritter Ordnung, welche durch AA_1QRS geht; ihr entspricht eine Curve dritter Ordnung, die auch durch AA_1QRS geht und jene nur noch in vier Punkten schneidet, die mit ihren conjugirten zusammenfallen und also die Grundpunkte $LMNO$ des Kegelschnittbüschels sind. Ausser ihnen giebt es keine Punkte in der Ebene, die mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Sind P und P_1 zwei conjugirte Punkte, so entspricht einem Strahlenbüschel durch P ein projectivisches Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten P_1QRS; die von beiden erzeugte Curve K^3 dritter Ordnung schneidet C_1^{n+1} ausser in QRS noch in $2n+1$ Punkten und die Verbindungslinien dieser Punkte mit P geben die $2n+1$ möglichen Tangenten, welche sich von P an die gesuchte Enveloppe $\mathfrak{K}$ ziehen lassen; diese ist also von der $(2n+1)^{\text{ten}}$ Classe. Den Punkt P lassen wir auf einer Geraden g sich bewegen, so bewegt sich P_1 auf einem Kegelschnitt γ_1^2, der auch durch QRS geht; je zwei entsprechenden Punkten P und P_1 entspricht eine Curve dritter Ordnung K^3. Alle so erhaltenen Curven $K^3\ldots$ gehen durch die vier sich selbst conjugirten Punkte $LMNO$, durch die Schnittpunkte T und U von g und γ_1^2 und durch die Punkte QRS, und bilden also ein Büschel. Jede dieser Curven schneidet C_1^{n+1} in $3(n+1)$ Punkten; zieht man hiervon den n fachen Punkt Q und die beiden Punkte R und S ab, so bleiben noch Gruppen von je $2n+1$ Punkten; diese bilden eine Involution des $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grades, welche $4n$ Doppelpunkte hat; daher giebt es auch $4n$ Curven $K^3\ldots$, welche C_1^{n+1} in $4n$ Punkten berühren, und daher giebt es auf g auch $4n$ Punkte der Enveloppe; diese ist also von der Ordnung $4n$.

Die ersten Polaren aller Punkte von C^n in Bezug auf C_1^{n+1} bilden eine Reihe von Curven $K^n\ldots$ der n^{ten} Ordnung und vom Index n, welche in projectivischer Beziehung zu dem Strahlenbüschel mit dem Scheitel Q steht, dessen Strahlen die Punkte $AB\ldots$ von C^n projiciren, welche in projectivischer Beziehung mit den Polen $A_1B_1\ldots$ von $K^n\ldots$ sind. Daher erzeugt die Reihe K^n mit dem projectivischen Strahlenbüschel durch Q eine Curve $\mathfrak{K}^{2n}$ der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung, welche Q zu einem n fachen Punkt hat. Die Curven C_1^{n+1} und $\mathfrak{K}^{2n}$ schneiden sich also ausser in Q noch in $2n(n+1)-n(n^2-1)$ oder $n(n+2)$ Punkten; in ihnen wird C_1^{n+1} von der Enveloppe $\mathfrak{K}$ berührt. Auf dieselbe Weise findet man, dass $\mathfrak{K}$ auch C^n in n^2+1 Punkten berührt. Also:

2. *Sind C^n und C_1^{n+1} zwei Curven n^{ter} und $(n+1)^{ter}$ Ordnung, welche denselben Punkt Q als $(n-1)$ resp. n fachen Punkt haben und deren Punkte $AB\ldots X$ und $A_1B_1\ldots X_1$ in der Beziehung stehen, dass jeder Punkt X der conjugirte Punkt von X_1 in Bezug auf ein festes Kegelschnittbüschel ist, welches Q als einen Tripelpunkt hat, so ist die Enveloppe $\mathfrak{K}$ aller Verbindungsgeraden je zweier conjugirten Punkte eine Curve der $(2n+1)^{ten}$ Classe und $4n^{ten}$ Ordnung, welche C^n in n^2+1 und C_1^{n+1} in $n(n+2)$ Punkten berührt.*

Für $n=1$ folgt das in der citirten Abhandlung angegebene Resultat:

Das Erzeugniss zweier projectivischen Gebilde, einer krummen Punktreihe auf einem Kegelschnitt und einer geraden Punktreihe auf einer Geraden ist eine Curve dritter Classe und vierter Ordnung, welche die gegebene Gerade zur Doppeltangente hat und den gegebenen Kegelschnitt dreimal berührt.

Da zwei projectivische Kegelschnitte stets als entsprechende Curven in collinearen Systemen betrachtet werden können, so folgt aus Satz 1.:

Das Erzeugniss zweier projectivischen Punktreihen auf zwei Kegelschnitten ist eine Curve vierter Classe und sechster Ordnung, welche drei Doppeltangenten hat und jeden der beiden Kegelschnitte viermal berührt.

Zur Geometrie der ebenen Curven dritter Ordnung.

(Von Herrn *Milinowski* in Tilsit.)

In einer Abhandlung „Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven“ hat *Steiner* im 47. Bande dieses Journals eine Reihe von Sätzen ohne Beweis mitgetheilt. Ein Theil dieser Sätze, soweit sie sich auf Curven dritter Ordnung beziehen, soll im Folgenden auf geometrischem Wege abgeleitet werden. Wir betrachten dazu eine ebene Curve C^3 als die Tripelcurve eines Kegelschnittnetzes N und nehmen einen beliebigen Punkt P_1, der nicht auf der Curve liegt. Durch P_1 werde eine variable Gerade x gelegt, welche C^3 in $X_1X_2X_3$ schneidet. Zu je zwei Punkten der Tripelcurve giebt es einen dritten von der Beschaffenheit, dass alle drei die Doppelpunkte der drei Geradenpaare eines Kegelschnittbüschels sind, dessen sämmtliche Kegelschnitte dem Netze N angehören. Die Punkte, welche mit X_1X_2, X_2X_3, X_3X_1 je ein Tripel bilden, seien X_{12}, X_{23}, X_{31}; wir bezeichnen ferner irgend 3 andere Tripel mit τ_{12}, τ_{23}, τ_{31}. Da 2 Tripel einer Tripelcurve stets auf einem Kegelschnitt liegen, so liegen auch $X_1X_2X_{12}$ und τ_{12}, $X_2X_3X_{23}$ und τ_{23}, $X_3X_1X_{31}$ und τ_{31} je auf einem Kegelschnitt $\varkappa_{12}$, $\varkappa_{23}$, $\varkappa_{31}$. Aendert sich x in $x'x''\ldots$, so erhält man die Tripel $X_1'X_2'X_{12}'$, $X_1''X_2''X_{12}''$, $\ldots$, $X_2'X_3'X_{23}'$, $X_2''X_3''X_{23}''$, $\ldots$, $X_3'X_1'X_{31}'$, $X_3''X_1''X_{31}''$ $\ldots$, und durch dieselben die Kegelschnitte $\varkappa_{12}'\varkappa_{12}''\ldots$, $\varkappa_{23}'\varkappa_{23}''\ldots$, $\varkappa_{31}'\varkappa_{31}''\ldots$. Diese bilden drei Netze von Kegelschnitten, denn alle $\varkappa_{12}$ gehen durch die drei Tripelpunkte des Tripels τ_{12}, alle $\varkappa_{23}$ durch die des Tripels τ_{23} und endlich alle $\varkappa_{31}$ durch die des Tripels τ_{31}. Die Polaren von P_1 bezüglich der Kegelschnitte dieser drei Netze sind die Geraden dreier collinearen Systeme. Alle Punkte, durch welche drei entsprechende Gerade dieser Systeme gehen, liegen auf einer Curve C_1^3 dritter Ordnung, und diese trennt je zwei Punkte X_1X_2, X_2X_3, X_3X_1 von P_1 harmonisch.

Geht x in eine der sechs Tangenten, die sich von P_1 an C^3 ziehen lassen, über, so fallen zwei der drei Schnittpunkte, etwa X_2 und X_3 zusammen in den Berührungspunkt, daher geht C_1^3 durch den Berührungspunkt X_2 und berührt x in einem Punkt P, der P_1 von X_1 und X_2 harmonisch trennt. Also:

1. *Alle Punkte, welche durch je zwei Punkte einer Tripelcurve C^3 von einem festen Punkt P_1 harmonisch getrennt werden, liegen auf einer Curve*

C_1^3 dritter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte der von P_1 an C^3 gezogenen Tangenten geht und diese Tangenten selbst berührt. C^3 und C_1^3 schneiden sich daher in sechs Punkten eines Kegelschnitts und in drei Punkten einer Geraden der geraden Polare von P_1. — Liegt P_1 auf C^3, so zerfällt C_1^3 in die conische Polare von P_1 und in die Tangente durch P_1. — Ist Q ein Punkt von C_1^3 und trifft P_1Q die C^3 in drei Punkten $Q_1Q_2Q_3$, von denen zwei, etwa Q_1Q_2 durch Q und P_1 harmonisch getrennt sind; sind q_1 und q_2 die Tangenten in Q_1 und Q_2 an C^3, so ist die Gerade, welche den Schnittpunkt (q_1q_2) mit Q verbindet, Tangente in Q an C_1^3. —

Denn ist Q' ein anderer Punkt von C_1^3 und sind $Q_1'Q_2'$ die Punkte von C^3 auf P_1Q', welche P_1 und Q' harmonisch trennen, so müssen die Geraden QQ', Q_1Q_1', Q_2Q_2' sich in einem Punkt schneiden. Rückt nun Q' unendlich nahe an Q, also auch Q_1' an Q_1, Q_2' an Q_2, so gehen die Geraden QQ', Q_1Q_1', Q_2Q_2' in die Tangenten q an C_1^3, q_1q_2 an C^3 über und schneiden sich in einem Punkt.

Die gerade Polare von P_1 schneide C^3 in $M_0M_1M_2$ und P_1M_0 schneide C^3 noch in $M_0'M_0''$, dann müssen $M_0'M_0''$ durch P_1M_0 harmonisch getrennt werden, weil die conische Polare von M_0 durch P_1 gehen muss. — Da also C_1^3 und C^3 sich in den neun Schnittpunkten der conischen und geraden Polare von P_1 schneiden, so kann C_1^3 *die harmonische Polarcurve von* P_1 genannt werden.

Auf der Curve C_1^3 sei $\mathfrak{P}_1$ ein beliebiger Punkt; dann liegen alle Punkte, welche je zwei Punkte von C^3 harmonisch von $\mathfrak{P}_1$ trennen, auf einer Curve $\mathfrak{C}_1^3$. Diese muss durch P_1 gehen, denn sind $X_1X_2X_3$ die Schnittpunkte von $P_1\mathfrak{P}_1$ mit C^3, so werden zwei von ihnen, etwa X_1 und X_2, durch P_1 und $\mathfrak{P}_1$ harmonisch getrennt. — Lassen wir P_1 sich auf einer Geraden l bewegen, so entspricht ihm eine veränderliche Curve C_1^3; allen Punkten P_1 entsprechen also die Curven C_1^3. Wie viele von ihnen gehen durch einen beliebigen Punkt P_2? Dem Punkt P_2 entspricht eine Curve C_2^3, welche l in drei Punkten $P_qP_rP_s$ schneidet, und die diesen entsprechenden Curven müssen durch P_2 gehen. Es folgt:

2. *Liegt ein Punkt P_1 auf der einem andern Punkt $\mathfrak{P}_1$ entsprechenden Curve $\mathfrak{C}_1^3$, so liegt der letztere auf der dem Punkte P_1 entsprechenden Curve C_1^3. — Von der ganzen Schaar Curven C_1^3, die den Punkten P_1 einer Geraden l entsprechen, gehen 3 durch einen beliebigen Punkt.* (Dieses Journal Bd. 47 pag. 93. II^a. und II^b.)

Die Curve C_1^3 schneide die unendlich entfernte Gerade g_∞ in $\mathfrak{P}_\infty\mathfrak{D}_\infty\mathfrak{R}_\infty$;

man ziehe $P_1\mathfrak{P}_\infty$, $P_1\mathfrak{D}_\infty$, $P_1\mathfrak{R}_\infty$ und erhält auf jeder Geraden drei Schnittpunkte mit C^3, nämlich $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'\mathfrak{R}''$, und auf jeder Geraden giebt es zwei Punkte, welche durch P_1 und g_∞ harmonisch getrennt werden, so dass etwa $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'P_1\mathfrak{P}_\infty$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'P_1\mathfrak{D}_\infty$, $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'P_1\mathfrak{R}_\infty$ je vier harmonische Punkte sind; es liegt also P_1 in der Mitte von $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$. Die letzten sechs Punkte müssen auf einem Kegelschnitt liegen, dessen Mittelpunkt P_1 ist; also:

3. *Durch jeden Punkt P_1 in der Ebene einer Curve dritter Ordnung C^3 lassen sich höchstens drei solche Sehnen ziehen, dass die Entfernung von zwei ihrer Schnittpunkte mit C^3 durch P_1 halbirt wird. Die sechs Endpunkte dieser Sehnen liegen auf einem Kegelschnitt I^2; Steiner nennt ihn die innere Polare des Punktes P_1 in Bezug auf C^3. — Liegt P_1 auf C^3, so giebt es höchstens zwei solche Sehnen; sie verbinden P_1 mit den unendlich entfernten Punkten der äusseren Polare von P_1.*

Wählen wir statt der Geraden g_∞ eine beliebige Gerade g, so erhalten wir den Satz:

4. *Durch jeden Punkt P_1 lassen sich höchstens drei Sehnen von C^3 ziehen, welche durch P_1 und eine Gerade g harmonisch getheilt werden. P_1 und g sind Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt, der durch die Endpunkte jener sechs Sehnen geht.*

Die Curven C^3 und C_1^3 schneiden sich ausser in den Berührungspunkten $ABCDEF$ der von P_1 an C^3 gezogenen Tangenten noch in 3 Punkten GHI einer Geraden p; die Geraden P_1G, P_1H, P_1I mögen C^3 noch in G_1G_2, H_1H_2, I_1I_2 treffen, dann sind $P_1GG_1G_2$, $P_1HH_1H_2$, $P_1II_1I_2$ je vier harmonische Punkte; es liegen also $G_1G_2H_1H_2I_1I_2$ auf einem Kegelschnitt $\varkappa_2$, in Bezug auf welchen P_1 und p Pol und Polare sind. — Die sechs Tangenten von P_1 aus an C^3 mögen C^3 noch in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ schneiden; dann liegen die sechs Punkte $ABCDEF$ auf einem Kegelschnitt K^2 und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ auf dem begleitenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$. Beide berühren sich doppelt in den Schnittpunkten der Polare von P_1 bezüglich K^2. Sind $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ die sechs Punkte, welche $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$, $D\mathfrak{D}$, $E\mathfrak{E}$, $F\mathfrak{F}$ harmonisch von P_1 trennen, so berührt in ihnen C_1^3 die von P_1 ausgehenden Tangenten an C^3; die Punkte $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ liegen also auf einem Kegelschnitt K_1^2, der conischen Polare von P_1 bezüglich C_1^3. Der begleitende Kegelschnitt von K_1^2 ist aber K^2, also berühren sich $K^2\mathfrak{K}^2K_1^2$ doppelt in denselben beiden Punkten. Also:

5. *Die einem Punkt P_1 entsprechende Curve C_1^3 hat mit C^3 dieselben sechs durch P_1 gehenden Tangenten. Die conische Polare K^2 von P_1 bezüglich*

C^3 und die conische Polare K_1^2 von P_1 bezüglich C_1^3 berühren sich doppelt in den Schnittpunkten der Polare von P_1 in Bezug auf K^2 oder K_1^2; der Kegelschnitt K^2 ist der begleitende Kegelschnitt von K_1^2. — Der Punkt P_1 hat dieselbe gerade Polare bezüglich C^3 und C_1^3.

Die Gerade p, auf welcher drei Schnittpunkte GHI der Curven C^3 und C_1^3 liegen, und der Kegelschnitt z^2, auf welchem die sechs Schnittpunkte $G_1 G_2 H_1 H_2 I_1 I_2$ von $P_1 G$, $P_1 H$, $P_1 I$ mit C^3 liegen, bilden auch eine Curve (z^2, p) der dritten Ordnung, in Bezug auf welche P_1 dieselbe conische Polare K^2 hat, wie in Bezug auf C^3; daher muss K^2 durch die Schnittpunkte von z^2 und p gehen:

6. ***Die conische Polare K^2 von P_1 in Bezug auf C^3 geht durch die Schnittpunkte von p und z^2.***

Die innere Polare I^2 von P_1 bezüglich C^3 schneidet diese Curve in den sechs Punkten $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{D}\mathfrak{D}'\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$; es liegen daher die Schnittpunkte $\mathfrak{P}''\mathfrak{D}''\mathfrak{R}''$ von $P_1\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, $P_1\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$, $P_1\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ und C^3 in einer Geraden g, und es hat P_1 in Bezug auf die Curve (I^2, g) dritter Ordnung dieselbe conische Polare K^2, wie in Bezug auf C^3, also muss K^2 durch die Schnittpunkte von I^2 und g gehen; es müssen aber auf K^2 auch die Berührungspunkte der von P_1 an I^2 gezogenen Tangenten liegen oder zwei Schnittpunkte von K^2 und I^2 müssen mit den Schnittpunkten von I^2 und der Polare von P_1 bezüglich I^2 zusammenfallen. Diese Polare ist aber die unendlich entfernte Gerade g_∞, weil P_1 der Mittelpunkt von I^2 ist, daher geht K^2 durch die Schnittpunkte von I^2 und g_∞, also folgt der Satz:

7. ***Die conische und die innere Polare eines Punktes P_1 schneiden sich auf der Geraden g, auf welcher C^3 von den Sehnen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$, in deren Mitte P_1 liegt, getroffen wird, und auf g_∞; daher müssen ihre Asymptoten parallel sein.***

Wir bezeichnen die Poloconik von g_∞ mit E_∞; da die conische Polare K^2 irgend eines Punktes P von E_∞ eine Parabel ist, also g_∞ berührt, so muss auch die innere Polare I^2 von P die Gerade g_∞ in demselben Punkt berühren. Es ist aber P der Mittelpunkt von I^2, also muss I^2 in ein Paar parallele Gerade zerfallen, welche der Achse der Parabel K^2 parallel sind. — Ist P ein Punkt von C^3, so besteht die ihm entsprechende Curve C_1^3 aus der conischen Polare K^2 von P bezüglich C^3 und der Tangente t in P an C^3; es schneiden K^2 und t die unendlich entfernte Gerade g_∞ in drei Punkten $\mathfrak{P}_\infty \mathfrak{D}_\infty \mathfrak{R}_\infty$, und die Geraden $P\mathfrak{P}_\infty$, $P\mathfrak{D}_\infty$, $P\mathfrak{R}_\infty$ treffen C^3 in $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'P$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'P$, $\mathfrak{R}PP$, so dass

$P\mathfrak{P}_\infty\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, $P\mathfrak{D}_\infty\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$, $P\mathfrak{R}_\infty\mathfrak{R}P$ je vier harmonische Punkte sind, also liegt P in der Mitte von $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$. Es giebt durch P auf C^3 also nur die beiden Sehnen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$, welche von P halbirt werden, die dritte reducirt sich auf den Punkt P; daher ist die innere Polare von P das Geradenpaar $P\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ und $P\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$, diese beiden Geraden sind nach den unendlich fernen Punkten $\mathfrak{P}_\infty\mathfrak{D}_\infty$ von K^2 gerichtet, also den Asymptoten dieses Kegelschnitts parallel.

Die conische Polare K^2 von P ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem P innerhalb, auf oder ausserhalb der Ellipse E_∞, der Poloconik von g_∞ liegt; im ersten Fall sind die Geraden $P\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ und $P\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$ imaginär, im zweiten fallen sie zusammen, im dritten sind beide reell. Es giebt auf C^3 nur sechs Punkte von der Eigenschaft, dass durch sie nur eine Sehne von C^3 geht, welche in ihnen halbirt wird, nämlich die 6 Schnittpunkte von E_∞ und C^3. Ist P_0 einer dieser sechs Punkte, K_0^2 seine conische Polare, so berührt dieselbe g_∞ in einem Punkt $\mathfrak{R}_0$, und $P_0\mathfrak{R}_0$ ist die einzige Sehne durch P_0, welche in P_0 halbirt wird, ihre Schnittpunkte mit C^3 seien $\mathfrak{R}_0'\mathfrak{R}_0''$, so dass also $P_0\mathfrak{R}_0'$ und $P_0\mathfrak{R}_0''$ einander gleich sind. — Die innere Polare I^2 eines beliebigen Punktes P schneidet C^3 in sechs Punkten $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{D}\mathfrak{D}'\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$, und da g_∞ die Polare von P bezüglich I^2 ist, so müssen die Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{P}'\mathfrak{D}'$ und auch $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}'\mathfrak{R}'$ sich auf g_∞ schneiden; für einen Punkt P_0 fallen die Punkte $\mathfrak{D}\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{D}'\mathfrak{R}'$ mit $\mathfrak{P}'$ zusammen; die Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{P}'\mathfrak{D}'$ werden Tangenten an C^3, und da sie sich auf g_∞ schneiden, parallele Tangenten. Aus Allem folgt:

8. *Der Ort des Pols, dessen innere Polare I^2 in zwei Gerade zerfällt, besteht aus zwei getrennten Curven, nämlich:*

1) *aus der Poloconik E_∞ der unendlich entfernten Geraden g_∞,*

2) *aus der Curve C^3 selbst:*

Für jeden auf E_∞ liegenden Pol P besteht die innere Polare I^2 aus zwei parallelen Geraden. — Für jeden auf C^3 liegenden Pol besteht I^2 aus den beiden Sehnen s und s_1, welche in P halbirt werden; diese sind den Asymptoten der conischen Polare K^2 von P parallel. Daher sind beide Sehnen reell oder imaginär oder fallen zusammen, je nachdem K^2 Hyperbel oder Ellipse oder Parabel ist. Es giebt im Ganzen nur sechs Pole auf C^3, für welche K^2 Parabel wird, also die Sehnen s und s_1 in eine s_0 zusammenfallen; diese sechs Pole P_0 sind die Schnittpunkte von E_∞ und C^3. Jede der sechs entsprechenden Sehnen s_0 hat die Eigenschaft, dass die Tangenten in ihren Endpunkten an C^3 parallel sind. — Liegt P in einem Wendepunkt W, so besteht dessen äussere

conische Polare aus der Wendetangente w und der harmonischen Polare h von W; deshalb muss die innere Polare aus zwei Geraden bestehen, von denen die eine mit w zusammenfällt und die andere parallel zu h ist. (Dieses Journal Bd. 47 pag. 36, 37, 38. I., II.)

Die *Hesse*sche Curve $\mathfrak{C}^3$ von C^3 hat die Eigenschaft, dass die conischen Polaren ihrer Punkte Geradenpaare sind, deren Scheitel wieder auf $\mathfrak{C}^3$ liegen. Letztere wird von E_∞ in drei Punkten berührt, deren conische Polaren in zwei parallele Gerade zerfallen; die inneren Polaren dieser Punkte bestehen ebenfalls aus 2 Geraden, welche den Geraden der äusseren Polare parallel sind; also:

9. ***In der ganzen Ebene giebt es nur drei Punkte, die Berührungspunkte von E_∞ mit der Hesseschen Curve $\mathfrak{C}^3$ von C^3, deren äussere conische Polaren in parallele Gerade zerfallen, welche überdies mit den Geraden der inneren Polaren parallel sind.*** (Dieses Journal Bd. 47 pag. 41. III.)

Durch einen Punkt P in der Ebene einer C^3 ziehe man beliebige Gerade $gg_1g_2\ldots$, bestimme ihre Schnittpunkte $QQ_1Q_2\ldots$ mit einer beliebigen Geraden p und die geraden Polaren dieser Schnittpunkte $qq_1q_2\ldots$, so werden dieselben von einem Kegelschnitte π eingehüllt, der Poloconik von p, und bilden einen zum Strahlenbüschel $P(gg_1g_2\ldots)$ projectivischen Tangentenbüschel $(qq_1q_2\ldots)$. Beide Büschel erzeugen eine Curve C_3^4 dritter Ordnung vierter Classe, welche in P einen Doppelpunkt hat, π in drei Punkten berührt und durch die 3 Schnittpunkte von p und C^3 geht; denn nennt man diese $Q_xQ_yQ_z$, so gehen ihre geraden Polaren durch sie selbst hindurch und werden in ihnen von den entsprechenden Geraden $g_xg_yg_z$ geschnitten. Für den Fall, dass p in die Unendlichkeit rückt, erhält man die Sätze in diesem Journal Bd. 47 pag. 84. Also:

10. ***Schneidet man die Strahlen $gg_1g_2\ldots$ eines Büschels P durch eine Gerade p in den Punkten $QQ_1Q_2\ldots$, so ist der Ort der Punkte, in denen jeder Strahl $g\ldots$ von der geraden Polare $q\ldots$ des auf ihm liegenden Punktes $Q\ldots$ geschnitten wird, eine Curve C_4^3 dritter Ordnung mit dem Doppelpunkt F.***

Rückt p ins Unendliche, dann sind die Schnittpunkte (g, q), ... die Schwerpunkte der Schnittpunkte von $g\ldots$ mit C und dann heisst der Satz:

10^a. ***Schneidet man eine Curve dritter Ordnung durch die Strahlen eines Büschels P, so ist der Ort der Schwerpunkte eine Curve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkt P.***

Es ist leicht, die Tangenten im Punkt P, die Doppelpunktstangenten,

zu finden. Die conische Polare K^2 von P in Bezug auf C^3 schneidet p in zwei Punkten $Q'Q''$, deren gerade Polaren $q'q''$ durch P gehen, mit der Curve C_4^3 ausser P keinen Punkt gemeinschaftlich haben und daher die Tangenten in P sind. — Die Gerade p schneide C^3 in den Punkten $Q_rQ_sQ_t$, so sind diese Punkte auch Punkte von C_4^3, weil ihre geraden Polaren $q_rq_sq_t$ bezüglich C^3 durch sie selbst hindurchgehen. — Ist C_1^3 eine andere Curve dritter Ordnung, welche durch $Q_rQ_sQ_t$ geht und in diesen Punkten dieselben Tangenten $q_rq_sq_t$ hat, so ist die projectivische Beziehung des Büschels $P(gg_1g_2\ldots)$ zum Büschel der Tangenten auf der Poloconik dieselbe, weil diese Beziehung durch das Entsprechen der drei Strahlen PQ_r, PQ_s, PQ_t und q_r, q_s, q_t bestimmt ist und weil p in Bezug auf C^3 und C_1^3 dieselbe Poloconik π hat; denn diese berührt die Seiten des Dreiseites $q_rq_sq_t$ in den Punkten, welche $Q_rQ_sQ_t$ von den Ecken harmonisch trennen. — Zieht man in diesen Punkten die Tangenten $\mathfrak{q}_r\mathfrak{q}_s\mathfrak{q}_t$ an C_1^3, so liegt das Dreiseit $\mathfrak{q}_r\mathfrak{q}_s\mathfrak{q}_t$ perspectivisch mit dem Dreiseit $q_rq_sq_t$, weil die Schnittpunkte der Seiten in einer Geraden liegen; d. h. bezeichnet man die Ecken mit RST und $\mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{T}$, so treffen sich $R\mathfrak{R}$, $S\mathfrak{S}$, $T\mathfrak{T}$ in einem Punkt. — Man kann statt der Curve C^3 auch die dreiseitige Curve $(q_rq_sq_t)$ nehmen und erhält dieselbe C_4^3. Lässt man den Punkt P in eine der Ecken dieses Dreiseits, etwa in R rücken, so geht die C_4^3 in ein Dreiseit über, von welchem q_sq_t zwei Seiten sind; die dritte Seite ist die Tangente durch Q_r an die Poloconik π; sie schneide die beiden anderen in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$; dann ist P der Schnittpunkt von $S\mathfrak{S}$ und $T\mathfrak{T}$. — Nimmt man den Schnittpunkt von p und RS als P, so geht die C_4^3 über in die Seite RS und die Gerade p, welche aber doppelt gezählt werden muss, denn jeder Punkt ist der Schnittpunkt von p mit den geraden Polaren zweier Punkte von p. — Wählt man einen beliebigen Punkt von RS als P, so geht die C_4^3 über in die Gerade RS und in einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$, welcher π doppelt berührt und durch die Punkte Q_rQ_s geht. Die Tangenten in Q_rQ_s an $\mathfrak{K}^2$ mögen sich in $\mathfrak{T}$ schneiden und die Gerade $T\mathfrak{T}$ die Seite RS in p treffen, so erhalten wir für alle Punkte $P\ldots$ auf RS eine projectivische Reihe $\mathfrak{P}\ldots$. Beide Reihen haben drei Paare von entsprechenden Punkten gemeinschaftlich, nämlich R, S und den Schnittpunkt (RS,p), also fällt jeder Punkt P mit seinem entsprechenden zusammen. —

Wir nehmen nun wieder P als einen beliebigen Punkt der Ebene, lassen ihn aber eine Gerade g durchlaufen, welche die Seiten $q_rq_sq_t$ des Dreiseits in $R'S'T'$ schneiden mag. Jedem Punkt P entspricht eine Curve C_4^3 und ein Tangentendreiseit $\mathfrak{q}_r\mathfrak{q}_s\mathfrak{q}_t$ mit den Ecken $\mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{T}$. Das Büschel $Q_r(q_r\mathfrak{q}_r\ldots)$,

$Q_s(q_s\mathfrak{q}_s\ldots)$ und $Q_t(q_t\mathfrak{q}_t\ldots)$ sind in projectivischer Beziehung, sodass also alle Punkte $R\mathfrak{R}\ldots$, $S\mathfrak{S}\ldots$, $T\mathfrak{T}\ldots$, je auf einem Kegelschnitt ϱ, σ, τ liegen. Ferner sind die Büschel $T(\mathfrak{T}\ldots)$, $S(\mathfrak{S}\ldots)$, $R(\mathfrak{R}\ldots)$ in projectivischer Beziehung und erzeugen einen Kegelschnitt $\varkappa$, da je drei entsprechende Strahlen $R\mathfrak{R}$, $S\mathfrak{S}$, $T\mathfrak{T}$ sich in einem Punkt $\mathfrak{P}$ schneiden. Fällt P mit einem der drei Punkte $R'S'T'$ zusammen, so fällt der ihm entsprechende Punkt $\mathfrak{P}$ mit ihm zusammen, daher muss der Kegelschnitt $\varkappa$ in ein Geradenpaar zerfallen, von welchem g ein Theil ist, und wie vorhin schliessen wir, dass jeder Punkt $\mathfrak{P}$ mit seinem entsprechenden P zusammenfällt, dass also für einen beliebigen Punkt P das Tangentendreiseit $\mathfrak{q}_r\mathfrak{q}_s\mathfrak{q}_t$ mit dem Dreiseit $q_rq_sq_t$ perspectivisch liegt und P zum perspectivischen Centrum hat.

Noch auf einen speciellen Fall möge aufmerksam gemacht werden. Ist nämlich P der Pol von p in Bezug auf das Tangentendreiseit $q_rq_sq_t$, so hat die ihm entsprechende Curve C_4^3 die drei Punkte $Q_rQ_sQ_t$ zu Wendepunkten.

Wenn p ins Unendliche rückt, so erhält man den Satz (dieses Journal Bd. 47, pag. 84):

11. *Der Ort der Schwerpunkte auf den Strahlen eines Büschels P ist eine Curve C_4^3 dritter Ordnung mit dem Doppelpunkt P, welche mit der Curve C^3 parallele Asymptoten hat. Die Asymptotendreiecke sind ähnlich und ähnlich liegend, haben P zum perspectivischen Centrum und ihre Dimensionen verhalten sich wie 1 : 3. Alle Curven C_4^3 haben daher congruente Asymptotendreiseite, welchen Polen P sie auch entsprechen mögen.*

Unter den Curven dritter Ordnung, welche $q_rq_sq_t$ in $Q_rQ_sQ_t$ berühren, giebt es eine $\mathfrak{C}_4^3$, die in P einen Doppelpunkt hat. Die conische Polare von P bezüglich derselben ist das Doppelpunktstangentenpaar p_1p_2; es schneide p in P_1P_2, dann sind die geraden Polaren von P_1P_2 bezüglich $\mathfrak{C}_4^3$ die Doppelpunktstangenten p_1p_2; diese sind aber auch die Doppelpunktstangenten der dem Punkte P entsprechenden Curve C_4^3, also haben C_4^3 und $\mathfrak{C}_4^3$ dieselben Tangenten des Doppelpunkts und ihre Zweige berühren sich in demselben.

Die dem Punkt P entsprechende Curve C_4^3 schneidet C^3 in den drei Punkten $Q_rQ_sQ_t$ und daher noch in sechs andern, die auf einem Kegelschnitt K^2 liegen. — Wenn P auf C^3 selbst liegt, so hat C_4^3 in P mit C^3 zwei Punkte gemein, weil P der Doppelpunkt von C_4^3 ist, deshalb muss K^2 die C^3 in P berühren. Die Poloconik π von g bezüglich C^3 hat mit dieser Curve zwölf gemeinschaftliche Tangenten; einen der Berührungspunkte auf C^3 wollen wir als P annehmen. Schneidet dann die conische Polare von P die Gerade g

in zwei Punkten P_1P_2, so sind deren gerade Polaren p_1p_2 die Doppelpunktstangenten der dem Punkt P entsprechenden C_4^3, eine von ihnen ist aber die Tangente in P selbst, also haben C^3 und C_4^3 in P eine dreifache Berührung. — Ist P irgend ein Punkt von p, so zerfällt die entsprechende C_4^3 in die Gerade p, welche doppelt zu zählen ist, und in die gerade Polare des Punktes P. Im Allgemeinen lassen sich durch den Punkt P sechs Transversalen ziehen, welche p in solchen Punkten schneiden, dass deren gerade Polaren die Transversalen, auf welchen die Punkte liegen, auf C^3 selbst und zwar in den Schnittpunkten von C^3 und dem Kegelschnitt K^2 treffen. Liegt aber P auf p, so giebt es nur drei solche Transversalen, welche P mit den Schnittpunkten seiner geraden Polare und der Curve C^3 verbinden.

Tritt die besondere Curve $\mathfrak{C}_4^3$ an Stelle von C^3, so dass also P der gemeinschaftliche Doppelpunkt von C_4^3 und $\mathfrak{C}_4^3$ ist und beide Curven in ihm dieselben Tangenten haben und sich in den drei Punkten $Q_rQ_sQ_t$ schneiden, so vereinigen sich die übrigen sechs Schnittpunkte im Pol P, und der ihm entsprechende Kegelschnitt zerfällt in das Paar der Doppelpunktstangenten.

Der Wortlaut der gefundenen Sätze ist für den Fall, dass p mit der unendlich entfernten Geraden zusammenfällt (dieses Journal Bd. 47, p. 84 II°.):

12. *Durch jeden Punkt P gehen sechs Transversalen, deren Schwerpunkte in der Basis C^3 liegen und die Schnittpunkte von C^3 mit einem bestimmten Kegelschnitt K^2 sind. Liegt P auf C^3, so wird diese Curve in P von K^2 berührt; die Berührung wird dreipunktig, wenn P einer der Berührungspunkte der 12 Tangenten ist, welche C^3 und die Poloconik E_∞ von g_∞ gemein haben. Liegt P auf g_∞, so giebt es nur drei solche Transversalen, die anderen drei fallen mit g_∞ zusammen.*

Bewegt sich der Punkt P auf einer Geraden l, so haben alle ihm entsprechenden Curven C_4^3 die drei Punkte $Q_rQ_sQ_t$ gemein, ferner den Punkt L, in welchem l von der geraden Polare des Schnittpunkts (p, l) getroffen wird; sie berühren ausserdem in drei Punkten die Poloconik π von p. — Wie viele aus der Schaar dieser Curven gehen durch einen Punkt $\mathfrak{P}$? Die conische Polare von $\mathfrak{P}$ schneidet p in zwei Punkten G_1 und G_2, deren gerade Polaren durch $\mathfrak{P}$ gehen. Sind P_1 und P_2 die Schnittpunkte von l mit $\mathfrak{P}G_1$ und $\mathfrak{P}G_2$, so gehen die den Punkten P_1 und P_2 entsprechenden Curven C_4^3 durch den Punkt $\mathfrak{P}$. Es gehen also durch jeden Punkt $\mathfrak{P}$ zwei Curven der Schaar $S(C_4^3)$, und daher wird irgend eine Gerade von vier dieser Curven berührt.

Die Gerade p schneidet C^3 in $Q_rQ_sQ_t$; die Tangenten $q_rq_sq_t$ in diesen

Punkten an C^3 treffen l in $P_rP_sP_t$; dem Strahl q_r von P_r entspricht die Tangente q_r von π, also ist q_r ein Theil der dem Punkt P_r entsprechenden Curve C_4^3; der andere Theil ist demnach ein Kegelschnitt, der durch die Punkte $P_rQ_sQ_tL$ geht. Es giebt also unter der Schaar Curven $S(C_4^3)$ drei, welche in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen und zugleich mit der Geraden die C^3 in den Schnittpunkten $Q_rQ_sQ_t$ von C^3 und p berühren.

Jede Curve aus der Schaar $S(C_4^3)$ berührt die Poloconik π von p in drei Punkten, die sich auf folgende Art finden lassen. Die Strahlen des Büschels $P(gg_1g_2\ldots)$ sind in perspectivischer Lage mit ihren Schnittpunkten $QQ_1Q_2\ldots$ auf p und daher in projectivischer Beziehung mit den geraden Polaren $qq_1q_2\ldots$ dieser Punkte, welche π als Enveloppe haben. Die Berührungspunkte seien $BB_1B_2\ldots$, und wenn A ein Punkt von π ist und man die Strahlen AB, AB_1, AB_2, $\ldots$ mit $bb_1b_2\ldots$ bezeichnet, so sind die Büschel $P(gg_1g_2\ldots)$ und $A(bb_1b_2\ldots)$ in projectivischer Beziehung und erzeugen einen Kegelschnitt $[AP]$, welcher π ausser in A in den drei Punkten schneidet, in denen π von der dem Punkt P entsprechenden Curve aus der Schaar $S(C_4^3)$ berührt wird. Wenn sich P auf l ändert, so verändert sich auch der Kegelschnitt $[AP]$, aber alle diese Kegelschnitte laufen durch vier feste Punkte, von denen A der erste ist. Dem Strahl l, welcher allen Büscheln $P\ldots$ gemeinsam ist, entspricht ein bestimmter Strahl von A, durch deren Schnittpunkt O jeder Kegelschnitt $[AP]\ldots$ gehen muss. Wenn die Strahlen $bb_1b_2\ldots$ die Gerade P noch in $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\ldots$ schneiden, so ist diese Punktreihe in projectivischer Beziehung mit der Reihe $QQ_1Q_2\ldots$; beide Punktreihen haben zwei entsprechende gemeinsame Punkte MN, in denen sich natürlich auch alle Kegelschnitte $[AP]\ldots$ schneiden müssen; also bilden dieselben ein Büschel mit den vier Grundpunkten $AOMN$. Von allen Kegelschnitten des Büschels berühren vier den Kegelschnitt π, und daher giebt es in der Schaar $S(C_4^3)$ auch vier Curven, welche mit π eine vierpunktige Berührung haben. Also, wenn wir p ins Unendliche rücken lassen, erhalten wir den Satz (dieses Journal Bd. 47, pag. 85 II c.):

13. *Wenn sich ein Punkt P auf einer festen Geraden l bewegt, so entspricht ihm in jeder Lage eine Curve C_4^3. Jede dieser Curven geht durch die drei im Unendlichen liegenden Punkte Q_∞ von C^3 und durch den Schwerpunkt L von l. Die ganze Schaar Curven $S(C_4^3)$ erfüllt die Ebene der Art, dass durch jeden Punkt zwei von ihnen gehen, dass also vier eine gegebene Gerade berühren. Jede von ihnen berührt die Poloconik E_∞ von g_∞ in drei*

Punkten; insbesondere giebt es vier Curven, welche E_∞ in einem Punkte vierpunktig, also ausserdem nur noch in einem Punkt berühren.

Durch jeden Punkt P von l lassen sich nur zwei Transversalen ziehen, welche p in solchen Punkten MN schneiden, dass deren gerade Polaren durch P gehen; diese Punkte MN sind die Schnittpunkte der conischen Polaren k von P. Diese bilden ein der Punktreihe $P\ldots$ projectivisches Kegelschnittbüschel $k\ldots$ und schneiden p in einer projectivischen Punktinvolution $(MN)\ldots$; daher ist die Enveloppe der Geraden PM, PN eine Curve dritter Classe C_3^4, welche l berührt und p zur Doppeltangente hat. Zwei, $k'k''$, von den Kegelschnitten $k\ldots$ des Büschels berühren p in $M'M''$; die Pole von $k'k''$ seien $P'P''$, dann sind diese Punkte zwei Punkte von C_3^4, weil sich von ihnen ausser l nur noch je eine Tangente an diese Curve ziehen lässt, nämlich $P'M'$ und $P''M''$. Die Gerade l schneide p in P_0, dessen conische Polare k_0 die p in M_0N_0 schneiden mag, dann fallen P_0M_0 und P_0N_0 mit p zusammen und M_0N_0 sind die Berührungspunkte der Doppeltangente p mit C_3^4. — Die gerade Polare p_0 von P_0 schneide l in P_0', dann geht die conische Polare k_0' von P_0' durch P_0 und einen zweiten Punkt Q_0 von p, also sind $P_0'P_0$ und $P_0'Q_0$ die einzigen Tangenten, die sich von P_0' ziehen lassen, und da $P_0'P_0$ mit l zusammenfällt, so ist $P_0'Q_0$ die einzige Tangente von P_0' und dieser Punkt folglich der Berührungspunkt, denn von den drei Tangenten, die sich von jedem Punkt an C_3^4 ziehen lassen, fallen zwei mit l zusammen. — C^3 wird von p in $Q_rQ_sQ_t$ geschnitten; die Tangenten in diesen Punkten sind $q_rq_sq_t$, welche ihrerseits l in $P_rP_sP_t$ treffen, deren conische Polaren $k_rk_sk_t$ durch respective $Q_rQ_sQ_t$ gehen, also sind $q_rq_sq_t$ Tangenten von C_3^4. Wenn p in g_∞ übergeht, so lautet der erhaltene Satz:

14. ***Der Ort aller Transversalen, deren Schwerpunkte in irgend einer gegebenen Geraden l liegen, ist eine Curve C_3^4 dritter Classe vierter Ordnung, welche g_∞ zur Doppeltangente hat, die drei Asymptoten der Basis C^3, sowie auch die Gerade l in ihrem Schwerpunkt berührt und ausserdem in zwei Punkten $P'P''$ schneidet, deren conische Polaren g_∞ berühren. Die Berührungspunkte der Doppeltangente g_∞ sind die Schnittpunkte der conischen Polare k_0 des Schnittpunkts P_0 von l und p mit g_∞.*** Dieses Journal Bd. 47, p. 86 IIc.

Die gerade Polare q eines Punktes Q von p schneide p in R; die conische Polare ϱ von R trifft p ausser in Q noch in Q', und die gerade Polare q' von Q' geht auch durch R; es sei r die gerade Polare von R. Es werden die Polaren $qq'r$ bei Veränderung von Q auf p von der Poloconik π

von p eingehüllt, und es ist die Tangenteninvolution (qq') auf π in projectivischer Beziehung mit dem Tangentenbüschel r. Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen ist eine Curve $\mathfrak{K}_4^3$ dritter Ordnung vierter Classe. Einer der Durchschnittspunkte von C^3 und p ist Q_r; die gerade Polare ist die Tangente q_r in Q_r, und die conische Polare von Q_r berührt C^3 auch in Q_r und schneidet p noch in Q_r', dessen gerade Polare q_r' durch Q_r geht. Da die sich entsprechenden Tangenten q_r und q_r von π zusammenfallen, so berührt $\mathfrak{K}_4^3$ den Kegelschnitt π in den Punkten, in denen er von $q_r q_s q_t$ berührt wird. Weil aber q_r, zur einfachen Tangentenschaar gerechnet, von dem entsprechenden Strahl q_r' der Involution auf π in Q_r geschnitten wird, so muss $\mathfrak{K}_4^3$ durch Q_r und ebenso durch $Q_s Q_t$ gehen.

Die Curven C^3 und $\mathfrak{K}_4^3$ schneiden sich ausser in $Q_r Q_s Q_t$ noch in sechs Punkten. Denkt man sich also einen variablen Punkt R auf p und zieht von ihm die beiden Tangenten qq' an π, so geschieht es nur sechs Mal, dass die gerade Polare r von R eine dieser Tangenten auf C^3 schneidet. Diese sechs Punkte müssen auf einem Kegelschnitt liegen, denn sie bilden mit $Q_r Q_s Q_t$ die neun Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_4^3$ und C^3.

Wir nennen den Punkt, in welchem die gerade Polare r von R die Poloconik π berührt, $\mathfrak{R}$, so sind die Punktreihen $(R\ldots)$ auf p und $(\mathfrak{R}\ldots)$ auf π in projectivischer Beziehung und die Enveloppe der Geraden $R\mathfrak{R}$, ... ist eine Curve dritter Classe vierter Ordnung, welche p zur Doppeltangente hat und auch die drei Geraden $q_r q_s q_t$ berühren muss, denn dem Punkt Q_r von p entspricht der Berührungspunkt $\mathfrak{Q}_r$ von q_r mit π.

Wenn p in g_∞ übergeht, so erhalten wir die Sätze:

15. *Der Ort der Schwerpunkte aller Durchmesser der Curve C^3 ist eine Curve $\mathfrak{K}_4^3$ dritter Ordnung vierter Classe, welche die drei Punkte Q_∞ von C^3 zu einfachen Punkten hat und die Poloconik E_∞ von g_∞ in den drei Punkten berührt, in denen diese von den drei Asymptoten berührt wird. — Die Curve C^3 hat im Allgemeinen sechs solche Durchmesser, deren Schwerpunkte in ihr selbst, aber nicht im Unendlichen liegen, und diese sechs Schwerpunkte liegen auf einem Kegelschnitt.*

Wird durch denjenigen Punkt $\mathfrak{R}$, in welchem jeder Durchmesser die Poloconik E_∞ berührt, die dem Durchmesser conjugirte Transversale $\mathfrak{R}R$ gezogen, so ist ihr Ort eine Curve dritter Classe vierter Ordnung, welche die Gerade g_∞ zur Doppeltangente hat, die drei Asymptoten von C^3 und die Poloconik E_∞ in drei Punkten berührt. (Dieses Journal, Bd. 47, pag. 89 VI.)

Auf C^3 sei P ein beliebiger Punkt, $gg_1g_2\ldots$ beliebige durch ihn gelegte Linien, welche C^3 noch in QR, Q_1R_1, Q_2R_2, ... schneiden und eine beliebige Gerade l in $LL_1L_2..$ treffen. Wir suchen den Ort der Punkte, welche QR von L, Q_1R_1 von L_1, ... harmonisch trennen. Alle Punktpaare QR, Q_1R_1, ... haben denselben Tripelpunkt $\mathfrak{P}$, den conjugirten Punkt zu P, wenn wir C^3 als Tripelcurve betrachten. Legt man durch die Tripel $QR\mathfrak{P}$, $Q_1R_1\mathfrak{P}$, $Q_2R_2\mathfrak{P}$, ... und irgend ein anderes Tripel TUV von C^3 Kegelschnitte $\lambda\lambda_1\lambda_2\ldots$, so bilden diese ein Büschel, welches zur Punktreihe $LL_1L_2\ldots$ und daher auch zum Büschel $P(gg_1g_2\ldots)$ in projectivischer Beziehung steht. Die Polaren von $LL_1L_2\ldots$ bezüglich $\lambda\lambda_1\lambda_2\ldots$ umhüllen einen Kegelschnitt und sind in projectivischer Beziehung zum Büschel $P(gg_1g_2\ldots)$; der Ort der Schnittpunkte homologer Strahlen des Büschels der Polaren von $LL_1L_2\ldots$ und des Strahlenbüschels $P(gg_1g_2\ldots)$ ist eine Curve K_4^3 dritter Ordnung mit dem Doppelpunkt P; sie trennt QR, Q_1R_1, ... von L, L_1, ... harmonisch und ist also der gesuchte Ort. Wenn l in g_∞ übergeht, so werden die Punkte, welche QR, ... von $L\ldots$ harmonisch trennen, die Halbirungspunkte der Strecken QR, ... Ist weiter Q' der Halbirungspunkt von PQ, R' von PR, Q_1' von PQ_1, R_1' von PR_1, ... so sind die Geraden QQ_1 und $Q'Q_1'$, RR_1 und $R'R_1'$, ... einander parallel und daher ist der Ort der Punkte $Q'R'Q_1'R_1'\ldots$ eine Curve K^3 dritter Ordnung, welche der Curve C^3 ähnlich ist, mit ihr ähnlich liegt und sie in P berührt. Der Punkt P ist der Aehnlichkeitspunkt und die Dimensionen der Curven K^3 und C^3 stehen im Verhältniss 1 : 2. Die drei Punkte Q_∞ von von C^3 müssen auch Punkte von K^3 sein, denn Q_∞ ist gleichzeitig der Halbirungspunkt von PQ_∞; daher haben die beiden Curven parallele Asymptoten; die Asymptotendreiseite liegen perspectivisch und haben P als Schnittpunkt der Verbindungslinien entsprechender Ecken. Fallen zwei Punkte QR in einen Q zusammen, so fallen auch $Q'R'$ in Q' zusammen, die Curven K^3 und C^3 haben also auch dieselben Tangenten.

Die eben erhaltenen Resultate ergeben sich auch als unmittelbare Folgerung aus einer etwas allgemeineren Betrachtung, wenn nämlich der Punkt P nicht auf C^3 liegt. Um P drehe sich eine Transversale g_1, welche eine Gerade l in L_1 schneidet; welches ist der Ort der Punkte, die auf g_1 den Punkt L_1 von der Curve C^3 harmonisch trennen? Alle Punkte, welche L_1 von C^3 harmonisch trennen, liegen nach 1. auf einer Curve dritter Ordnung C_1^3; alle Curven $C_1^3\ldots$, die den Punkten L_1 von l entsprechen, bilden nach 2. eine Curvenreihe vom Index drei. Da jeder Geraden g_1 ein Punkt L_1 und

jedem Punkt L_1 eine Curve C_1^3 entspricht, so ist das Strahlenbüschel $P(g_1 \ldots)$ in projectivischer Beziehung mit der Curvenreihe $C_1^3 \ldots$. Der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente ist eine Curve C^6 der sechsten Ordnung, die P zu einem dreifachen Punkt hat, weil in ihm drei Strahlen g_1 von ihren entsprechenden Curven getroffen werden. — Die Gerade l schneide C^3 in $L_q L_r L_s$; die drei diesen Punkten entsprechenden Curven aus der Reihe C_1^3, nämlich $C_q^3 C_r^3 C_s^3$, zerfallen in die Tangenten qrs in diesen Punkten an C^3 und in die conischen Polaren $\varkappa\varrho\sigma$ dieser Punkte. Die Curve C_s^3 besteht also aus σ und s, die sich in L_s berühren; die dem Strahl PL_s entsprechende Curve (σ, s) schneidet also PL_s in L_s, und daher geht C^6 durch L_s und ebenso durch $L_q L_r$.

Ausser den drei Punkten $L_q L_r L_s$ kann C^6 mit l keinen Punkt gemeinsam haben, denn wäre L_u ein solcher Punkt, so müsste die Gerade PL_u die Curve C^3 in XYZ schneiden, und es müsste XY durch L_u und l harmonisch getrennt werden. Da L_u auf l liegt, so muss auch einer der Punkte XY, etwa X, mit L_u zusammenfallen, d. h. L_u ist einer der drei Schnittpunkte $L_q L_r L_s$ von l und C^3. Daher hat C^6 nur die drei Schnittpunkte $L_q L_r L_s$ mit l gemeinsam und berührt in ihnen sich selbst.

Wenn wir l in g_∞ übergehen lassen, so erhalten wir die Sätze in diesem Journal, Bd. 47, pag. 94 III a.:

16. *Wird eine Transversale g um einen in ihr beliebig gewählten Punkt P herumbewegt, so beschreiben die drei Mitten der auf ihr von C^3 abgeschnittenen Sehnen eine Curve C^6 der sechsten Ordnung, welche den Pol P zum dreifachen Punkt hat, so wie ferner in jedem der drei Punkte L_∞ von C^3 sich selbst berührt, so dass sie nur drei Asymptoten a_s hat, aber jede derselben doppelt zu zählen ist. — Liegt P insbesondere auf C^3, so zerfällt C^6 in zwei Theile K^3 und K_4^3. Die Curve K^3 ist der Basis C^3 ähnlich und mit ihr ähnlich liegend und berührt sie in P, der ihr Aehnlichkeitspunkt ist. Ihre entsprechenden Dimensionen verhalten sich, wie $1:2$; die Asymptotendreiseite sind ähnlich und ähnlich liegend und haben P zum Aehnlichkeitspunkt. Die Curve K_4^3 hat P zum Doppelpunkt und mit K^3 dieselben Asymptoten.*

Durch P ziehe man zwei Transversalen $g_1 g_2$, welche l in $L_1 L_2$, C^3 in $Q_1 R_1 S_1$ und $Q_2 R_2 S_2$ schneiden; ist T_1 von L_1 durch $Q_1 R_1$ und T_2 von L_2 durch $Q_2 R_2$ harmonisch getrennt, so giebt es einen Kegelschnitt K, welcher die sechs Geraden $g_1 g_2$, l, $Q_1 Q_2$, $R_1 R_2$, $T_1 T_2$ berührt. Rückt nun L_2 unendlich nahe an L_1, so rücken auch $Q_2 R_2 T_2$ unendlich nahe an $Q_1 R_1 T_1$; dabei berührt der Kegelschnitt K die Geraden g_1 und g_2 in zwei leicht bestimmbaren

Punkten, die den Punkten P in der durch die Punkte $L_1 T_1 Q_1 R_1$ und $L_2 T_2 Q_2 R_2$ bestimmten projectivischen Beziehung entsprechen. Der Kegelschnitt K ist aber bestimmt durch die Tangenten l, $g_1 g_2$, $Q_1 Q_2$, $R_1 R_2$ und im Grenzfall durch l, g_1, die Tangenten q_1 und r_1 in Q_1 und R_1 an C^3 und den Berührungspunkt auf g_1; die Tangente von T_1 an diesen Kegelschnitt ist zugleich die Tangente in T_1 an C^6.

Wenn l in g_∞ übergeht, so werden die Kegelschnitte K, welche g_1, q_1, r_1 und g_∞ berühren, die dem Dreiseit $(g_1 q_1 r_1)$ eingeschriebenen Parabeln. Jedem Strahl p durch P entspricht eine bestimmte Parabel der Schaar, welche p berührt. Ihr Berührungspunkt g_1 mag B sein; zieht man durch die Ecken des Dreiseits $(g_1 q_1 r_1)$ drei den Seiten parallele Gerade, so bilden diese ein neues Dreiseit, und durch die Ecken desselben gehen alle Berührungssehnen der Parabelschaar. Die durch die Endpunkte von g_1 parallel zu q_1 und r_1 gezogenen Geraden mögen sich in G treffen, dann ist GB eine Berührungssehne. Dreht sich p um P, so entspricht jedem Strahl p eine Berührungssehne und umgekehrt, also sind die Strahlenbüschel $P(p\ldots)$ und $G(B\ldots)$ in projectivischer Beziehung. Dem Strahl g_1 des Büschels P entspricht im Büschel G ein bestimmter Strahl, der g_1 in β schneidet. Zieht man an die Parabel der Schaar, welche g_1 in β berührt, von T_1 aus eine Tangente, so ist diese auch Tangente an C^6 im Punkt T_1. Auf diese Art lässt sich also in einem Punkt von C^6 die Tangente construiren.

Von P lassen sich an C^3 sechs Tangenten ziehen, *abcdef*, welche C^3 in *ABCDEF* berühren und noch in $A'B'C'D'E'F'$ schneiden. Die Punkte, welche AA', BB', CC', DD', EE', FF' von l harmonisch trennen, seien $\mathfrak{ABCDEF}$; in ihnen werden die Geraden *abcdef* von der Curve C^6 berührt, letztere geht auch durch die sechs Punkte *ABCDEF*. Ausser in diesen sechs Punkten schneiden sich die Curven C^3 und C^6 noch in zwölf Punkten; drei von diesen sind die Schnittpunkte $L_q L_r L_s$ von l und C^3, doch muss jeder von ihnen doppelt gerechnet werden, da C^6 sich in ihnen selbst berührt; es bleiben daher nur noch sechs übrig, *GHIKLM*, und diese müssen auf einem Kegelschnitt liegen. Zieht man PG und nennt die Schnittpunkte von C^3 mit dieser Geraden G_1 und G_2, so sind G_1 und G_2 durch G und l harmonisch getrennt.

Wir wählen jetzt P auf der Tangente q in L_q an C^3, so lassen sich ausser q von P noch fünf Tangenten *bcdef* an C^3 ziehen. Da q eine Tangente von C^6 sein muss und diese Curve durch L_q geht, so ist L_q der Berührungspunkt von q und C^6. Der Punkt L_q ist aber als Schnittpunkt von

C^3 und C^6 fünffach zu zählen, denn erstens schneidet jede Curve C^6 die C^3 in L_q, dann als Berührungspunkt von q und C^6 doppelt und drittens noch doppelt, weil C^6 sich in ihm selbst berührt. Von den 18 Schnittpunkten der Curven C^6 und C^3 liegen also fünf in L_q, zwei in L_r, zwei in L_s, fünf in den Berührungspunkten *BCDEF* der Tangenten *bcdef* an C^3; es bleiben daher nur noch vier übrig, und daher lassen sich von P nur vier solche Gerade ziehen, dass zwei Schnittpunkte einer derselben mit C^3 durch den dritten und l harmonisch getheilt werden, und dies gilt von jedem Punkt einer der drei Tangenten qrs in $L_qL_rL_s$ an C^3. Wir haben also das Resultat:

17. *Von einem Punkt P lassen sich durch eine C^3 sechs solche Transversalen s ziehen, dass zwei ihrer Schnittpunkte mit C^3 durch den dritten und eine feste Gerade l harmonisch getheilt werden. Liegt P auf einer der drei Tangenten qrs in den Schnittpunkten von l und C^3 an C^3, so lassen sich von ihm nur vier Transversalen s ziehen. Daher werden alle Transversalen s, welche durch C^3 und l harmonisch getheilt werden, von einer Curve C_6 der sechsten Classe eingehüllt, welche die Tangenten qrs zu Doppeltangenten hat. Dabei liegen die sechs Punkte auf den sechs von einem Punkt P an C_6 zu ziehenden Tangenten, welche zu ihren Schnittpunkten mit l die zugeordneten harmonischen sind, auf einem Kegelschnitt. — Die Gerade l ist eine dreifache Tangente von C_6.*

Die letzte Behauptung ergiebt sich einfach, wenn wir den Punkt P auf l annehmen. Sind nämlich $L_qL_rL_s$ die drei Schnittpunkte von l und C^3 und werden L_qL_r durch L_sL_s', L_rL_s durch L_qL_q', L_sL_q durch L_rL_r' harmonisch getrennt, so ist jede der drei Geraden L_sL_s', L_qL_q', L_rL_r' eine Tangente durch P an C_6, und da jede mit l zusammenfällt, so ist l eine dreifache Tangente, und von jedem ihrer Punkte P lassen sich daher nur drei Tangenten an C_6 ziehen. Dieses ergiebt sich auch direct. Alle Punkte, welche P von C^3 harmonisch trennen, liegen nach 1. auf einer Curve C_1^3. Diese schneidet C^3 ausser in den Berührungspunkten der von P an C^3 gezogenen Tangenten noch in drei Punkten einer Geraden; ist G einer dieser Punkte und trifft PG die C^3 noch in G_1G_2, so sind G_1G_2 durch P und G harmonisch getrennt. Solcher Linien giebt es durch P nur drei und daher lassen sich von einem Punkt P auf l nur drei Tangenten an C_6 ziehen, und die drei Punkte auf ihnen, welche C^3 von P harmonisch trennen, liegen auf einer Geraden.

Alle Punkte, welche L_q von C^3 harmonisch trennen, liegen auf einem Kegelschnitt, der conischen Polare von L_q, und auf der Tangente q in L_q;

von L_q lässt sich daher nur eine Tangente q an C_6 ziehen, L_q ist ihr Berührungspunkt, und in ihm berühren sich C^3 und C_6. Die drei Tangenten, die sich von jedem Punkt von l an C_6 ziehen lassen, fallen also mit der Tangente q in L_q zusammen, und diese ist eine Doppeltangente von C_6.

Nennen wir λ die Poloconik von l und suchen die zwölf gemeinschaftlichen Tangenten derselben und der Curve C^3. Drei von ihnen sind die Tangenten qrs, welche λ und C^3 in $L_qL_rL_s$ berühren. Die anderen neun sind die geraden Polaren $p_0\ldots$ von neun Punkten $P_0\ldots$ auf l; p_0 berühre C^3 in Q_0, dann ist p_0 auch die gerade Polare von Q_0. Die Schnittpunkte von P_0Q_0 und C^3 seien noch R_0S_0, dann müssen P_0Q_0 durch R_0S_0 harmonisch getrennt werden, denn die conische Polare von Q_0 muss durch P_0 gehen, weil Q_0 auf der geraden Polare von P_0 liegt. Die Tangente p_0 trifft C^3 in Q_0 eigentlich in den unendlich benachbarten Punkten Q_0 und Q_0', und wenn die Gerade P_0Q_0' die C^3 noch in $R_0'S_0'$ trifft, so werden auch $R_0'S_0'$ durch P_0Q_0' harmonisch getrennt, daher fallen von den Tangenten, die sich von P_0 an C_6 ziehen lassen, zwei in die Gerade P_0Q_0 zusammen, es lassen sich daher von P_0 statt drei nur zwei Tangenten, ausser der dreifachen Tangente l, an C_6 ziehen; deshalb liegen die neun Punkte $P_0\ldots$ auf C_6. Letztere schneidet also l in den neun Punkten $P_0\ldots$, und weil auf P_0Q_0 zwei Tangenten zusammenfallen, so ist P_0 der Berührungspunkt von P_0Q_0 mit C_6. Ausser den neun Punkten $P_0\ldots$ hat C_6 mit l noch die drei Punkte $L_qL_rL_s$ gemein. Im Punkt L_q sind auf q eigentlich zwei Punkte L_{q_1} und L_{q_2} vereinigt, und die Geraden $L_q'L_{q_1}$ und $L_q'L_{q_2}$ treffen C^3 in $L_{r_1}L_{r_2}$ und $L_{s_1}L_{s_2}$, die auf r und s einander unendlich benachbart sind. Der Ort der Punkte, welche L_q' von C^3 harmonisch trennen, ist eine Curve dritter Ordnung, welche durch die sechs Berührungspunkte der Tangenten geht, die sich von L_q' an C^3 ziehen lassen, und daher diese Curve noch in drei Punkten einer Geraden schneidet, und diese muss die Gerade $L_{q_1}L_{q_2}$, also die Tangente q sein. Daher lässt sich von L_q' nur noch eine Tangente an C_6 ausser l ziehen, und daraus lässt sich schliessen, dass l die C_6 im Punkt L_q' berührt. Die beiden anderen Berührungspunkte von l und C_6 sind $L_r'L_s'$.

Zu den neun Punkten $P_0\ldots$ und den drei Punkten $L_qL_rL_s$, in denen l von C_6 geschnitten wird, kommen noch die doppelt zu zählenden Berührungspunkte $L_q'L_r'L_s'$; also hat l im Ganzen 18 Punkte mit C_6 gemein, und wir können schliessen, dass C_6 von der achtzehnten Ordnung ist.

Die Gerade p_0 schneide die Tangente in R_0 an C^3 im Punkt $\mathfrak{P}_0$, und da p_0 die gerade Polare von P_0 sowohl, wie von Q_0 ist, so muss die conische

Polare π_0 von $\mathfrak{P}_0$ durch die drei Punkte $P_0 Q_0 R_0$ gehen. Weil aber diese in einer Geraden liegen, so zerfällt π_0 in ein Geradenpaar, dessen einer Theil $P_0 Q_0$ ist, und weil diese Gerade $P_0 Q_0$ auch durch S_0 geht, so muss $\mathfrak{P}_0 S_0$ auch eine Tangente in S_0 an C^3 sein. Die drei Tangenten in $Q_0 R_0 S_0$ an C^3 schneiden sich also in einem Punkt $\mathfrak{P}_0$. Dieser ist aber ein Punkt der *Hesse*schen Curve H^3 von C^3, weil seine conische Polare in zwei Gerade zerfällt. Daher treffen die neun Tangenten $P_0 Q_0$, ... in den Punkten $P_0 \ldots$ die C^3 in drei Punkten $Q_0 R_0 S_0$ von der Eigenschaft, dass die Tangenten in diesen an C^3 sich in einem Punkt $\mathfrak{P}_0$ der *Hesse*schen Curve H^3 schneiden. Es giebt also in einer Curve C^3 dritter Ordnung im Allgemeinen neun solche Transversalen t_0, bei welchen von den drei Schnitten der eine Q_0 die anderen beiden $R_0 S_0$ harmonisch von einer bestimmten Geraden l trennt und wobei die zugehörigen drei Tangenten in $Q_0 R_0 S_0$ sich in einem Punkt $\mathfrak{P}_0$ der *Hesse*schen Curve schneiden und wo zudem die Tangente p_0 in Q_0 zugleich die gerade Polare des Schnittpunkts P_0 von $Q_0 R_0 S_0$ mit l ist. Aendert sich l in $l' l'' \ldots$, so gehören zu jeder Geraden neun Punkte $\mathfrak{P}_0' \ldots \mathfrak{P}_0'' \ldots$, welche die ganze *Hesse*sche Curve erfüllen. Die Geraden $t_0 \ldots t_0' \ldots t_0''$ werden von einer Curve dritter Classe $\mathfrak{C}_3$ eingehüllt, welche die *Cayley*sche Curve von C^3 heisst.

Da die harmonische Polarcurve C_0^3 von P_0 in Bezug auf C^3 diese letztere in ihren neun Schnittpunkten mit der conischen und geraden Polare von P_0 trifft, da ferner die gerade Polare p_0 von P_0 die Curve C^3 in Q_0 berührt, so muss auch C_0^3 die C^3 in Q_0 berühren. Diese Eigenschaft haben die harmonischen Polarcurven aller neun Punkte P und ausserdem noch die harmonischen Polarcurven der drei Punkte $L_q' L_r' L_s'$, welche qrs in den Punkten $L_q L_r L_s$ berühren, und schliesslich noch die harmonischen Polarcurven der Punkte $L_q L_r L_s$ selbst, weil für diese Punkte jene Curven in die conische und gerade Polare dieses Punktes zerfallen. Es giebt also auf jeder Geraden l zwölf Punkte Z von der Eigenschaft, dass die harmonischen Polarcurven Z^3 derselben die Curve C^3 berühren. Die gemeinschaftliche Tangente in diesem Punkt an C^3 und Z^3 ist zugleich Tangente der Poloconik λ von l.

Es sei W einer der neun Wendepunkte von C^3, w seine Wendetangente und $\mathfrak{W}$ deren Schnittpunkt mit l. Die gerade Polare von $\mathfrak{W}$ muss durch W gehen, also ist w auch eine Tangente von C_6 und ihr Berührungspunkt muss W sein, denn denken wir uns in W die drei Punkte $W^0 W' W''$ vereinigt, so werden je zwei von ihnen durch den dritten und l harmonisch getrennt.

Das letzte Resultat lässt sich auch auf folgende Art erhalten. Ist x eine variable Transversale durch W, so ist der Ort der Punkte, welche auf ihr die Curve C^3 harmonisch von l trennen, eine Curve W^6 sechster Ordnung. Da W auf C^3 liegt und ein Wendepunkt ist, so liegen die Schnittpunkte von je drei Transversalen durch W mit C^3 auf einem Kegelschnitt C^2. Betrachten wir diesen und die Gerade l als eine Curve dritter Ordnung, so besteht die harmonische Polarcurve von W bezüglich derselben aus einer Curve dritter Ordnung, welche in die Polare W' von W bezüglich C^2 und einen Kegelschnitt W^2 zerfällt; beide Theile gehören zur Curve W^6, und diese zerfällt daher in eine Gerade W', die harmonische Polare des Wendepunkts W, in einen Kegelschnitt W^2 und in eine Curve dritter Ordnung W^3. Letztere schneidet l in drei Punkten, deren Verbindungslinien mit W die drei Tangenten sind, die sich ausser w noch von W an C_6 ziehen lassen. Daher ist W der Berührungspunkt von w mit C_6, und in ihm berühren sich auch die Curven C^3 und C_6. Diese berühren sich also in ihren neun Wendepunkten. Jede derselben ist als gemeinschaftliche Tangente von C^3 und C_6 dreifach zu rechnen, und ebenso sind die drei gemeinschaftlichen Tangenten qrs dreifach zu rechnen, so dass also die Curven C^3 und C^6 nur die neun Wendetangenten und die drei Tangenten qrs in den Schnittpunkten von l und C^3 gemein haben. Beide Curven berühren sich in diesen drei Schnittpunkten und in den neun Wendepunkten von C^3.

Die erhaltenen Resultate wollen wir für den Fall zusammenfassen, dass l in g_∞ übergeht. Wir erhalten dann die Sätze im 47. Bande dieses Journals pag. 37—40. In dem Falle aber, dass l in g_∞ übergeht, wird jede Tangente von C_6 ein Theil der inneren Polare eines Punktes von C^3 (cf. 8). — Ist ein Punkt D_0 Schnittpunkt von C^3 und der Poloconik E_∞ von g_∞, so lässt sich durch ihn nur eine solche Sehne, d_0, ziehen, welche in D_0 halbirt wird, und daher berührt die der Geraden g_∞ entsprechende Curve C_6 die Sehne d_0 in D_0 und schneidet in ihm die Basis C^3.

18. I. *Alle Sehnen, in welche die innere Polare I^2 zerfällt, wenn der Pol P auf der Basis C^3 liegt, oder, alle solche Sehnen, deren Mitten in der Basis selbst liegen, berühren eine Curve sechster Classe und achtzehnter Ordnung, C_6.*

II. *Die Curve C_6 berührt die Basis C^3 in ihren neun Wendepunkten W, so wie in ihren drei unendlich entfernten Punkten, so dass sie also die drei Asymptoten mit ihr gemein hat; aber die C_6 berührt jede der drei*

Asymptoten noch in einem anderen Punkt, so dass sie dieselben zu Doppeltangenten hat. — Die Curve C_6 berührt in D_0 die eben genannten sechs Sehnen d_0 und schneidet somit in den sechs Punkten D_0 die Basis.

III. *Die Curve C_6 hat ferner die Gerade g_∞ zur dreifachen Tangente. Die Berührungspunkte auf g_∞ findet man, wenn man durch irgend einen Punkt drei Parallelen abc zu den Asymptoten der Basis zieht und die drei Strahlen a'b'c' bestimmt, welche a von bc, b von ac, c von ab harmonisch trennen und diese bis zum Durchschnitt mit g_∞ verlängert. Die Curve C_6 schneidet g_∞ noch in neun anderen Punkten P_0, und diese sind dadurch bestimmt, dass die zugehörigen Tangenten oder Asymptoten, $\mathfrak{p}_0$, der Curve durch diejenigen Punkte P_0 der Basis C^3 gehen, in welchen letztere von einzelnen ihrer Durchmesser berührt wird, und dass dieselben die diesen Durchmessern conjugirte Richtung haben. — Dabei sind die neun Geraden P_0Q_0 Tangenten der Cayleyschen Curve $\mathfrak{C}_3$ von C^3, und wenn R_0S_0 die Schnittpunkte von P_0Q_0 mit C^3 sind, so treffen sich die Tangenten in $Q_0R_0S_0$ an C^3 in einem Punkt der Hesseschen Curve H^3 von C^3. — In einer Curve C^3 dritter Ordnung giebt es im Allgemeinen neun solche Tangenten ihrer Cayleyschen Curve H^3, dass von ihren drei Schnitten mit C^3 der eine in der Mitte der beiden anderen liegt und dass die Tangente im letzteren ein Durchmesser der Curve C^3 ist und mit den beiden Tangenten in den beiden anderen Schnittpunkten sich in einem Punkt von H^3 schneidet. —*

IV. *Durch jeden beliebigen Punkt P gehen im Allgemeinen sechs Sehnen s von der Beschaffenheit, dass von ihren drei Schnitten mit C^3 der eine die Entfernung der anderen halbirt, und die sechs Halbirungspunkte liegen auf einem Kegelschnitt. Liegt P in der Basis C^3, so wird diese in demselben von dem Kegelschnitt berührt. Da g_∞ eine dreifache Tangente von s_6 ist, so sind von den Tangenten von s_6 nur je drei und drei parallel. Betrachtet man sie als Sehnen s, so sind ihre Mitten die drei Endpunkte des ihrer Richtung conjugirten Durchmessers der Basis C^3 und auch umgekehrt.*

Die beiden Curven C^3 und C_6 schneiden sich in 3.18 oder 54 Punkten; von diesen kennen wir die sechs Punkte D_0 und die zwölf Berührungspunkte derselben, nämlich die neun Wendepunkte und die drei im Unendlichen liegenden Punkte von C^3, also 30 Punkte. Ist A_1 einer der übrigen Schnittpunkte, so trifft die Tangente in ihm an C_6 die C^3 noch in den Punkten B und A, so dass B die Mitte von AA_1 ist. Nach dem Satz 16. liegt B auf einer Curve K^3, welche C^3 ähnlich ist, mit ihr ähnlich liegt und deren ent-

sprechende Dimensionen sich wie 1:2 verhalten, so dass also die Tangenten in A und B einander parallel sind. Diese 24 Sehnen AA_1 sollen mit s_0 bezeichnet werden.

Von den zwölf gemeinschaftlichen Tangenten der Poloconik E_∞ von g_∞ und der Curve C_6 fallen sechs mit den Asymptoten von C^3 zusammen, da jede doppelt zu zählen ist. Die übrigen sechs sind also solche Durchmesser von C^3, deren Schwerpunkte oder, die Durchmesser als Sehnen betrachtet, deren Mitten auf C^3 liegen. Durch diese sechs Mitten lässt sich aber nach 15. ein Kegelschnitt legen.

Hiermit erledigen sich die beiden Sätze 3. und 4. auf pag. 38 und 39 des 47. Bandes dieses Journals.

Es bleibt noch übrig, auf einer Tangente von C_6 den Berührungspunkt zu bestimmen. Zwei Tangenten ABA_1 und $A'B'A_1'$ mögen sich in S schneiden, es ist B die Mitte von AA_1 und B' die Mitte von $A'A_1'$. Die Geraden AA' oder a, A_1A_1' oder a_1, BB' oder b mögen sich in PQQ_1 schneiden, so dass P der Schnittpunkt (aa_1), Q der Schnittpunkt (ab) und Q_1 der Schnittpunkt (a_1b) ist. Auf a und a_1 nehme man die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ so, dass P und P_1 die Mitten der Strecken $P\mathfrak{P}$ und $P\mathfrak{P}_1$ sind, ziehe sodann die Geraden $A\mathfrak{P}_1$ und $A_1\mathfrak{P}$, die sich in R, ferner $A'\mathfrak{P}_1$ und $A_1'\mathfrak{P}$, die sich in R' schneiden mögen, und endlich PR, welche AA_1 in $\mathfrak{S}$, und PR', welche $A'A_1'$ in $\mathfrak{S}'$ trifft. Die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ trifft AA_1 in $\mathfrak{S}_1$ und $A'A_1'$ in $\mathfrak{S}_1'$, dann sind die Punkte $AA_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}$ und $A'A_1'\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}'$ je vier harmonische Punkte. Sollen die Punkte $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ mit S zusammenfallen, so hat man die beiden harmonischen Büschel $P(AA_1\mathfrak{S}_1S)$ und $P(A'A_1'\mathfrak{S}_1'S)$ und die beiden anderen $\mathfrak{P}(AA_1\mathfrak{S}_1S)$ und $\mathfrak{P}(A'A_1'\mathfrak{S}_1'S)$, und daher müssen die beiden Punkte $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$ sowohl mit P als mit $\mathfrak{P}$ in gerader Linie liegen, und da sie auf der Geraden $P\mathfrak{P}$ im Allgemeinen nicht liegen, müssen sie in einen Punkt zusammenfallen, und daher müssen auch AA_1 und $A'A_1'$ zusammenfallen, und die Geraden aba_1 werden Tangenten in ABA_1 an C^3 und S, als Schnittpunkt unendlich nahe liegender Tangenten von C_6 betrachtet, der Berührungspunkt von C_6 und AA_1. —

Somit ist die von *Steiner* gegebene Construction des Berührungspunkts einer jeden Tangente von C_6 erwiesen.

Durch einen Punkt P lassen sich drei solche Sehnen ziehen, dass P ihre Mitte ist; ihre Endpunkte liegen auf einem Kegelschnitt I^2, der inneren Polare von P, und daher schneiden diese drei Sehnen C^3 noch in drei Punkten II_1I_{11} einer Geraden r. Welches wird der Ort des Pols P sein, wenn die

ihm entsprechenden Geraden r durch einen bestimmten Punkt I von C^3 gehen sollen? Ist x eine variable Transversale durch I, welche C^3 in $X_1 X_{11}$ schneidet, I die Mitte von $X_1 X_{11}$, so liegen alle Punkte I nach 16. auf einer Curve dritter Ordnung vierter Classe, welche I zum Doppelpunkt hat und mit K_i^3 bezeichnet werden soll. Ebenso ist der Ort aller Pole, deren entsprechende Gerade r durch einen Punkt I_1 von C^3 gehen, eine Curve $K_{i_1}^3$, welche I_1 zum Doppelpunkt hat. Beide Curven schneiden sich in den drei unendlich entfernten Punkten von C^3 und daher noch in sechs Punkten P, die auf einem Kegelschnitt liegen.

Die äussere (conische) und innere Polare A^2 und I^2 schneiden sich in zwei Punkten von g_∞, die Q_∞ und R_∞ heissen mögen, und nach 7. in zwei Punkten der dem Punkt P entsprechenden Geraden r. Der Schnittpunkt von r und g_∞ sei P_∞. Da die Geraden PQ_∞ und PR_∞ Tangenten von P an I^2 sind, so ist g_∞ die Polare von P bezüglich I^2, daher muss die Polare von P_∞ bezüglich I^2 durch P gehen, und da P_∞ eine Ecke des den Kegelschnitten A^2 und I^2 gemeinschaftlichen Polardreiecks ist, so hat P_∞ bezüglich beider Kegelschnitte dieselbe Polare, und diese muss durch P gehen, also muss auch umgekehrt die Polare von P bezüglich A^2 durch P_∞ gehen, d. h. parallel zu r sein.

Ist P einer der sechs Punkte, welchen dieselbe Gerade r entspricht, so müssen, wie eben erwiesen, die Polaren von P bezüglich ihrer äusseren Polare A^2, durch den unendlich entfernten Punkt P_∞ von r gehen, und daher muss die conische Polare von P_∞ durch alle sechs Punkte P gehen.

Wird r sich selbst parallel fortbewegt, so ändern sich die Ortscurven $K_i^3 K_{i_1}^3 \ldots$, schneiden sich aber immer auf demselben Kegelschnitt, der conischen Polare A_∞^2 von P_∞, dem unendlich entfernten Punkt von r.

Welches ist der Ort der Punkte, deren innere Polaren I^2 durch einen bestimmten Punkt G von C^3 gehen? Man ziehe durch G eine variable Transversale g, welche C^3 in $G_1 G_2$ schneidet, halbire GG_1 in P_1, GG_2 in P_2, so sind $P_1 P_2$ solche Punkte, deren innere Polaren durch G gehen. Wenn sich g um G dreht, so beschreiben G_1 und G_2 eine Curve G^3, welche C^3 ähnlich ist, mit ihr ähnlich liegt, sie in G berührt und mit ihr parallele Asymptoten hat. Denn ist G_∞ ein im Unendlichen liegender Punkt von C^3, so ist er zugleich als Halbirungspunkt von GG_∞ anzusehen, so dass sich also C^3 und G^3 in den drei im Unendlichen liegenden Punkten von C^3 schneiden. — Der Ort der Punkte, deren innere Polaren durch einen anderen Punkt H von C^3 gehen

sollen, ist eine Curve dritter Ordnung H^3, welche C^3 in H berührt, ihr ähnlich ist und mit ihr ähnlich liegt. Die Curven G^3 und H^3 schneiden sich in den drei im Unendlichen liegenden Punkten von C^3 und daher noch in sechs Punkten, die auf einem Kegelschnitt liegen, welcher auch durch den Halbirungspunkt von GH geht. Ist P_0 einer dieser sechs Schnittpunkte und zieht man GP_0 und HP_0, so schneiden diese Linien C^3 in zwei Punkten G' und H', so dass P_0 die Mitte von GG' sowohl, wie von HH' ist. Deshalb sind die vier Punkte $GHH'G'$ die vier Ecken eines Parallelogramms und es folgt:

Ueber einer gegebenen Grundlinie GH, deren Endpunkte in einer Curve C^3 dritter Ordnung liegen, lassen sich dieser Curve im Allgemeinen fünf verschiedene Parallelogramme einschreiben, und dabei liegen die Schnittpunkte der Diagonalen der einzelnen Parallelogramme mit der Mitte von GH auf einem Kegelschnitt.

Die Ortscurve G^3 berührt C^3 in G und schneidet diese Curve noch in vier Punkten Q, also gehen durch G die vier inneren Polaren I^2 der vier Punkte Q und ausserdem noch die innere Polare des Punktes G. Diese ist ein Geradenpaar, welches seinen Doppelpunkt in G hat; die inneren Polaren von Q sind auch Geradenpaare, doch geht nur ein Theil von ihnen durch G. Es gehen also durch einen Punkt G von C^3 sechs solche Gerade, welche Theile der Geradenpaare sind, in welche die innere Polare I^2 zerfällt, wenn der Pol auf C^3 selbst liegt, und daraus folgert man den schon vorher erhaltenen Satz:

Alle Geraden, welche C^3 in solchen drei Punkten schneiden, dass der eine von ihnen die Entfernung der beiden anderen halbirt, werden von einer Curve C_6 der sechsten Classe eingehüllt. — Zieht man von irgend einem Punkt G die sechs Tangenten an C_6, so bilden zwei von ihnen zusammen die innere Polare von G. Dieser Punkt liegt mit den vier Polen der inneren Polaren, von welchen die anderen vier Tangenten Theile sind, auf einem Kegelschnitt, welcher C^3 in G berührt.

Oder: *Legt man durch einen Punkt G von C^3 ausser den beiden Geraden, welche die innere Polare von G bilden, die vier Sehnen von C^3, welche auf C^3 ihre Halbirungspunkte haben, so liegen diese vier Halbirungspunkte auf einem Kegelschnitte, welcher C^3 in G berührt.*

Statt des Punktes G wählen wir einen Wendepunkt W; dann muss die Ortscurve W^3 auch W als Wendepunkt haben. Denn ziehen wir durch W drei Gerade $gg'g''$, welche C^3 in $G_1G_2G_1'G_2'G_1''G_2''$ schneiden, so liegen

diese auf einem Kegelschnitt C^2. Die Geraden $gg'g''$ schneiden also die Curve W^3 auch in sechs Punkten eines Kegelschnitts, und deshalb ist W ein Wendepunkt von W^3. Da sich C^3 und W^3 in den drei im Unendlichen liegenden Punkten von C^3 und ausserdem in den drei in W vereinigten Punkten schneiden, so liegen ihre drei letzten Schnittpunkte in einer Geraden. Daher lassen sich nur drei solche Sehnen von C^3 durch W ziehen, welche durch C^3 halbirt werden. Von dem Geradenpaare, welches die innere Polare von W bildet, fällt die eine Gerade mit der Wendetangente w zusammen; die andere ist der harmonischen Polare von W parallel. An C_6 lassen sich also von W nur vier Tangenten ziehen, während die beiden anderen mit w zusammenfallen, und daraus folgt wieder:

Die Curven C_6 und C^3 berühren sich in den Wendepunkten der letzteren.

Hiermit sind die von *Steiner* in diesem Journal, Bd. 47, §. 20, I. gegebenen Sätze bewiesen.

Die Ortscurve G^3 schneidet die Poloconik E_∞ von g_∞ in sechs Punkten, deren innere Polaren durch G gehen. Es sind aber die inneren Polaren der Punkte von E_∞ parallele Geradenpaare II_1. Von den Geraden solcher Paare gehen also sechs durch irgend einen Punkt G von C^3, und die von allen Paaren II_1 eingehüllte Curve ist von der sechsten Classe und werde mit I_6 bezeichnet. Liegt G auf g_∞, so lassen sich durch G nur zwei Tangenten an I_6 legen, die zusammen die innere Polare eines Punktes von E_∞ bilden. Die vier übrigen fallen mit g_∞ zusammen, und diese Gerade ist daher eine vierfache Tangente von I_6. — Im Obigen wurden die sechs Schnittpunkte von E_∞ und C^3 mit $D_0\ldots$ bezeichnet; die inneren Polaren dieser sechs Punkte fallen in je eine Gerade $d_0\ldots$ zusammen, und wenn diese g_∞ in $\mathfrak{D}_0\ldots$ schneidet, so muss $d_0\ldots$ die I_6 in $\mathfrak{D}_0\ldots$ berühren, also sind die sechs Geraden $d_0\ldots$ Asymptoten von I_6. — Ist P ein variabler Punkt von E_∞, II_1 das Geradenpaar, aus dem seine innere Polare besteht und das in einem Punkt Q von g_∞ seinen Doppelpunkt hat, so sind die Punktreihen $P\ldots$ auf E_∞ und $Q\ldots$ auf g_∞ in projectivischer Beziehung, und die Enveloppe der Geraden $PQ, \ldots$ ist eine Curve dritter Classe, vierter Ordnung, C_3^4, welche g_∞ zur Doppeltangente hat. Wir bezeichnen die beiden Berührungspunkte von g_∞ und C_3^4 mit $Q'Q''$, dann lassen sich von Q' und Q'' keine Tangenten, ausser g_∞, an C_3^4 ziehen; der dem Punkt Q' der Punktreihe $Q\ldots$ auf g_∞ entsprechende Punkt P' der Punktreihe $P\ldots$ auf E_∞ muss daher einer der Schnittpunkte von g_∞ und E_∞ sein; der andere ist P'' und entspricht dem Q''. — Die conischen Polaren

$\pi\ldots$ der Punkte $P\ldots$ von E_∞ berühren g_∞ in den entsprechenden Punkten $Q\ldots$, also berühren die conischen Polaren π' von P' und π'' von P'' die g_∞ in Q' und Q''. Die conischen Polaren der Punkte $Q\ldots$ von g_∞ bilden ein Büschel, und unter ihnen giebt es nur zwei, welche g_∞ berühren, und diese müssen daher π' und π'' sein. Die Poloconik E_∞ können wir aber auch auffassen als Ort der Punkte, welche in Bezug auf das Büschel conischer Polaren conjugirte Punkte der Punkte von g_∞ sind. Da nun Q'' der conjugirte Punkt von Q' und Q' der von Q'' ist, so muss die Poloconik E_∞ durch Q' und Q'' gehen, und daher müssen $Q'Q''$ mit $P'P''$ zusammenfallen. Es können aber Q' und P' nicht zusammenfallen, weil sonst die conische Polare π' von P' durch diesen Punkt gehen würde und letzterer also ein Punkt von C^3 wäre. Daher fällt P' auf Q'' und Q' auf P'', und $P'P''$ sind die beiden Berührungspunkte von g_∞ und C_3^4 und also auch von g_∞ und I_6. Da g_∞ aber eine vierfache Tangente von I_6 ist und in keinem anderen Punkt von I_6 berührt wird, so muss diese Curve in jedem Punkte P' und P'' die g_∞ doppelt, also in jedem sich selbst und zugleich C_3^4 berühren. Diese beiden Berührungspunkte gelten also für acht gemeinschaftliche Punkte von I_6 und g_∞; sechs andere sind die Punkte $\mathfrak{D}_0$ und weitere giebt es nicht, denn von jedem anderen Punkt von g_∞ lassen sich zwei Tangenten an I_6 ziehen. Daraus lässt sich schliessen, dass I_6 von der vierzehnten Ordnung ist. — In jedem Punkt $\mathfrak{P}$ schneiden sich drei Tangenten $p_1p_2p_3$ von C_3^4; sie treffen g_∞ in $Q_1Q_2Q_3$ und E_∞ in den homologen Punkten $P_1P_2P_3$. Die inneren Polaren dieser drei Punkte sind Geradenpaare, deren Gerade gleich weit von $\mathfrak{P}$ entfernt sind, weil $P_1P_2P_3$ die Mittelpunkte jener inneren Polaren sind, und daher giebt es einen Kegelschnitt, der die sechs Geraden jener drei Paare berührt.

Sind II_1 die beiden Geraden, welche die innere Polare von P bilden, und schneiden sie C^3 in ABC resp. $A_1B_1C_1$, so müssen sich AA_1, BB_1, CC_1 in P treffen. Wird daher I Tangente an C^3, so dass A und B zusammenfallen, etwa in γ, so müssen auch A_1 und B_1 in einen Punkt γ_1 zusammenfallen und I_1 wird also auch Tangente, so dass also, wenn eine Gerade I eines Paares gemeinschaftliche Tangente von C^3 und I_6 ist, es auch stets die andere Gerade sein muss. — Zwei solche Tangenten, wie $C\gamma$ und $C_1\gamma_1$, die gleich und parallel aber entgegengesetzt sind, sollen gleiche parallele ungleichliegende Tangenten genannt werden, und solcher muss es 18 Paar geben, weil die Curven C^3 und I_6 36 gemeinschaftliche Tangenten haben.

Die Gerade g_∞ ist eine dreifache Tangente der oben besprochenen

Curve C_6 und eine vierfache Tangente von I_6, also gilt sie als zwölf gemeinschaftliche Tangenten von C_6 und I_6. Sechs andere sind die Geraden d_0.... Es bleiben noch 18 übrig, welche aus neun Paar zusammengehörigen Geraden I und I_1 bestehen. Schneiden I und I_1 die C^3 in ABC und $A_1B_1C_1$, so ist $AB = BC = A_1B_1 = B_1C_1$. Solcher gleichen parallelen Sehnen giebt es also neun Paar. Der Halbirungspunkt P von BB_1 ist der Pol der inneren Polare II_1, und die neun Pole P liegen auf E_∞.

Wir haben also folgende Sätze erhalten (cf. dieses Journal, Bd. 47, pag. 41 u. 42. III.):

19. *Alle Paare von Geraden I und I_1, in welche die innere Polare I^2 zerfällt, wenn der Pol P auf E_∞ liegt, berühren eine Curve I_6^{14} sechster Classe und vierzehnter Ordnung, welche die sechs Sehnen d_0 zu Asymptoten und g_∞ zur vierfachen Tangente hat. Die Curve I_6 berührt jedoch die Gerade g_∞ nicht in vier, sondern in nur zwei verschiedenen Punkten $P'P''$, aber in jedem doppelt, so dass sie sich in jedem derselben selbst berührt, und zwar sind diese zwei Punkte zugleich die gemeinschaftlichen Punkte der Curve E_∞ und der Geraden g_∞. — Wird durch den Pol P mit den zugehörigen Geraden I und I_1 eine dritte Gerade, I_0, parallel gezogen, so ist ihr Ort eine Curve dritter Classe vierter Ordnung, welche g_∞ zur Doppeltangente hat und sie in den ebengenannten zwei Punkten P' und P'' berührt. — Das ganze System der verschiedenen Paare von Geraden I und I_1 ist so beschaffen, dass jeder Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene im Allgemeinen der Mittelpunkt eines Kegelschnitts ist, welcher diejenigen drei der genannten Paare berührt, welche den durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gehenden drei Geraden I_0 entsprechen.*

Die 36 gemeinschaftlichen Tangenten der Curve I_6 und der Basis C^3 bestehen aus 18 Paar zusammengehörigen Geraden I und I_1.

Eine Curve C^3 dritter Ordnung hat im Allgemeinen 18 Paar parallele gleiche ungleich liegende Tangenten, und die Mitten der 18 Berührungssehnen liegen auf der Poloconik E_∞.

Von den 36 gemeinschaftlichen Tangenten der Curven I_6 und C_6 fallen zwölf auf die Gerade g_∞, sechs andere sind jene sechs besonderen Sehnen d_0, und die noch übrigen 18 bestehen aus neun Paar zusammengehörigen Geraden I und I_1. — In der Curve C^3 giebt es im Ganzen neun Paar parallele gleiche Sehnen, die ihre Mitten auf C^3 haben, und die neun Halbirungspunkte der ihre Mitten verbindenden Geraden liegen auf dem Kegelschnitt E_∞.

Auf C^3 sei P ein beliebiger Punkt und durch ihn x eine variable

Gerade, welche C^3 in X und X' schneidet, dann entspricht jedem Punkt X ein Punkt X' und umgekehrt, also sind die Punktreihen $X\ldots$ und $X'\ldots$ in projectivischer Beziehung. Da man aber auch X' zur ersten Punktreihe rechnen kann und ihm dann X in der zweiten entspricht, so sind die Punktreihen $X\ldots X'\ldots$ und $X'\ldots X\ldots$ in involutorischer Lage. Die Tangenten $\xi\ldots$ in $X\ldots$ und $\xi'\ldots$ in $X'\ldots$ werden ebenso in projectivischer Beziehung stehen. Von welcher Ordnung ist der Ort der Schnittpunkte $(\xi\xi')$ homologer Tangenten? Zur Beantwortung dieser Frage wählen wir einen Punkt A auf einer beliebigen Geraden g, so lassen sich von ihm sechs Tangenten ξ an C^3 ziehen, denen sechs Tangenten ξ' entsprechen, welche g in sechs Punkten A' schneiden. Jedem Punkt A entsprechen also sechs Punkte A'. Wählen wir einen Punkt A', so entsprechen ihm wieder sechs Punkte A, und es wird zwölfmal geschehen, dass ein Punkt A mit einem homologen Punkt A' zusammenfällt. Auf g würde es demnach zwölf Punkte des gesuchten Ortes geben. Von diesen sind aber fortzulassen die vier Schnittpunkte mit den von P an C^3 gezogenen Tangenten, denn diese sind selbst Theile des Ortes. Die übrigen acht reduciren sich aber auf die Hälfte, weil die Punktreihen $X\ldots$ und $X'\ldots$ involutorisch sind. Demnach ist die Ortscurve $(\xi\xi')$ von der vierten Ordnung. Sie sei $\mathfrak{K}^4$.

Von allen Punkten Q der Geraden g_∞ ziehe man die Gruppen von sechs Tangenten an C^3 und verbinde die sechs Berührungspunkte einer jeden Gruppe durch Gerade s, so fragt es sich, welches wird die Enveloppe dieser Geraden s sein? Wir wählen einen beliebigen Punkt P von C^3 und bestimmen die Anzahl von Geraden s, welche durch P gehen. Zu diesem Zweck ziehen wir in P die Tangente an C^3, welche g_∞ noch in Q schneidet, und von Q noch die übrigen fünf Tangenten an C^3, deren Berührungspunkte $P_1P_2P_3P_4P_5$ sein mögen. Dann sind PP_1, PP_2, PP_3, PP_4, PP_5 fünf Sehnen s der gesuchten Enveloppe. Die dem Punkt P entsprechende Ortscurve $(\xi\xi')$ oder $\mathfrak{K}^4$ schneidet g_∞ in vier Punkten Q. Jeder von ihnen hat die Eigenschaft, dass, wenn man von ihm die sechs Tangenten an C^3 zieht, zwei der Berührungspunkte mit P in einer Geraden liegen. Daher schneiden sich in P neun Gerade s der gesuchten Enveloppe, und diese ist daher von der neunten Classe und werde mit $\mathfrak{S}_9$ bezeichnet.

Die *Hesse*sche Curve H^3 von C^3 wird von g_∞ in drei Punkten $X'Y'Z'$ geschnitten, deren conische Polaren Geradenpaare sind und zwar die drei Geradenpaare des Büschels conischer Polaren der Punkte von g_∞. Die drei Doppelpunkte XYZ dieser drei Geradenpaare sind Punkte der Poloconik E_∞,

denn diese ist der Ort der Pole von g_∞ bezüglich der conischen Polaren der Punkte von g_x. Die sechs Geraden dieser drei Paare sind die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks, und jede von ihnen ist eine dreifache Tangente der Curve $\mathfrak{S}_9$. Denn ist (xx_1) das Geradenpaar, welches die conische Polare von X' bildet, und schneidet x die Curve C^3 in ABC, so sind AB, BC, AC drei Tangenten von $\mathfrak{S}_9$, und da sie in eine Gerade x zusammenfallen, so ist diese eine dreifache Tangente von $\mathfrak{S}_9$.

Ist P_∞ einer der drei Schnittpunkte von g_∞ mit C^3, A_s die Tangente durch ihn, so muss sie auch Tangente von $\mathfrak{S}_9$ sein, weil in P_∞ zwei Punkte zusammenfallen. Also berührt $\mathfrak{S}_9$ die Asymptoten von C^3. — Von P_∞ lassen sich noch vier Tangenten an C^3 ziehen, die sämmtlich A_s parallel sind; eine solche Tangente heisse $\mathfrak{a}_0$, ihr Berührungspunkt $\mathfrak{A}_0$, dann giebt es, weil drei Punkte P_∞ vorhanden sind, zwölf Tangenten $\mathfrak{a}_0$ und also auch zwölf Berührungspunkte $\mathfrak{A}_0$. Die Geraden $\mathfrak{a}_0$ verbinden die Berührungspunkte $\mathfrak{A}_0$ und P_∞ und sind daher Tangenten von $\mathfrak{S}_9$. Die vier von P_∞ ausgehenden Tangenten berühren C^3 in $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0'\mathfrak{A}_0''\mathfrak{A}_0'''$, also sind $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0'$, $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0''$, $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0'''$, $\mathfrak{A}_0P_\infty$ vier Tangenten von $\mathfrak{A}_0$ an $\mathfrak{S}_9$; ausser diesen giebt es noch vier, doch fällt eine von ihnen noch mit $\mathfrak{A}_0P_\infty$ zusammen. Denn denken wir uns in $\mathfrak{A}_0$ die Punkte $\mathfrak{A}_0A_0$ vereinigt, so trifft $\mathfrak{A}_0A_0$ die C^3 noch in P_∞; die Punkte A_0 und P_∞ sind also als Punkte XX' der obigen Betrachtung aufzufassen, die Tangenten in ihnen sind $\mathfrak{A}_0P_\infty$ und A_s, die sich in P_∞ schneiden. Von $\mathfrak{A}_0$ lassen sich also nur sieben Tangenten an $\mathfrak{S}_9$ ziehen, und deshalb ist $\mathfrak{A}_0$ der Berührungspunkt von $\mathfrak{A}_0P_\infty$ mit $\mathfrak{S}_9$.

Durch die neun Wendepunkte $\mathfrak{W}$ von C^3 gehen neun Wendetangenten $\mathfrak{w}$; jede derselben hat vier ihr parallele Tangenten $\mathfrak{v}$, denn die conische Polare des Schnittpunkts $(\mathfrak{w}, g_x)$ berührt C^3 in $\mathfrak{W}$ und schneidet diese Curve noch in vier Punkten. Es giebt also 36 Tangenten $\mathfrak{v}$ und 36 Punkte $\mathfrak{V}$, wenn $\mathfrak{V}$ der Berührungspunkt von $\mathfrak{v}$ und C^3 ist. Die 36 Sehnen $\mathfrak{V}\mathfrak{W}$ sind Tangenten von $\mathfrak{S}_9$; von den neun Tangenten, die sich von $\mathfrak{V}$ an $\mathfrak{S}_9$ ziehen lassen, fallen zwei mit $\mathfrak{V}\mathfrak{W}$ zusammen, weil man sich in $\mathfrak{W}$ zwei Berührungspunkte von $\mathfrak{w}$ mit C^3 vereinigt denken kann, deshalb ist $\mathfrak{V}$ der Berührungspunkt von $\mathfrak{V}\mathfrak{W}$ mit C^3. — Die harmonische Polare $\mathfrak{w}'$ von $\mathfrak{W}$ schneidet g_∞ in $\mathfrak{W}'$; von $\mathfrak{W}'$ lassen sich sechs Tangenten an C^3 ziehen, deren Berührungspunkte paarweise auf drei Geraden liegen, welche sich im Wendepunkt $\mathfrak{W}$ treffen; diese sind drei Tangenten von $\mathfrak{S}_9$, ebenso die drei Tangenten, welche sich von $\mathfrak{W}$ an C^3 ziehen lassen; die drei noch übrigen Tangenten

fallen mit $\mathfrak{w}$ zusammen, also ist $\mathfrak{W}$ der Berührungspunkt von $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{S}_9$.

Zwei parallele Tangenten t_1 und t_2 berühren $\mathfrak{S}_9$ in P_1 und P_2, dann ist P_1P_2 eine Tangente von $\mathfrak{S}_9$. Die Krümmungsmittelpunkte der Basis C^3 in den Punkten P_1 und P_2 seien M_1 und M_2. Die Radien M_1P_1 und M_2P_2 sind parallel, und es schneiden sich M_1M_2 und P_1P_2 in einem Aehnlichkeitspunkt der beiden Krümmungskreise. Er heisse $\mathfrak{S}$. Die Krümmungskreise schneiden C^3 in je drei unendlich benachbarten Punkten, $P_1P_1'P_1''$ und $P_2P_2'P_2''$; so dass die Geraden P_1P_1' und P_2P_2' die Tangenten t_1 und t_2, die Geraden $P_1'P_1''$ und $P_2'P_2''$, die auch parallel sind, zwei andere parallele Tangenten t_1' und t_2' liefern. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte, $P_1''P_2''$, ist auch eine Tangente von $\mathfrak{S}_9$ und zwar die der Tangente P_1P_2 unendlich benachbarte. Sie muss auch durch den Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{S}$ gehen, und dieser ist daher der Berührungspunkt von P_1P_2 mit $\mathfrak{S}_9$.

Die Ordnung der Curve $\mathfrak{S}_9$ giebt *Steiner* höchstens als 36 an; es schneidet dann $\mathfrak{S}_9$ die Gerade g_∞ in 36 Punkten. Einer von ihnen heisse $\mathfrak{S}$; in $\mathfrak{S}$ ziehe man an $\mathfrak{S}_9$ die Tangente, welche C^3 in drei Punkten $P_1P_2P_3$ schneidet. Von diesen liegen zwei etwa P_1 und P_2 so, dass die Tangenten t_1t_2 in ihnen parallel sind. Da nun $\mathfrak{S}$ der Aehnlichkeitspunkt der beiden Krümmungskreise in P_1 und P_2 ist, so müssen diese Kreise gleich sein; ihr Aehnlichkeitspunkt ist ein äusserer, daher sind die Radien M_1P_1 und M_2P_2 gleich gerichtet.

Wir folgern aus Allem die Sätze (dieses Journal, Bd. 47, pag. 43 und 44. IV.):

20. *Zieht man durch einen Punkt P von C^3 Gerade, welche C^3 noch in XX', ... treffen und in diesen Punkten die Tangenten $\xi\xi'$, ..., so geschieht es nur vier Mal, dass solche Tangenten sich auf einer Geraden schneiden.*

Alle Sehnen, welche die Berührungspunkte je zweier parallelen Tangenten der gegebenen Basis C^3 verbinden, berühren eine Curve $\mathfrak{S}_9$ neunter Classe (und höchstens 36. Ordnung). Sie hat sechs dreifache Tangenten, nämlich die sechs Geraden, welche die drei Geradenpaare des Kegelschnittbüschels bilden, das aus den conischen Polaren der Punkte von g_∞ besteht. Diese sechs dreifachen Tangenten schneiden sich paarweise in den Berührungspunkten von E_∞ und der Hesseschen Curve H^3. Die Curve $\mathfrak{S}_9$ hat auch die drei Asymptoten von C^3 zu Tangenten und berührt die zwölf Tangenten $\mathfrak{a}_0$ an C^3, welche mit den drei Asymptoten parallel sind, in den Berührungspunkten $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{a}_0$ und

C^3. Es giebt ferner 36 Tangenten $\mathfrak{v}$, welche den Wendetangenten $\mathfrak{w}$ parallel sind. Nennt man $\mathfrak{V}$ ihre Berührungspunkte, so sind die 36 Sehnen $\mathfrak{V}\mathfrak{W}$ Tangenten von $\mathfrak{S}_9$ und haben $\mathfrak{V}$ zum Berührungspunkt.

Die Curve $\mathfrak{S}_9$ berührt C^3 in den neun Wendepunkten $\mathfrak{W}$ und in zwölf Punkten $\mathfrak{A}_0$. Die 54 gemeinschaftlichen Tangenten beider Curven bestehen 1. aus den neun Wendetangenten $\mathfrak{w}$ von C^3, jede dreifach gezählt, 2. aus den zwölf Tangenten $\mathfrak{a}_0$, jede doppelt gezählt und 3. aus den drei Asymptoten A_s von C^3.

Die Curve $\mathfrak{S}_9$ hat mit C^3 folgende Punkte gemeinschaftlich: 1. die neun Wendepunkte von C^3, jeden vierfach gezählt, 2. die zwölf Punkte $\mathfrak{A}_0$, jeden doppelt gezählt, 3. die 36 Punkte $\mathfrak{V}$, also zusammen 36+24+36 oder 96 Schnittpunkte. Daraus lässt sich schliessen, dass $\mathfrak{S}_9$ von der 32. Ordnung ist (und nicht von der 36. Ordnung).

Der Berührungspunkt $\mathfrak{S}$ jeder beliebigen Sehne P_1P_2 mit $\mathfrak{S}_9$ ist dadurch bestimmt, dass er mit den beiden Krümmungsmittelpunkten, M_1 und M_2, der Basis C^3 in den Endpunkten P_1 und P_2 der Sehne in einer Geraden liegt, so dass die Gerade M_1M_2 allemal die Sehne P_1P_2 im Berührungspunkt $\mathfrak{S}$ schneidet.

In einer beliebigen Curve C^3 dritter Ordnung giebt es im Allgemeinen 36 (oder 32) Paar gleiche und gleichliegende Krümmungsradien.

Oben fanden wir sechs besondere Sehnen d_0 als Tangenten der Curve C_6; diese sind, da die Tangenten in ihren Endpunkten an C^3 parallel sind, auch Tangenten von $\mathfrak{S}_9$. Wir fanden ferner 24 Sehnen s_0 als Tangenten in 24 Schnittpunkten von C^3 und C_6, in deren Endpunkten die Tangenten an C^3 parallel sind, also sind die 24 s_0 gemeinschaftliche Tangenten von C_6 und $\mathfrak{S}_9$. Ausser den sechs d_0 und 24 s_0 haben C_6 und $\mathfrak{S}_9$ noch die neun $\mathfrak{w}$ und die drei A_s (Asymptoten) der Basis C^3, jede doppelt gezählt, zu gemeinschaftlichen Tangenten, was zusammen 54 ausmacht.

Wenn A_1A_2 irgend zwei parallele Tangenten von C^3 und P_1P_2 ihre Berührungspunkte sind, so wird der Ort der Mitte $\mathfrak{M}$ aller Sehnen P_1P_2 eine bestimmte Curve $\mathfrak{M}^x$ sein. Um ihre Ordnung x zu bestimmen, suchen wir die Schnittpunkte von $\mathfrak{M}^x$ mit irgend einer Geraden, etwa mit g_∞. Auf g_∞ giebt es drei Schnittpunkte P_∞ mit C^3; von jedem Punkt P_∞ lassen sich acht Tangenten an $\mathfrak{S}_9$ ziehen; vier von ihnen sind die Tangenten von P_∞ an C^3. Sind $B_1B_2B_3B_4$ deren Berührungspunkte, so liegt die Mitte einer jeden Sehne $P_\infty B_1$ in P_∞, also ist P_∞ ein vierfacher Punkt von $\mathfrak{M}^x$, denn die Mitten der vier anderen Tangenten von P_∞ an $\mathfrak{S}_9$ liegen nicht in P_∞, weil diese vier

Tangenten C^3 noch in irgend zwei anderen Punkten schneiden. Die Gerade g_∞ hat also mit $\mathfrak{M}^x$ jeden der drei Punkte P_∞ als vierfachen Punkt gemeinschaftlich, und da weiter kein Punkt $\mathfrak{M}$ auf g_∞ liegen kann, so ist die Curve $\mathfrak{M}^x$ von der zwölften Ordnung, also $x = 12$. — Von einem Wendepunkt $\mathfrak{W}$ der C^3 lassen sich nur sechs Tangenten an $\mathfrak{S}_9$ ziehen; die siebente ist die Tangente im gemeinschaftlichen Berührungspunkt $\mathfrak{W}$. Dieser ist also auf zwei verschiedene Arten als eine unendlich kleine Sehne P_1P_2 anzusehen, so dass also mit $\mathfrak{W}$ zwei Punkte $\mathfrak{M}$ zusammenfallen und $\mathfrak{W}$ ein Berührungspunkt der Curven C^3 und $\mathfrak{M}^{12}$ wird. — Durch die sechs Schnittpunkte D_0 von E_∞ und C^3 lassen sich sechs Sehnen d_0 ziehen, in deren Endpunkten die Tangenten an C^3 parallel sind, folglich ist jeder Punkt D_0 ein Punkt $\mathfrak{M}$, und die sechs Punkte D_0 sind sechs Schnittpunkte der drei Curven E_∞, C^3 und $\mathfrak{M}^{12}$. Die 36 Schnittpunkte der Curven C^3 und $\mathfrak{M}^{12}$ sind also die drei Punkte P_∞, jeden vierfach gezählt, die neun Punkte $\mathfrak{W}$, jeden doppelt gezählt, und die sechs Punkte D_0.

Auf C^3 giebt es 18 Paar gleiche parallele ungleichliegende Tangenten $C\gamma$ und $C_1\gamma_1$; sind $\gamma\gamma_1$ die Berührungspunkte, so ist die Mitte von $\gamma\gamma_1$ ein Punkt von $\mathfrak{M}^{12}$, aber auch nach Früherem von E_∞.

Die innere Polare I^2 irgend eines Punktes $\mathfrak{M}$ muss die Curve C^3 in den Endpunkten P_1P_2 der Sehne, auf welcher $\mathfrak{M}$ liegt, berühren, weil die Tangenten t_1t_2 in P_1P_2 an C^3 parallel sind.

Es folgen hieraus die Sätze (dieses Journal, Bd. 47, pag. 45):

21. *Der Ort der Mitten $\mathfrak{M}$ aller Sehnen, welche die Berührungspunkte paralleler Tangenten der gegebenen Basis C^3 verbinden, ist eine Curve $\mathfrak{M}^{12}$ der zwölften Ordnung, welche die Basis in ihren neun Wendepunkten berührt, in den sechs Punkten D_0 schneidet und ihre drei unendlich entfernten Punkte P_∞ zu vierfachen Punkten hat. — Die Curve $\mathfrak{M}^{12}$ schneidet E_∞ in den sechs Punkten D_0 und in 18 Punkten, den Mitten der Sehnen, welche die Berührungspunkte der 18 Paar gleicher paralleler ungleichliegender Tangenten verbinden.* —

Der Ort des Pols, dessen innere Polare I^2 die Basis C^3 berührt und zwar jedesmal doppelt berührt, ist dieselbe Curve $\mathfrak{M}^{12}$.

In einer Curve C^3 dritter Ordnung giebt es keine zwei Sehnen, welche einander hälften, weil sonst die innere Polare I^2 der gemeinsamen Mitte die C^3 in vier Punkten berühren würde. — $\mathfrak{M}^{12}$ kann ausser den drei Punkten P_∞ keinen weiteren vielfachen Punkt haben, weil die innere Polare desselben sonst die C^3 wenigstens in vier Punkten berühren müsste.

In 16. fanden wir den Satz, dass, wenn eine Transversale g um einen in ihr liegenden Punkt P gedreht wird, so beschreiben die drei Mitten der auf ihr abgeschnittenen Sehnen eine Curve C^6 sechster Ordnung. Alle Sehnen, deren Mitten auf einer Geraden l liegen, werden eine Curve Q_6 sechster Classe einhüllen; denn ist P ein beliebiger Punkt, so schneidet die ihm nach dem eben genannten Satz entsprechende Curve C^6 die Gerade l in sechs Punkten, also giebt es durch den beliebigen Punkt P sechs Gerade, die ihre Mitten auf l haben. Die Geraden l und g_∞ sind dreifache Tangenten von Q_6; denn sind $L_q L_r L_s$ die Schnittpunkte von l und C^3, so liegen die Halbirungspunkte der drei Sehnen $L_q L_r$, $L_r L_s$, $L_s L_q$ auf l, und folglich sind diese drei Sehnen drei Tangenten von Q_6. Von irgend einem Punkt von l lassen sich daher nur drei Tangenten an Q_6 ziehen, welche diesen Punkt zum Halbirungspunkt haben.

Ist Q_∞ irgend ein Punkt von g_∞, so schneidet die ihm entsprechende harmonische Polarcurve die Gerade l in drei Punkten, die Mitten von drei durch Q_∞ gehenden Sehnen sein müssen. Mehr Sehnen als diese drei, welche ihre Mitten auf l haben, lassen sich durch Q_∞ nicht legen, also muss g_∞ eine dreifache Tangente sein. — Wenn wir statt Q_∞ einen der drei im Unendlichen liegenden Punkte P_∞ von C^3 wählen, so besteht seine harmonische Polarcurve aus der Asymptote A_s durch P_∞ und der conischen Polare von P_∞. Von den drei Tangenten, die sich von einem Punkt auf g_∞ an Q_6 ziehen lassen, ist in diesem Fall A_s die eine. — Die drei Tangenten in den Schnittpunkten $L_q L_r L_s$ von l und C^3 nennen wir qrs; betrachten wir L_q als eine unendlich kleine Sehne, so ist L_q auch ihre Mitte und liegt auf l. Deshalb sind qrs auch drei Tangenten von Q_6. — Einen der Schnittpunkte von l und Q_6 bezeichnen wir mit Q_0 und die Tangente durch ihn an Q_6 mit q_0; die innere Polare von Q_0 muss C^3 in diesem Fall in zwei Punkten schneiden und in zwei anderen berühren, denn ausser der Tangente q_0 lässt sich durch Q_0 nur eine solche Sehne noch ziehen, die in Q_0 ihre Mitte hat. Dies folgt unmittelbar, wenn wir Q_0 als Durchschnitt zweier unendlich benachbarten Tangenten betrachten. Der Ort aller Punkte, deren innere Polaren die Basis C^3 doppelt berühren, ist aber eine $\mathfrak{M}^{12}$. Ausser ihren zwölf Schnittpunkten Q_0 mit l und den drei Berührungspunkten von l und Q_6 kann diese Curve Q_6 keinen weiteren Punkt mit l gemeinschaftlich haben, und daher ist Q_6 von der 18. Ordnung. Wenn die Tangente q_0 die Basis C^3 in ABC schneidet und es

ist Q_0 die Mitte von AB, so müssen die Tangenten in A und B an C^3 parallel sein, also sich auf g_∞ schneiden. —

Ist ferner $\mathfrak{D}_\infty$ ein Schnittpunkt von Q_6 und g_∞ und $\mathfrak{q}_\infty$ die Tangente durch ihn an Q_6, so können wir $\mathfrak{D}_\infty$ wieder als Schnittpunkt zweier unendlich benachbarten Tangenten $\mathfrak{q}_\infty$ und $\mathfrak{q}'_\infty$ betrachten. Diese mögen C^3 in $\mathfrak{ABC}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, l in L und L' schneiden, dann ist L die Mitte von $\mathfrak{AB}$ und L' von $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, und es müssen sich die Geraden $\mathfrak{AA}'$, $\mathfrak{BB}'$, LL' in einem Punkt schneiden, oder die Tangenten in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ an $\mathfrak{C}^3$ schneiden sich auf l. Es folgt (dieses Journal, Bd. 47, pag. 97):

22. *Der Ort aller Sehnen AB oder s der Basis C^3, deren Mitten in einer gegebenen Geraden l liegen, ist eine Curve Q_6^{18} von der sechsten Classe und der achtzehnten Ordnung, welche die Geraden l und g_∞ zu dreifachen Tangenten hat, und welche insbesondere auch die drei Asymptoten der Basis nebst deren drei Tangenten in ihren Schnitten mit l berührt. Die Tangenten von Q_6 in ihren Schnitten mit l sind solche Sehnen AB, dass die Tangenten in ihren Endpunkten A und B an C^3 sich auf g_∞ schneiden und gleicherweise sind ihre achtzehn Asymptoten $\mathfrak{q}_\infty$ solche besondere Sehnen $\mathfrak{AB}$, dass die Tangenten in diesen Punkten an C^3 sich auf l schneiden, so dass also in dieser Beziehung zwischen l und g_∞ Reciprocität stattfindet.*

Eine Tangente t berühre C^3 in A und schneide in B. Welches ist der Ort der Halbirungspunkte M auf allen Tangenten t von C^3?

Von einem variablen Punkt P_1 auf g_∞ lassen sich sechs parallele Tangenten t_1 an C^3 ziehen, deren Berührungspunkt A_1 und Schnittpunkt B_1 sein mag. Die harmonische Polarcurve C_1^3 von P_1 berührt t_1 in dem Halbirungspunkt M_1 von A_1B_1. Die Frage stellt sich daher auch so: Zieht man von allen Punkten der Geraden g_∞ an die harmonischen Polarcurven dieser Punkte die Tangenten t_1, welches ist der Ort der Berührungspunkte M_1? Die Punkte M_1 liegen auf der conischen Polare π_1 von P_1 in Bezug auf seine harmonische Polarcurve C_1^3, und alle conischen Polaren $\pi_1 \ldots$ werden eine Kegelschnittreihe bilden, deren Index bestimmt werden soll, unter Index die Zahl verstanden, welche angiebt, wie viele von den Kegelschnitten durch irgend einen Punkt gehen. — Die harmonischen Curven C_1^3 der Punkte P_1 von g_∞ bilden eine Curvenreihe vom Index drei. Von allen geraden Polaren eines Punktes Q in Bezug auf alle C_1^3 gehen durch einen Punkt z. B. durch Q selbst drei, nämlich die geraden Polaren derjenigen drei Curven C_1^3, welche durch Q gehen, folglich werden die geraden Polaren aller Punkte Q von g_∞ bezüglich der

Curven C_1^3 von einer Curve C_3 dritter Classe eingehüllt. Jede gerade Polare q_1 von Q bezüglich einer harmonischen Polarcurve C_1^3 lassen wir dem Pol P_1 dieser Curve entsprechen, dann ist die Tangentenreihe q_1 auf C_3 in projectivischer Beziehung mit der Punktreihe P_1 auf g_∞. Wie viele der Tangenten q_1 gehen durch die ihnen entsprechenden Punkte P_1? Jedem Punkt P_1 von g_∞ entspricht eine Tangente q_1 von C_3, welche g_∞ in einem Punkt P_1' schneidet; von einem Punkt P_1' lassen sich drei Tangenten q_1 an C_3 ziehen, jeder entspricht ein Punkt P_1 auf g_∞, also stehen die Punktreihen $P_1\ldots$ und $P_1'\ldots$ in einer solchen Beziehung, dass jedem Punkt P_1 ein Punkt P_1' und jedem Punkt P_1' drei Punkte P_1 entsprechen. Daher geschieht es viermal, dass ein Punkt P_1 mit seinem entsprechenden P_1' zusammenfällt. Es gehen also vier gerade Polaren q_1 durch die ihnen entsprechenden Punkte P_1 und daher die vier conischen Polaren π_1 dieser Punkte bezüglich der ihnen entsprechenden harmonischen Polarcurven C_1^3 durch den Punkt Q. Die Reihe der conischen Polaren π_1 der Punkte P_1 von g_∞ bezüglich der den letzteren entsprechenden harmonischen Polarcurven C_1^3 hat also den Index vier. Wir haben den Ort der Schnittpunkte der Curven C_1^3 und π_1 zu bestimmen in den Curvenreihen $C_1^3\ldots$ und $\pi_1\ldots$, die in projectivischer Beziehung stehen, wenn wir je zwei Curven einander zuordnen, die denselben Pol haben. Zu dem Zweck nehmen wir auf einer beliebigen Geraden g einen Punkt $\mathfrak{P}$; durch ihn lassen sich vier conische Polaren π_1 legen, denen vier Curven C_1^3 entsprechen, welche g in zwölf Punkten $\mathfrak{P}'$ schneiden. Daher entsprechen jedem Punkt $\mathfrak{P}$ von g zwölf Punkte $\mathfrak{P}'$ von g. Durch einen Punkt $\mathfrak{P}'$ von g gehen drei Curven C_1^3, ihnen entsprechen drei Kegelschnitte π_1, und diese schneiden g in sechs Punkten $\mathfrak{P}$, so dass also jedem Punkt $\mathfrak{P}'$ sechs Punkte $\mathfrak{P}$ entsprechen. Es geschieht also achtzehnmal, dass ein Punkt $\mathfrak{P}$ mit seinem entsprechenden Punkt $\mathfrak{P}'$ zusammenfällt oder mit anderen Worten, der Ort der Mitten M_1 ist eine Curve $\mathfrak{M}^{18}$ der achtzehnten Ordnung. — Ist P_∞ einer der im Unendlichen liegenden Punkte von C^3, so fallen mit ihm die sechs Mitten der sechs von ihm ausgehenden Tangenten an die Basis C^3 zusammen, und er ist daher ein sechsfacher Punkt der Curve. Die Schnittpunkte P_∞ von g_∞ und C^3 sind daher sechsfache Punkte von $\mathfrak{M}^{18}$, und die Gerade g_∞ hat mit $\mathfrak{M}^{18}$ keinen weiteren Punkt, ausser den drei Punkten P_∞ gemeinschaftlich.

Wir fanden den Ort $\mathfrak{M}^{18}$ der Mitten M_1 auf den Tangenten t_1 als den Ort der Berührungspunkte der Tangenten t_1 von den Punkten P_1 der Geraden g_∞ an die harmonischen Polarcurven C_1^3 dieser Punkte. Die harmonische

Polarcurve des Punktes P_∞ besteht aus der Asymptote a_s und der conischen Polare π_∞ von P_∞. Zieht man von P_∞ an die Curve (a_s, π_∞) die Tangenten, so fallen sie sämmtlich mit a_s zusammen. Man kann also jeden Punkt von a_s als Berührungspunkt ansehen und schliesst daraus, dass a_s ein Theil der Curve $\mathfrak{M}^{18}$ ist. Diese besteht also aus zwei Theilen, einer Curve $\mathfrak{M}^{15}$ und den $3a_s$ der Basis C^3.

Von den sechs Punkten, die in P_∞ vereinigt sind, liegen zwei auf a_s, also ist a_s auch eine Tangente von $\mathfrak{M}^{15}$, und diese Curve berührt also a_s in P_∞ mit einem Zweige und schneidet diese Asymptote in P_∞ mit vier anderen Zweigen. —

Betrachten wir eine Wendetangente $\mathfrak{w}$ von C^3 als eine Tangente t_1, so fallen im Wendepunkt $\mathfrak{W}$ die drei Punkte A, B und M_1 zusammen, also geht $\mathfrak{M}^{15}$ durch die neun Wendepunkte der Basis C^3. Da in $\mathfrak{W}$ drei Punkte vereinigt sind, so kann man $\mathfrak{W}$ auf drei verschiedene Arten als Sehne AB betrachten, also liegen in $\mathfrak{W}$ drei Punkte M_1.

Im vorigen Satz fanden wir eine Curve Q_6 als Ort der Sehnen, deren Mitten auf einer Geraden l liegen. Berücksichtigen wir dabei die Tangentensehnen t_1, so finden wir 15 solche Tangentensehnen als Tangenten von Q_6, weil $\mathfrak{M}^{15}$ die Gerade l in 15 Punkten schneidet. Eine dieser Tangentensehnen berühre C^3 in A_0 und schneide in B_0, so fallen mit A_0B_0 eigentlich zwei Sehnen zusammen, die A_0 als Schnittpunkt haben, also ist A_0 der Berührungspunkt von Q_6 und A_0B_0 und also auch von Q_6 und C^3.

Aus Allem folgern wir (dieses Journal, Bd. **47**, pag. 99):

23. *Der Ort der Mitten M_1 aller Tangenten t_1 der Basis C^3 ist eine Curve $\mathfrak{M}^{15}$ der 15. Ordnung, welche die drei Punkte P_∞ der Basis zu sechsfachen Punkten hat und jede Asymptote der Basis auch zur Asymptote hat, welche also jede Asymptote a_s der Basis in ihrem Berührungspunkt P_∞ mit einem Zweige berührt und mit vier anderen Zweigen schneidet und die endlich in den neun Wendepunkten der Basis diese dreipunktig berührt.*

Zusatz zu 22. *Die Curve Q_6 berührt die Basis C^3 in den 15 Punkten A_0, in denen sie von den 15 Tangentensehnen berührt wird, deren Mitten auf l liegen.*

Auf Seite 72 des 47. Bandes dieses Journals stellt *Steiner* die Forderung, für eine Curve C^m von beliebiger Ordnung den Grad der Curve zu bestimmen, welche durch die Mitten aller Tangentensehnen geht. Da die Ordnung dieser Curve sich analog, wie für Curven dritter Ordnung bestimmen lässt, so soll diese Bestimmung hier angegeben werden.

Ist P ein beliebiger Punkt und p eine Transversale durch ihn, welche C^m in m Punkten schneidet, so giebt es $\frac{m(m-1)}{2}$ Punkte, welche die Curve von P harmonisch trennen. Wenn p um P sich dreht, so beschreiben diese $\frac{m(m-1)}{2}$ Punkte eine Curve $C_1^{\frac{m(m-1)}{2}}$ der $\frac{m(m-1)}{2}$ ten Ordnung, welche die harmonische Polarcurve von P bezüglich C^m heisst. Zieht man von P eine Tangente t an C^m, welche in (A_1A_2) berührt und in $A_3 \ldots A_m$ schneidet, so muss t die Curve $C_1^{\frac{m(m-1)}{2}}$ in den $m-2$ Punkten berühren, in welchen (A_1A_2) und einer der Punkte $A_3 \ldots A_m$ von P harmonisch getrennt wird. Da sich von P an C^3 $m(m-1)$ Tangenten ziehen lassen, so hat $C_1^{\frac{m(m-1)}{2}}$ $(m-2)$fache Tangenten, deren Anzahl $m(m-1)$ ist und die sich in P schneiden. Ist P ein Punkt von g_∞, $C_1^{\frac{m(m-1)}{2}}$ seine harmonische Polarcurve, so werden die Berührungspunkte der von ihm ausgehenden $(m-2)$fachen Tangenten die Halbirungspunkte der Sehnen, in denen die Basis C^m von den Tangenten geschnitten wird, wenn wir den Berührungspunkt auf C^m stets als den einen Endpunkt dieser Sehnen betrachten. — Die harmonischen Polarcurven aller Punkte einer Geraden bilden eine Curvenreihe vom Index $\frac{m(m-1)}{2}$.

Schlägt man denselben Weg ein, wie bei einer Curve C^3 dritter Ordnung, so findet man leicht als Ort der Mitten aller Tangentensehnen, wenn jede Sehne den Berührungspunkt als einen Endpunkt hat, eine Curve von der Ordnung $\left(\frac{m^2(m-1)^2}{2} - m\right)$

$$\mathfrak{M}^{\frac{m^2(m-1)^2}{2}-m}.$$

Steiner giebt im 47. Bande dieses Journals pag. 99 VI. α. die Ordnung dieser Curve als $m(m+2)(m-2)$ an. Für $m=3$ geben beide Zahlen 15. Welche ist richtig? Er selbst sagt am Schluss der Abhandlung, dass er sich bei der Ableitung der Sätze in den letzten Paragraphen einige gewagte Schlüsse erlaubt hat.

In 20. fanden wir, dass der Ort der Sehnen s einer Curve C^3 dritter Ordnung, welche die Berührungspunkte paralleler Tangenten verbinden, eine Curve $\mathfrak{S}_9$ neunter Classe ist. *Steiner* stellt auf der 98. Seite des 47. Bandes dieses Journals die Aufgabe, die Classe der Curve $\mathfrak{S}_x$ für eine Curve C^m von der m^{ten} Ordnung als Basis zu bestimmen. In einem speciellen Falle ist diese

Bestimmung nicht schwer, wenn nämlich die Curve C^m einen $(m-1)$fachen Punkt S hat. — Wenn g eine beliebige Gerade ist, so bilden die ersten Polaren der Punkte von g bezüglich der Curven C^m einen Curvenbüschel von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Die Curven dieses Büschels schneiden C^m ausser in S in den Punktgruppen einer Involution vom $(m-1)^{2\text{ten}}$ Grade, und verbindet man diese Punktgruppen mit S, so erhält man in S die Strahlengruppen einer Involution vom $(m-1)^{2\text{ten}}$ Grade. Zieht man ferner durch einen beliebigen Punkt P Strahlen, so schneiden diese C^m in den Punktgruppen einer Involution vom m^{ten} Grade, und deren Verbindungslinien mit S bilden die Strahlengruppen einer Involution vom m^{ten} Grade. — Legt man durch S einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, so schneidet dieser die beiden Strahleninvolutionen in den Punktgruppen zweier Involutionen vom Grade $(m-1)^2$ und m. Verbindet man die Punkte jeder einzelnen Gruppe unter sich, so werden diese Verbindungslinien bei einer Involution vom m^{ten} Grade von einer Curve C_{m-1} der $(m-1)^{\text{ten}}$ Classe eingehüllt. Denn ist A irgend ein Punkt des Kegelschnitts, so lassen sich von ihm nur $m-1$ Tangenten an C_{m-1} ziehen, die Geraden nämlich, welche A mit den $m-1$ Punkten des Kegelschnitts verbinden, die mit A zusammen eine Involutionsgruppe bilden. Die beiden Involutionscurven sind also $C_{(m-1)^2-1}$ und C_{m-1}, von der Classe $(m-1)^2-1$ und $m-1$. Sie besitzen $((m-1)^2-1)(m-1)$ oder $m(m-1)(m-2)$ gemeinschaftliche Tangenten, und so oft geschieht es, dass zwei Punkte einer Gruppe der einen Involution mit zwei Punkten einer Gruppe der anderen zusammenfallen. — So oft geschieht es also auch, dass die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier Tangenten an C^m, die von einem Punkt von g aus gezogen sind, durch den Punkt P geht. — Wenn g in g_∞ übergeht, so haben wir den Satz:

24. *Die Sehnen s einer Curve C^m von der m^{ten} Ordnung mit einem $(m-1)$fachen Punkt S, welche die Berührungspunkte paralleler Tangenten verbinden, werden von einer Curve $C_{((m-1)^2-1)(m-1)}$ oder $C_{m(m-1)(m-2)}$ der $((m-1)^2-1)(m-1)$ oder der $m(m-1)(m-2)^{\text{ten}}$ Classe eingehüllt.*

Um die Ordnung der Curve $C_{m(m-1)(m-2)}$ zu erhalten, lassen wir P auf einer Geraden l sich bewegen; jeder Lage von P entspricht auf dem vorhingenannten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ eine Curve C_{m-1}. Man erhält dieselbe, wenn man den $(m-1)$fachen Punkt S von C^m mit den Punkten verbindet, in denen eine variable Gerade durch P die Curve C^m schneidet, die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit $\mathfrak{K}$ bestimmt und diejenigen unter einander verbindet, welche auf $\mathfrak{K}$ Gruppen einer Involution vom m^{ten} Grade bilden. Die Enve-

loppe der letzten Verbindungslinien ist eine Curve C_{m-1} von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Classe. Alle C_{m-1} bilden eine Curvenschaar von $(m-1)^2$ festen Tangenten. Denn schneidet l die C^m in $L_1 L_2 \ldots L_m$ und sind $L_1' L_2' \ldots L_m'$ die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ mit den Geraden SL_1, SL_2, ..., SL_m, so sind die $\frac{m(m-1)}{2}$ Verbindungslinien der m Punkte $L_1 L_2 \ldots L_m$ gemeinschaftliche Tangenten aller C_{m-1}. Sind ferner $t_1 t_2 \ldots t_{m-1}$ die $m-1$ Tangenten in S an C^m und sind $T_1 T_2 \ldots T_{m-1}$ ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}$, so sind die $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Gerade, welche diese Punkte verbinden, auch gemeinschaftliche Tangenten aller $C_{m-1}\ldots$, so dass diese also $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ oder $(m-1)^2$ gemeinschaftliche Tangenten haben. So oft eine der Curven C_{m-1} die vorhin genannte Involutionscurve $C_{(m-1)^2-1}$ oder $C_{m(m-2)}$ berührt, so oft schneidet die Gerade l die Curve $C_{m(m-1)(m-2)}$. Denn ist P' ein solcher Punkt von l, dass die ihm entsprechende Curve C_{m-1}' die Curve $C_{m(m-2)}$ berührt, so lassen sich durch P' nur $m(m-1)(m-2)-1$ Tangenten an die Curve $C_{m(m-1)(m-2)}$ ziehen, d. h. P' liegt auf dieser Curve. Es berühren aber (cf. *Cremona,* Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven) $m(m-2)(m^2-5)$ Curven der Schaar $C_{m-1}\ldots$ die Curve $C_{m(m-2)}$, und also ist die Curve $C_{m(m-1)(m-2)}$ von der Ordnung $m(m-2)(m^2-5)$. Es folgt:

Die Enveloppe der Geraden, welche die Berührungspunkte paralleler Tangenten einer Curve C^m der m^{ten} Ordnung mit einem $(m-1)$ fachen Punkt verbinden, ist eine Curve von der $m(m-1)(m-2)^{\text{ten}}$ Classe und $m(m-2)(m^2-5)^{\text{ten}}$ Ordnung. — In ihr giebt es also (cf. 20) $m(m-2)(m^2-5)$ *parallele und gleiche Krümmungshalbmesser.*

Man kann nun auch die von *Steiner* gestellte Frage beantworten und die Classe der Enveloppe C_x bestimmen für eine beliebige Basis C^m, die keinen vielfachen Punkt hat. — In dem Falle, dass C^m einen $(m-1)$ fachen Punkt hat, ist die Classe der Enveloppe $m(m-1)(m-2)$; ziehen wir von einem beliebigen Punkt die Gerade PS, welche C^m noch in Q schneidet, und in Q die Tangente an C^m, welche g_∞ in R trifft, und endlich RS, so trifft RS die C^m in S in $m-1$ zusammenfallenden Punkten; diese gruppiren sich $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Mal zu je zweien, so dass also auf RS eigentlich $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Tangenten an C^m und in PS ebensoviel Tangenten der Enveloppe liegen. Weil es in S an C^m noch $m-1$ Tangenten giebt, so liegen in PS noch andere $m-1$ Tangenten der Enveloppe. Das Auftreten eines $(m-1)$ fachen Punktes erniedrigt

also die Classe der Enveloppe um $\frac{(m-1)(m-2)}{2}+(m-1)$ oder $\frac{m(m-1)}{2}$. Zählt man diese Zahl zu $m(m-1)(m-2)$ hinzu, so erhält man als Classe der Enveloppe $\frac{m(m-1)(2m-3)}{2}$. Also:

Die Enveloppe der Geraden, welche die Berührungspunkte paralleler Tangenten einer allgemeinen Curve C^m m^{ter} Ordnung verbinden, ist eine Curve von der Classe $\frac{m(m-1)(2m-3)}{2}$.

Dem letzten Satz können wir auch die Form geben:

Die gemeinschaftlichen Sehnen einer Curve m^{ter} Ordnung und der ersten Polaren der Punkte einer Geraden in Bezug auf jene Curve werden von einer Curve der $\frac{m(m-1)(2m-3)}{2}$*ten Classe eingehüllt.*

Anmerkung. Beiläufig mag hier auf einen Irrthum aufmerksam gemacht werden, der sich in dem Werk „Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven“ von *Cremona*, ins Deutsche übersetzt von *Curtze*, auf Seite 283 vorfindet. Der Lehrsatz VI. lautet dort: „Die gemeinschaftlichen Sehnen einer Curve m^{ter} Ordnung und der Kegelschnitte einer Reihe (μ, ν) werden von einer Curve der $(2m-1)\mu^{ten}$ Classe umhüllt.“ Für den Fall, dass $\mu=1$, also die Kegelschnitte ein Büschel bilden, und wenn $m=3$ ist, würde die Classe der Enveloppe fünf sein, während sie nach dem letzten Satze neun sein muss.

Es lässt sich übrigens leicht ein allgemeiner Satz über die Enveloppe der Verbindungslinien der Schnittpunkte einer Curve C^m der m^{ten} Ordnung mit den Curven eines Büschels C^n der n^{ten} Ordnung, zunächst für den Fall ableiten, dass C^m einen $(m-1)$fachen Punkt S hat. Sei wieder P ein beliebiger Punkt, p eine variable Gerade durch ihn, welche C^m in $P_1P_2\ldots P_m$ schneidet, $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Kegelschnitt durch S, welcher die Geraden SP_1, SP_2, …, SP_m in $P_1'P_2'\ldots P_m'$ schneidet. Die Punkte $(P_1'P_2'\ldots P_m')$, … bilden die Gruppen einer Involution vom m^{ten} Grade. Jede der Curven $C^n\ldots$ schneidet C^m in mn Punkten $(C_1C_2\ldots C_{mn})$, …, deren Verbindungslinien mit S den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in den Punktgruppen $(C_1'C_2'\ldots C_{mn}')\ldots$ einer Involution vom Grade mn schneiden. Die Verbindungslinien aller Punkte einer jeden Gruppe $(P_1'P_2'\ldots P_m')$ werden von einer Curve C_{m-1} der $(m-1)^{ten}$ Classe und alle Verbindungslinien der Punkte einer jeden Gruppe $(C_1'C_2'\ldots C_{mn}')$ werden von einer Curve K_{mn-1} der $(mn-1)^{ten}$ Classe umhüllt. Beide Curven haben

$(m-1)(mn-1)$ gemeinschaftliche Tangenten. Eine von den Curven C^n und eine der Geraden p geht durch S; die $m-1$ Tangenten in S treffen $\mathfrak{K}$ in $m-1$ Punkten, deren $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Verbindungslinien gemeinschaftliche Tangenten von C_{m-1} und K_{mn-1} sind. Ziehen wir diese ab, so bleibt für die Classe der Enveloppe die Zahl $(m-1)(mn-1)-\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ oder $\frac{m(m-1)}{2}(2n-1)$. Bewegt sich P auf einer Geraden l, so entspricht jedem Punkt P eine Curve C_{m-1}. Alle C_{m-1}... haben mit K_{mn-1} $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ gemeinschaftliche Tangenten, also berühren $(mn-1)(mn+2m-6)-(m-1)(m-2)$ von den Curven C_{m-1} die Curve K_{mn-1}. Also:

Die gemeinschaftlichen Sehnen einer Curve C^m mit einem $(m-1)$fachen Punkt S und der Curven C^n... eines Büschels n^{ter} Ordnung werden umhüllt von einer Curve der $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)^{\text{ten}}$ Classe und der $(mn-1)(mn+2m-6)-(m-1)(m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Wir haben den Ort der Mitten aller Tangentensehnen bestimmt für die Basis C^3 als eine Curve $\cdot\mathfrak{M}^{15}$ der 15. Ordnung und suchen jetzt den Ort A_0^x der Schwerpunkte aller Tangentensehnen AB. Jeden der drei Schnittpunkte einer Transversale mit C^3 denken wir uns gleich schwer, dann muss der Berührungspunkt A der Tangente AB doppelt so schwer gedacht werden, als der Schnittpunkt B, und folglich liegt der Schwerpunkt S auf AB so, dass er diese Strecke im Verhältniss von 1 : 2 theilt und näher an A liegt. Geometrisch betrachtet ist S der Schnittpunkt von AB mit der geraden Polare des auf AB im Unendlichen liegenden Punktes bezüglich der Basis C^3. Von einem Punkt P_∞ der Geraden g_∞ denken wir die sechs Tangenten gezogen und die gerade Polare p von P_∞ bestimmt, so schneidet sie jede der sechs Tangenten in einem Punkt des gesuchten Ortes. Wenn P_∞ die Gerade g_∞ durchläuft, so erhalten wir die gesuchte Curve A_0^x. Um die Zahl x zu bestimmen, nehmen wir auf einer beliebigen Geraden g einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ und ziehen von ihm an C^3 die sechs Tangenten, welche g_∞ in sechs Punkten P_∞ schneiden. Jedem dieser Punkte entspricht eine gerade Polare p und ihr Schnittpunkt $\mathfrak{P}'$ mit g; dem Punkt $\mathfrak{P}$ entsprechen also sechs Punkte $\mathfrak{P}'$. Nehmen wir umgekehrt einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}'$, so lassen sich durch ihn zwei gerade Polaren ziehen, die Tangenten an die Poloconik E_∞ von g_∞. Jeder dieser Tangenten entspricht ein Punkt P_∞; von jedem der beiden Punkte P_∞ lassen sich sechs Tangenten an C^3 ziehen, welche g in zwölf Punkten $\mathfrak{P}$ schneiden, die dem Punkt

$\mathfrak{P}'$ entsprechen. Deshalb geschieht es 18 Mal, dass ein Punkt $\mathfrak{P}$ mit seinem entsprechenden Punkt $\mathfrak{P}'$ zusammenfällt, und folglich ist $x = 18$.

Fällt P_∞ in einen Schnittpunkt von g_∞ und C^3, so fällt die gerade Polare p von P_∞ mit der Tangente a_s in P_∞ an C^3 zusammen, und folglich ist jeder Punkt von p als Schnittpunkt von p und a_s zu betrachten. Die Asymptote a_s ist also ein Theil der Ortscurve; dasselbe gilt von den beiden anderen Asymptoten. Die übrig bleibende Curve A_0^{15} ist also eine Curve von der 15. Ordnung. Die gerade Polare p oder a_s schneidet die vier von P_∞ an C^3 zu ziehenden Tangenten in P_∞, also ist P_∞ ein fünffacher Punkt von A_0^{15}, und zwar muss A_0^{15} mit einem Zweige a_s und also C^3 in P_∞ berühren und mit vier anderen schneiden.

Schneidet eine Wendetangente $\mathfrak{w}$ die Gerade g_∞ in $\mathfrak{W}_\infty$, so geht dessen gerade Polare durch den Wendepunkt $\mathfrak{W}$, also ist $\mathfrak{W}$ ein Punkt von A_0^{15}, und die Curven A_0^{15} und C^3 schneiden sich in den neun Wendepunkten von C^3. Denken wir uns im Wendepunkt $\mathfrak{W}$ die drei unendlich nahen Punkte $\mathfrak{W}_0\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2$ vereinigt, so kann man sich $(\mathfrak{W}_0\mathfrak{W}_1)$ als Berührungspunkt und $\mathfrak{W}_2$ als Schnittpunkt von C^3 und $\mathfrak{w}$ denken und ebenso $(\mathfrak{W}_0\mathfrak{W}_2)$ als Berührungspunkt und $\mathfrak{W}_0$ als Schnittpunkt; es fallen also mit $\mathfrak{W}$ auch drei Schwerpunkte zusammen, und die Curven A_0^{15} und C^3 haben in den neun Wendepunkten von C^3 eine dreipunktige Berührung.

Wenn statt C^3 eine Curve C^m eintritt, so haben wir zunächst die zweite Polare der Geraden g_∞ bezüglich C^m zu bestimmen. Diese ist eine Curve E_{m-1} von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Classe. Auf einer Geraden g sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt, von ihm lassen sich $m(m-1)$ Tangenten an C^m ziehen, welche g_∞ in $m(m-1)$ Punkten P_∞ schneiden, deren gerade Polaren p die Gerade g in $m(m-1)$ Punkten $\mathfrak{P}'$ schneiden. Von einem Punkt $\mathfrak{P}'$ lassen sich $m-1$ Tangenten an E_{m-1} ziehen, welche $m-1$ gerade Polaren p von Punkten P_∞ auf g_∞ sind, von denen sich im Ganzen $(m-1)^2.m$ Tangenten an C^m ziehen lassen, die g in $(m-1)^2.m$ Punkten $\mathfrak{P}$ schneiden. Da jedem Punkt $\mathfrak{P}$ $(m-1).m$ Punkte $\mathfrak{P}'$ und jedem Punkt $\mathfrak{P}'$ $(m-1)^2.m$ Punkte $\mathfrak{P}$ entsprechen, so geschieht es $(m-1)m+(m-1)^2.m = m^2(m-1)$ Mal, dass ein Punkt $\mathfrak{P}$ mit seinem entsprechenden $\mathfrak{P}'$ zusammenfällt. Also ist die Curve A_0^x der Schwerpunkte auf den Tangentensehnen von der Ordnung $m^2(m-1)$. Zu dieser Curve gehören aber auch die m Asymptoten, also ist die übrig bleibende Curve von der Ordnung $m^2(m-1)-m$ oder $m(m^2-m-1)$.

Die erhaltenen Sätze findet man im 47. Bande dieses Journals, p. 89—91; sie heissen:

25. *Der Ort der Schwerpunkte aller Tangentensehnen einer Curve C^3 ist eine Curve A_0^{15} von der 15. Ordnung, welche die drei im Unendlichen liegenden Punkte der ersteren zu fünffachen Punkten hat und die C^3 in ihnen mit einem Zweige berührt und mit vier anderen schneidet und welche endlich die C^3 in ihren neun Wendepunkten dreipunktig berührt.*

Wir fanden als Ort der Mitten der Tangentensehnen eine Curve $\mathfrak{M}^{15}$ von der 15. Ordnung. Diese schneidet die Curven A_0^{15} in 225 Punkten. Da beide Curven sich in den Wendepunkten der Basis dreipunktig berühren, so gelten diese Berührungspunkte für 27 Schnittpunkte. Ferner fallen in jedem im Unendlichen liegenden Punkt P_∞ von C^3 zwei fünffache Punkte von $\mathfrak{M}^{15}$ und A_0^{15} zusammen, so dass jeder für 25 Schnittpunkte gilt. Da aber die beiden Curven sich in jedem Punkt P_∞ mit zwei Zweigen berühren, so gilt jeder Punkt für 26 Schnittpunkte, also die drei Punkte P_∞ für 78, folglich liegen in den Wendepunkten und in den drei Punkten P_∞ 105 Schnittpunkte, und es bleiben noch 120 übrig. Daraus folgt:

In jeder ebenen Curve dritter Ordnung C^3 giebt es im Allgemeinen 120 solche Punkte, von denen jeder der Drittelspunkt einer und zugleich die Mitte einer anderen Tangentensehne ist (dieses Journal, Bd. 47, pag. 90 VII a.).

In der Ebene sei ein Curvenbüschel dritter Ordnung $B(C^3)$ mit neun Grundpunkten A gegeben. Jeder Punkt P hat in Bezug auf jede Curve des Büschels seine harmonische Polarcurve und seine innere Polare. Durch einen bestimmten Punkt Q gehen zwei von allen harmonischen Polarcurven. Denn die Gerade PQ schneidet das Büschel $B(C^3)$ in den Punktgruppen einer kubischen Involution, und diese hat mit der quadratischen Involution, deren Doppelpunkte P und Q sind, zwei Punktepaare gemein, so dass zwei Punktepaare der quadratischen Involution auf zwei Punktepaare aus zwei Gruppen der kubischen Involution fallen.

Die inneren Polaren I^2 des Pols P bilden eine Kegelschnittreihe, wir suchen ihren Index und bestimmen also, wie viel von ihnen durch einen bestimmten Punkt z. B. einen Grundpunkt A des Büschels $B(C^3)$ gehen. Wir ziehen AP und verlängern diese Strecke um sich selbst bis A_1, so geht von allen Curven des Büschels $B(C^3)$ eine einzige durch A_1; die innere Polare von P bezüglich dieser Curve ist die einzige, welche durch A geht, und daher bilden die inneren Polaren ein Kegelschnittbüschel. Ist Q ein Grundpunkt

desselben und macht man $PQ_1 = PQ$, so muss Q_1 auch ein Grundpunkt sein, und es ist P der gemeinsame Mittelpunkt aller I^2. Die vier Grundpunkte bilden die Ecken eines Parallelogramms, dessen Gegenseiten auch zwei innere Polaren sind. Die Gerade g_∞ nämlich hat für jede C^3 eine andere zweite Polare E_∞; von der ganzen Schaar $S(E_\infty)$ gehen zwei durch den Punkt P; sie gehören zu zwei Curven C^3, und die inneren Polaren von P bezüglich dieser beiden C^3 sind die Gegenseitenpaare des Parallelogramms der Grundpunkte.

Eine Gerade g schneide alle Curven des Büschels $B(C^3)$. In den Schnittpunkten ziehe man an die einzelnen Curven Tangenten t, so werden diese von einer Curve eingehüllt werden. Um ihre Classe zu bestimmen, ziehen wir von einem beliebigen Punkt P Tangenten t_1 an alle Curven C^3 und sehen, wie oft es geschieht, dass zwei Tangenten t und t_1 zusammenfallen. So oft dies vorkommt, so oft muss die conische Polare von P in Bezug auf irgend eine der Curven C^3 durch einen Schnittpunkt derselben mit g gehen. Die conischen Polaren von P bezüglich der Curven des Büschels $B(C^3)$ bilden ein Büschel und schneiden daher g in den Punktpaaren einer quadratischen Involution; von den Curven des Büschels $B(C^3)$ wird g in den Punktgruppen einer kubischen Involution geschnitten. Beide Involutionen sind projectivisch, weil das Curvenbüschel $B(C^3)$ und das Büschel der conischen Polaren projectivisch sind. Da es nun fünfmal vorkommt, dass ein Punkt der einen Involution mit einem entsprechenden der anderen zusammenfällt, so folgt, dass die Einhüllende aller Tangenten t eine Curve T^5 von der fünften Classe ist. — Unter den Curven des Büschels $B(C^3)$ giebt es vier, welche g berühren, und die conischen Polaren irgend eines Punktes P von g bezüglich dieser vier Curven gehen durch die vier Berührungspunkte, so dass in g vier Tangenten zusammenfallen und g eine vierfache Tangente der Curve T^5 ist. Von jedem Punkt P der Geraden g lässt sich nur eine Tangente an T^5 ziehen, aber auch stets eine ziehen, so dass also g ausser den vier Berührungspunkten mit T^5 keinen gemeinschaftlichen Punkt hat. Daraus schliessen wir, dass T^5 von der achten Ordnung ist.

Wenn wir die innere Polare I^2 des Punktes P in Bezug auf die Curve C^3 dieser entsprechen lassen, so bilden alle Curven C^3 und ihre inneren Polaren I^2 zwei projectivische Curvenbüschel. Die Durchschnitte entsprechender Curven liegen auf einer Curve I^5 der fünften Ordnung, welche den Pol P zum Mittelpunkt haben muss. Nach dem eben bewiesenen Satz folgern wir, wenn die Gerade g in g_∞ übergeht, dass sich von P fünf Gerade ziehen

lassen, welche Asymptoten a_s von fünf Curven C^3 sind. Es seien A_∞ ihre Berührungspunkte. — Die äusseren conischen Polaren A^2 von P bilden ein dem Büschel I^2 projectivisches Kegelschnittbüschel; homologe Kegelschnitte beider Büschel schneiden sich auf einer Curve vierter Ordnung A_0^4. Diese schneidet die Curve I^5 erstens in den vier Grundpunkten Q des Büschels I^2. Durch den Punkt P geht eine Curve C^3; die innere Polare I^2 von P bezüglich dieser C^3 ist ein Geradenpaar (II_1) mit dem Doppelpunkt P, und die äussere Polare A^2 von P berührt C^3 in P. Es gilt also P für zwei Punkte bei jeder der Curven I^5 und A_0^4, und deshalb berühren sich diese Curven in P. — Von P gehen fünf Asymptoten a_s an fünf Curven C^3; sind A_∞ die fünf Berührungspunkte, so müssen die fünf äusseren Polaren A^2 durch die fünf Punkte A_∞ gehen und die fünf inneren Polaren I^2, welche den fünf äusseren entsprechen, müssen durch dieselben fünf Punkte A_∞ gehen, weil die äussere und innere Polare eines Punktes in Bezug auf eine Curve C^3 sich in zwei Punkten von g_∞ schneiden. Die Gerade PA_∞ schneide C^3 noch in P', dann müssen die Strecken PP' und PA_∞ einander gleich sein, also muss P' mit A_∞ zusammenfallen, und die Gerade PA_∞ oder a_s ist demnach auch eine Tangente von I^5. — Von den Schnittpunkten der Curven I^5 und A_0^4 haben wir schon erhalten die vier Grundpunkte Q, die beiden Punkte, die im Berührungspunkt P vereinigt sind, und die fünf Punkte A_∞, also im Ganzen elf. Es bleiben noch neun übrig. Wir bezeichnen sie mit A_0, dann müssen PA_0 solche Tangenten an C^3 sein, welche in P gehälftet werden, und die vorher Tangentensehnen genannt wurden.

Wir fanden, dass die Mitten aller Tangentensehnen einer Curve C^3 auf einer Curve $\mathfrak{M}^{15}$ der 15. Ordnung liegen. Die zu allen Curven C^3 des Büschels $B(C^3)$ gehörigen Curven $\mathfrak{M}^{15}$ bilden eine Schaar von Curven, von denen durch jeden Punkt P neun gehen. Denn man kann durch P nur neun solche Tangentensehnen ziehen, welche in P ihre Mitte haben.

Die Berührungspunkte der Curven der beiden Büschel $B(C^3)$ und $B(I^2)$ liegen auf einer Curve K^7 der siebenten Ordnung, welche durch die Basispunkte beider Büschel geht. Sie schneidet I^5 in 35 Punkten; von diesen nehmen wir die neun Basispunkte A und vier Basispunkte Q fort, so bleiben 22 Punkte. Zu denselben gehören die fünf Punkte P_∞, und es bleiben nur noch 17; einer derselben ist P selbst, in welchem sich die drei Curven I^2, C^3 und I^5 berühren. Von den 16 übrig bleibenden sei einer B_0; in ihm berühren sich zwei Curven C^3 und I^2, und zwar müssen dieselben in den pro-

jectivischen Büscheln $B(C^3)$ und $B(I^2)$, durch welche I^5 erzeugt wird, homologe Curven sein, weil I^5 durch den Berührungspunkt geht. Deshalb muss die Curve I^2 die Curve C^3 noch in einem Punkt B_0' berühren, welcher im Kegelschnitt I^2 dem Punkt B_0 diametral gegenüber liegt. Daher giebt es acht Kegelschnitte I^2, welche acht Curven C^3 doppelt berühren. Die Tangenten in B_0 und B_0' an C^3 und I^2 müssen als Tangenten in den beiden Endpunkten eines Durchmessers von I^2 parallel sein, und es giebt daher acht Sehnen $\mathfrak{S}$ durch P, welche in P halbirt werden und in deren Endpunkten die gemeinschaftlichen Tangenten an I^2, C^3 und I^5 einander parallel sind.

Es folgen die Sätze (pag. 70, §. 21 dieses Journals):

26. *Die einem Punkt P in Bezug auf die einzelnen Curven eines Büschels $B(C^3)$ entsprechenden harmonischen Polarcurven bilden eine Curvenreihe vom Index zwei. — Alle inneren Polaren des Punktes P bezüglich der Curven des Büschels $B(C^3)$ bilden ein Kegelschnittbüschel $B(I^2)$, dessen sämmtliche Kegelschnitte P zum Mittelpunkt haben und dessen Grundpunkte die Ecken eines Parallelogramms sind.*

Werden die gegebenen Curven $B(C^3)$ von einer beliebigen Geraden g geschnitten und man denkt sich in den Schnittpunkten an dieselben Tangenten gelegt, so umhüllen diese eine Curve A_5^8 von der fünften Classe und der achten Ordnung, welche g zur vierfachen Tangente hat.

Die Endpunkte A aller Sehnen s durch die Curven $B(C^3)$ und durch einen Punkt P, welche in P halbirt sind, liegen auf einer Curve I^5 der fünften Ordnung, welche den Punkt P zum Mittelpunkt hat und die durch denselben gehenden fünf Asymptoten a_s von einzelnen der gegebenen Curven auch selbst zu Asymptoten hat.

Durch jeden Pol P gehen 14 solche Tangentensehnen, die in P ihre Mitte haben. Fünf von ihnen sind die ebengenannten Asymptoten.

Die Mitten aller Tangentensehnen einer Curve C^3 liegen auf einer Curve $\mathfrak{M}^{15}$. Für alle Curven des Büschels $B(C^3)$ bilden alle $\mathfrak{M}^{15}$ eine Schaar von Curven, von denen durch jeden Punkt neun gehen.

Durch jeden Pol gehen im Allgemeinen acht solche Sehnen, die P zur Mitte haben, in deren Endpunkten A und A_1, die auf derselben Curve C^3 liegen, die Tangenten an diese C^3 parallel sind, und diese C^3 wird in ihnen sowohl von ihrer inneren Polare I^2 als auch von der Curve I^5 berührt. Oder:

Unter den jedem Pol P entsprechenden inneren Polaren $B(I^2)$ giebt es acht, welche ihre Basis C^3 doppelt berühren.

Durch einen Punkt P lassen sich drei solche Sehnen s einer Curve C^3 dritter Ordnung ziehen, deren Mitte P ist, so dass also ebensoviel solche Systeme von je drei Sehnen s vorkommen, als Curven C^3 im Büschel $B(C^3)$. Weil die Curve I^5 alle Endpunkte dieser Sehnen s enthält, so folgt, dass in jeder durch P gezogenen Geraden g zwei solche Sehnen liegen. Es fragt sich, wenn drei Sehnen s eines Systems in drei Geraden g liegen, ob die drei Sehnen, die noch in diese Geraden g fallen, auch drei Sehnen eines Systems sind. Diese von *Steiner* (pag. 81, Bd. 47 dieses Journals) aufgeworfene Frage beantwortet sich sehr leicht, indem alle Sehnen s durch P nach den Schnittpunkten von g_∞ und den harmonischen Polarcurven von P bezüglich $B(C^3)$ gerichtet sind. Ist Q ein beliebiger Punkt und ziehen wir PQ, so schneidet diese Gerade das Büschel $B(C^3)$ in einer kubischen Punktinvolution. Die quadratische Punktinvolution, deren Doppelpunkte P und Q sind, hat zwei Punktpaare, von denen jedes auf zwei Punkte einer Gruppe der kubischen Involution fällt; also giebt es zwei harmonische Polarcurven von P bezüglich der Curven $B(C^3)$, welche durch Q gehen. Deshalb können sich auch in einem Punkt P_∞ nur zwei solche Curven schneiden, und die drei Sehnen s, welche in die drei Sehnen eines Systems fallen, können nicht auch zu einem System gehören. — Es kann gefragt werden, wie man alle Sehnen eines Systems findet, wenn eine von ihnen gegeben ist. Ist s die gegebene Sehne durch P und schneidet sie die g_∞ in P_∞, so lassen sich durch P_∞ zwei Curven aus der Schaar der harmonischen Polarcurven legen; wenn man die Schnittpunkte dieser Curven und der Geraden g_∞ mit P verbindet, so erhält man die beiden Paare von Sehnen, welche mit s zusammen je ein System von drei zusammengehörigen Sehnen bilden.

Hiermit wären im Allgemeinen die *Steiner*schen Sätze, soweit sie sich auf Curven dritter Ordnung beziehen, bewiesen. Die angewandten Beweise lassen sich mitunter auf Curven von beliebiger Ordnung ausdehnen, wie dies auch einige Male, wo es sich unmittelbar ausführen liess, geschehen ist. In den meisten Fällen werden aber die mitgetheilten Beweise für Curven beliebiger Ordnung unbrauchbar, und der Grund hiervon liegt darin, dass die harmonische Polarcurve eines Punktes in Bezug auf eine Curve von einer anderen Ordnung als der dieser Curve ist und dass nur bei einer Curve dritter Ordnung die harmonische Polarcurve von derselben Ordnung ist.

Tilsit, den 2. November 1873.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Fortsetzung der Bd. 74, 75 und 76 dieses Journals erschienenen Abhandlungen.)

(Von Herrn *L. W. Thomé.*)

1.

Ueber die homogene lineare Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0,$$

deren Coefficienten in der Umgebung eines Punktes $x = a$ einwerthige und, abgesehen von diesem Punkte, stetige analytische Functionen sind, hat der Verfasser in den Bd. 74 bis 76 dieses Journals Untersuchungen angestellt, die im Nachstehenden auf Differentialgleichungen, deren Coefficienten *p rationale* Functionen von x sind, angewendet werden.

Diejenigen Punkte im Endlichen, in welchen die Coefficienten aufhören endlich zu sein, und der Punkt $x = \infty$, wenn nach Substitution von $x = t^{-1}$ in der Differentialgleichung die Coefficienten für $t = 0$ nicht endlich bleiben, sind die singulären Punkte der Differentialgleichung.

Es sei zunächst der charakteristische Index (Abh. Bd. 75, No. 1) *bei jedem singulären Punkte im Endlichen gleich 1 und für* $x = t^{-1}$, $t = 0$ *sei derselbe* $\leqq 1$. Die Anzahl der linearunabhängigen regulären Integrale, die die Differentialgleichung in der Umgebung jedes singulären Punktes im Endlichen hat, ist höchstens $m-1$; und für $x = t^{-1}$, $t = 0$ höchstens $m-1$, wenn der charakteristische Index gleich 1 ist, und gleich m, wenn derselbe gleich Null ist. Wenn die Differentialgleichung in der Umgebung eines singulären Punktes a in der That $m-1$ linearunabhängige reguläre Integrale hat, so genügen dieselben einer homogenen linearen Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit in der Umgebung von $x = a$ einwerthigen Coefficienten, die für $x = a$ in endlicher Ordnung unendlich werden und deren charakteristischer Index gleich Null ist (Abh. Bd. 75, No. 5).

Wir wollen nun die Bedingungen dafür aufsuchen, dass die Differentialgleichung (1.) *die sämmtlichen Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung* $(m-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung mit allenthalben einwerthigen Coefficienten enthalte, die im Endlichen keine anderen singulären Punkte, als die ursprüngliche Diffe-*

rentialgleichung, besitze und deren Integrale in der Umgebung jedes singulären Punktes regulär sind.

Es kann nur *eine* solche Differentialgleichung geben, da die $m-1$ regulären Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung in der Umgebung eines singulären Punktes im Endlichen nur *einer* homogenen linearen Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung genügen, und die Coefficienten analytische Functionen sind. Alsdann muss der charakteristische Index in dieser Differentialgleichung bei jedem der singulären Punkte im Endlichen und für $x = t^{-1}$, $t = 0$ gleich Null sein. Es seien die singulären Punkte im Endlichen in der ursprünglichen Differentialgleichung a_1, a_2, ... bis $a_\varkappa$ und $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varkappa) = \varphi(x)$. Dann muss die zweite die Form haben:

$$(2.) \qquad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi(x)}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \frac{\psi_2(x)}{(\varphi(x))^2}\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} + \dots + \frac{\psi_{m-1}(x)}{(\varphi(x))^{m-1}}y = 0,$$

wo $\psi_\alpha(x)$ eine ganze rationale Function, deren Grad $\leqq \alpha(\varkappa-1)$ (vgl. die Abh. des Herrn *Fuchs*, Bd. 66, S. 139). In dieser Differentialgleichung (2.) brauchen nicht alle Punkte a_1 bis $a_\varkappa$ singulär zu sein. Und enthält die Differentialgleichung (1.) die Integrale einer Differentialgleichung der Form (2.), so enthält sie die Integrale einer Differentialgleichung von der verlangten Beschaffenheit.

Die Mittel, diese Differentialgleichung (2.) vollständig zu bestimmen, sind in der Abh. Bd. 75 dieses Journals enthalten.

Sind die m linearunabhängigen Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $F_m(y, x) = 0$ mit beliebigen Coefficienten p_α, in welcher $\frac{d^m y}{dx^m}$ den Coefficienten Eins hat, auf die Form gebracht:

$$(3.) \qquad y_1 = v_1, \quad y_2 = v_1\int v_2 dx, \quad \dots \quad y_m = v_1\int dx\, v_2 \dots \int v_m dx$$

und bildet man mit den $m-1$ ersten die Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(4.) \qquad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + l_1\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots + l_{m-1}y = F_{m-1}(y, x) = 0,$$

so ist

$$F_{m-1}(y, x) = c_m v_1 v_2 \dots v_m,$$

wo c_m eine Constante, erste Integralgleichung zu $F_m(y, x) = 0$. Setzt man $(v_1 v_2 \dots v_m)^{-1} = M$, so ist identisch

$$(5.) \qquad MF_m(y, x) = \frac{d}{dx}(MF_{m-1}(y, x)).$$

Daher

$$(6.) \qquad Mp_\mathfrak{a} = Ml_\mathfrak{a} + \frac{d}{dx}(Ml_{\mathfrak{a}-1})$$

oder

$$(7.) \qquad p_\mathfrak{a} = l_\mathfrak{a} + \frac{dl_{\mathfrak{a}-1}}{dx} + l_{\mathfrak{a}-1}\frac{d\log M}{dx}, \quad (\mathfrak{a} = 1 \ldots m), \quad l_0 = 1, \quad l_m = 0$$

und

$$(8.) \qquad \frac{d\log M}{dx} = p_1 - l_1, \quad M = e^{\int (p_1 - l_1)dx}.$$

Und umgekehrt: Ist das Gleichungssystem (6.) oder (7.) erfüllt, so wird

$$(9.) \qquad F_{m-1}(y, x) = c_m M^{-1}$$

erste Integralgleichung zu $F_m(y, x) = 0$. M genügt alsdann der Differentialgleichung, die man durch Elimination der Grössen l aus (6.) erhält:

$$(10.) \qquad \frac{d^m M}{dx^m} - \frac{d^{m-1} p_1 M}{dx^{m-1}} + \cdots + (-1)^m p_m M = 0.$$

Wenn nun die Differentialgleichung (1.) in der Umgebung des singulären Punktes $x=a$, wo der charakteristische Index gleich Eins ist, $m-1$ linearunabhängige reguläre Integrale hat, so sei die Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem charakteristischen Index gleich Null, der dieselben genügen, die Gleichung (4.). Der Coefficient l_1 wird alsdann höchstens in der ersten Ordnung für $x = a$ unendlich. Nun ist aber nach Abh. Bd. **75**, No. 5 der Coefficient von $(x-a)^{-1}$ in l_1 bekannt, nämlich $\left(\frac{p_2}{p_1}(x-a)\right)_{x=a}$. Dies war in Abh. Bd. **75**, No. 5 aus der Betrachtung der Coefficienten der algebraischen Gleichung gezogen, welche die Exponenten der $m-1$ regulären Integrale von Differentialgleichung (1.) in der Umgebung von $x = a$ bestimmt; und es ergab sich auch aus der einzigen formellen Entwickelung der Gestalt $e^{\int p_1 dx}(x-a)^r \sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}$, wo c_0 von Null verschieden, die die Differentialgleichung (10.) für $M = e^{\int (p_1 - l_1)dx}$ zulässt, wo nämlich $r = -\left(\frac{p_2}{p_1}(x-a)\right)_{x=a}$ wurde. Unmittelbar kann man dasselbe aus der zweiten Gleichung (7.) entnehmen, wenn man berücksichtigt, dass die Coefficienten p den charakteristischen Index gleich Eins, l den charakteristischen Index gleich Null haben sollen.

Soll daher die Differentialgleichung (1.) die Integrale einer Differentialgleichung der Form (2.) enthalten, so muss der ächt gebrochene rationale

Coefficient

$$(11.)\qquad \frac{\psi_1(x)}{(x-a_1)\dots(x-a_\varkappa)} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varkappa} \frac{\psi_1(a_\alpha)}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=a_\alpha}(x-a_\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varkappa} \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}(x-a_\alpha)\right)_{x=a_\alpha}}{x-a_\alpha}$$

werden. Setzt man demnach in dem Gleichungssysteme (7.)

$$(12.)\qquad \frac{d\log M}{dx} = p_1 - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varkappa} \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}(x-a_\alpha)\right)_{x=a_\alpha}}{x-a_\alpha},$$

so muss das Gleichungssystem erfüllt werden, wenn man für die Coefficienten l_α die Coefficienten aus Differentialgleichung (2.) entnimmt. Und umgekehrt: Berechnet man bei dem angegebenen Werthe von $\frac{d\log M}{dx}$ aus den $m-1$ ersten Gleichungen (7.) successive eindeutig die rationalen Functionen l_1 bis l_{m-1} und ist alsdann auch die m^{te} Gleichung (7.) erfüllt, so ist erstens die Gleichung (9.) erste Integralgleichung zu (1.) und zweitens haben die Coefficienten l_α die Form der gleichstelligen in der Differentialgleichung (2.).

Denn alsdann ist bei jedem singulären Punkte im Endlichen und für $x = t^{-1}$, $t = 0$ der charakteristische Index der Coefficienten l_α gleich Null. Bei jedem singulären Punkte a im Endlichen ist nämlich der charakteristische Index in der Differentialgleichung

$$(13.)\qquad \frac{dM}{dx} - (p_1 - l_1)M = 0$$

gleich Eins. Daher wird nach Abh. Bd. 75, No. 4 der charakteristische Index der Coefficienten l_α um Eins niedriger als der von p_α, also gleich Null. Es ist ferner der Punkt $x = t^{-1}$, $t = 0$ zu untersuchen.

Für $x = t^{-1}$ wird

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n t^{n+1} \frac{d^n(t^{n-1}y)}{dt^n},$$

und wenn man $x = t^{-1}$ in $F_m(y, x)$ einführt und

$$(14.)\qquad F_m(y, t^{-1}) = (-1)^m t^{2m} F'_m(y, t)$$

setzt, so wird

$$(15.)\qquad \begin{cases} F'_m(y,t) = \frac{d^m y}{dt^m} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \Big\{ \frac{m(m-1)\dots(m-\alpha+1)}{1.2\dots\alpha} \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-\alpha)}{t^\alpha} \\ \quad - \frac{(m-1)\dots(m-\alpha+1)}{1.2\dots(\alpha-1)} \frac{(m-2)\dots(m-\alpha)}{t^{\alpha+1}} p_1 + \dots + (-1)^\alpha \frac{p_\alpha}{t^{2\alpha}} \Big\} \frac{d^{m-\alpha}y}{dt^{m-\alpha}}. \end{cases}$$

Es werde ebenso

$$(16.) \qquad F_{m-1}(y, t^{-1}) = (-1)^{m-1} t^{2m-2} F'_{m-1}(y, t)$$

gesetzt. Alsdann folgt aus

$$M(x) F_m(y, x) = \frac{d}{dx}\big(M(x) F_{m-1}(y, x)\big),$$

$$(17.) \qquad M(t^{-1}) t^{2m-2} F'_m(y, t) = -\frac{d}{dt}\big(M(t^{-1}) t^{2m-2} F'_{m-1}(y, t)\big),$$

und wenn $M(t^{-1}).t^{2m-2}$ durch M' bezeichnet wird, so folgt aus der Differentialgleichung (13.), dass M' der Differentialgleichung

$$(18.) \qquad \frac{dM'}{dt} + \Big(\frac{p_1 - l_1}{t^2} - \frac{2(m-1)}{t}\Big) M' = 0$$

Genüge leistet.

Ist nun für $t = 0$ der charakteristische Index der Differentialgleichung $F'_m(y, t) = 0$ gleich Eins, so muss in (15.) im Coefficienten von $\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}$, nämlich $\frac{m(m-1)}{t} - \frac{p_1}{t^2}$, die Grösse $\frac{p_1}{t^2}$ in höherer als der ersten Ordnung für $t = 0$ unendlich werden. Demnach ist auch der charakteristische Index in Differentialgleichung (18.) gleich Eins. Und ist derselbe in Differentialgleichung $F'_m(y, t) = 0$ gleich Null, so auch in (18.). Daher muss nach Gleichung (17.) und Abh. Bd. 75, No. 4 der charakteristische Index in $F'_{m-1}(y, t) = 0$ für $t = 0$ gleich Null werden. Also hat die Differentialgleichung $F_{m-1}(y, x) = 0$ bei jedem singulären Punkte im Endlichen und für $x = t^{-1}$, $t = 0$ den charakteristischen Index gleich Null und demnach die Form von (2.).

Dass es immer Differentialgleichungen (1.) *giebt, welche die Integrale einer Differentialgleichung der Form* (2.) *enthalten, ersieht man daraus, dass man durch das umgekehrte Verfahren welche bilden kann.* Geht man nämlich von einer beliebigen Differentialgleichung (2.) aus, macht diese zur Gleichung $F_{m-1}(y, x) = 0$ und setzt in (7.) bei $\frac{d \log M}{dx} = p_1 - l_1$ für p_1

$$\frac{\chi(x)}{(x-a_1)^{\varepsilon_1} \ldots (x-a_\varkappa)^{\varepsilon_\varkappa}}, \qquad \varepsilon_1, \quad \ldots \quad \varepsilon_\varkappa > 1,$$

wo $\chi(x)$ eine ganze rationale Function und $\chi(a_\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} = 1 \ldots \varkappa)$ von Null verschieden ist, so wird (Abh. Bd. 75, No. 4) der charakteristische Index der Coefficienten $p_\mathfrak{a}$ bei jedem singulären Punkte a gleich Eins und für $x = t^{-1}$, $t = 0$, da der von $F'_{m-1}(y, t) = 0$ gleich Null ist, wird derselbe $\gtreqless 1$.

Die Form der Coefficienten $p_\mathfrak{a}$ ist:

$$(19.)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{\chi_1(x)}{(x-a)^{\varepsilon_1}\dots(x-a_\varkappa)^{\varepsilon_\varkappa}}, \quad \varepsilon_1, \ \dots \ \varepsilon_\varkappa > 1, \quad \varkappa \geqq 1, \\ \chi_1(a_\mathfrak{a}) \ (\mathfrak{a}=1\dots\varkappa) \text{ von Null verschieden;} \\ p_{1+\mathfrak{a}} = \dfrac{\chi_{1+\mathfrak{a}}(x)}{(x-a_1)^{\varepsilon_1+\mathfrak{a}}\dots(x-a_\varkappa)^{\varepsilon_\varkappa+\mathfrak{a}}}, \quad (\mathfrak{a}=1\dots m-1), \end{cases}$$

wo der Grad der ganzen rationalen Functionen $\chi(x)$ dadurch bestimmt wird, dass für $x=t^{-1}$, $t=0$ der charakteristische Index der Differentialgleichung (1.) $\lessgtr 1$ sein soll. Da nun nach Gleichung (15.) der charakteristische Index von $F'_m(y,t)=0$ bei $t=0$ derselbe ist, wie der des Systems $\frac{p_\mathfrak{a}}{t^{2\mathfrak{a}}}$ $(\mathfrak{a}=0\dots m, p_0=1)$, so ergiebt sich, wenn der Grad von $\chi_\mathfrak{b}(x)$ durch $k_\mathfrak{b}$ bezeichnet wird:

$k_{1+\mathfrak{a}}+2(1+\mathfrak{a})-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_\varkappa+\varkappa\mathfrak{a})+m-1-\mathfrak{a} \lessgtr k_1+2-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_\varkappa)+m-1$ $(\mathfrak{a}=1\dots m-1)$, wenn letzterer Werth $>m$ ist; sonst muss der erstere $\lessgtr m$ sein. Also

$$(20.)\quad \begin{cases} k_{1+\mathfrak{a}} \lessgtr k_1+\mathfrak{a}(\varkappa-1), \quad \text{wenn} \quad k_1 \geqq \varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_\varkappa, \\ \text{und} \\ k_{1+\mathfrak{a}} < \varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_\varkappa+\mathfrak{a}(\varkappa-1), \quad \text{wenn} \quad k_1 < \varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_\varkappa. \\ \qquad\qquad (\mathfrak{a}=1\dots m-1). \end{cases}$$

Haben also die Coefficienten der Differentialgleichung (1.) *die Form, die durch* (19.), (20.) *angegeben ist, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass diese Differentialgleichung die Integrale einer Differentialgleichung der Form* (2.) *enthalte, die, dass, wenn man in dem Gleichungssysteme* (7.)

$$\frac{d\log M}{dx} = p_1 - \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa} \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}(x-a_\mathfrak{a})\right)_{x=a_\mathfrak{a}}}{x-a_\mathfrak{a}},$$

setzt, und aus den $m-1$ *ersten Gleichungen die Grössen* l_1 *bis* l_{m-1} *successive eindeutig berechnet, die letzte der Gleichungen* (7.) *von selbst erfüllt sei.*

Und alsdann ist Gleichung (9.) *erste Integralgleichung zu* (1.) *und giebt für* $c_m=0$ *die Differentialgleichung* (2.).

Wenn die Differentialgleichung (1.) in der Umgebung des Punktes $x=a$, $m-1$ linearunabhängige reguläre Integrale hat, die der Differentialgleichung (4.) genügen, so ist nach Abh. Bd. 75, No. 5 in $l_\mathfrak{a}$ der Coefficient von $(x-a)^{-\mathfrak{a}}$ bekannt, nämlich $\left(\frac{p_{1+\mathfrak{a}}}{p_1}(x-a)^\mathfrak{a}\right)_{x=a}$. Dieser ergiebt sich auch

unmittelbar aus System (7.)

$$p_a = l_a + \frac{dl_{a-1}}{dx} + l_{a-1}\frac{d\log M}{dx}, \quad \frac{d\log M}{dx} = p_1 - l_1,$$

wenn die Coefficienten p den charakteristischen Index gleich Eins, die l denselben gleich Null haben sollen. Daher ist in Differentialgleichung (2.)

$$(21.) \qquad \frac{\psi_a(a_b)}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^a_{x=a_b}} = \left(\frac{p_{1+a}}{p_1}(x-a_b)^a\right)_{x=a_b}, \quad \begin{pmatrix} a = 1 \ldots m-1 \\ b = 1 \ldots z \end{pmatrix}.$$

Berechnet man demnach aus (7.) die Grössen l_a successive, so wird man bei der jedesmal berechneten zusehen, ob sie von der Form des gleichstelligen Coefficienten in (2.) ist und ob die Werthe von $\psi_a(a_b)$ mit den in (21.) angegebenen übereinstimmen. Denn ist dieses nicht der Fall, so braucht die Rechnung nicht weiter fortgesetzt zu werden, da alsdann nach dem Vorhergehenden das Gleichungssystem (7.) nicht bei dem oben angegebenen Werthe von $\frac{d\log M}{dx}$ erfüllbar ist. Immer also ergiebt eine directe Rechnung, ob Differentialgleichung (1.) die Integrale einer Differentialgleichung der Form (2.) enthält und welche die letztere ist.

2.

Wir wollen jetzt die Untersuchungen der vorigen Nummer auf den Fall ausdehnen, wo der charakteristische Index allgemein gleich $h > 0$ ist.

Es seien also die Coefficienten in der Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0$$

rationale Functionen von x. Ferner seien die singulären Punkte im Endlichen a_1 bis a_z *und bei allen sei der charakteristische Index ein und derselbe gleich* $h > 0$, *und der charakteristische Index für* $x = t^{-1}$, $t = 0$ *sei* $\leqq h$.

Die Differentialgleichung (1.) hat in der Umgebung eines singulären Punktes $x = a$ höchstens $m - h$ linearunabhängige reguläre Integrale, die, wenn sie vorhanden sind, einer homogenen linearen Differentialgleichung $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem charakteristischen Index gleich Null genügen. Und ebenso hat für $x = t^{-1}$, $t = 0$ die Differentialgleichung höchstens so viele linearunabhängige reguläre Integrale, als die Ordnung weniger dem charakteristischen Index beträgt.

Es sollen nun im Folgenden die Bedingungen aufgesucht werden, dass die Differentialgleichung (1.) *sämmtliche Integrale einer homogenen linearen*

Differentialgleichung $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung mit allenthalben einwerthigen Coefficienten enthalte, die keine anderen singulären Punkte im Endlichen besitzt, als die ursprüngliche, und deren Integrale sämmtlich regulär sind.

Es kann nur *eine* solche Differentialgleichung geben, was, wie in No. 1 bewiesen wird, und dieselbe muss, da der charakteristische Index bei den singulären Punkten gleich Null ist, die Form haben:

$$(2.)\qquad \frac{d^{m-h}y}{dx^{m-h}}+\frac{\psi_1(x)}{\varphi(x)}\frac{d^{m-h-1}y}{dx^{m-h-1}}+\frac{\psi_2(x)}{(\varphi(x))^2}\frac{d^{m-h-2}y}{dx^{m-h-2}}+\cdots+\frac{\psi_{m-h}(x)}{(\varphi(x))^{m-h}}y=0,$$

wo $\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varkappa)$, und $\psi_\mathfrak{a}(x)$ eine ganze rationale Function, deren Grad $\leqq \mathfrak{a}(\varkappa-1)$ ist. In dieser Differentialgleichung (2.) brauchen nicht alle Punkte a_1 bis $a_\varkappa$ singulär zu sein. Und enthält die Differentialgleichung (1.) die Integrale einer Differentialgleichung der Form (2.), so enthält sie die Integrale einer Differentialgleichung der verlangten Art.

Die ächt gebrochenen rationalen Coefficienten der Differentialgleichung (2.) sind bestimmt, sobald man bei jedem singulären Punkte a im Endlichen in der Entwickelung der Coefficienten nach Potenzen von $x-a$ die Glieder mit negativen Exponenten kennt. Diese kann man aber ermitteln. Hierzu dienen folgende allgemeinere Untersuchungen, denen die No. 1, 2 und 3 der Abh. Bd. 76 dieses Journals zu Grunde liegen.

Die m linearunabhängigen Integrale der Differentialgleichung

$$(3.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y=F_m(y,x)=0$$

mit beliebigen Coefficienten seien auf die Form

$$(4.)\qquad y_1=\mu_1,\quad y_2=\mu_1\int\mu_1^{-1}\mu_2\,dx,\quad \ldots\quad y_m=\mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\ldots\int\mu_{m-1}^{-1}\mu_m\,dx$$

gebracht; und die Integrale y_1 bis $y_{m-\mathfrak{a}}$ sollen der Differentialgleichung

$$(5.)\qquad \frac{d^{m-\mathfrak{a}}y}{dx^{m-\mathfrak{a}}}+p_1^{(\mathfrak{a})}\frac{d^{m-\mathfrak{a}-1}y}{dx^{m-\mathfrak{a}-1}}+\cdots+p_{m-\mathfrak{a}}^{(\mathfrak{a})}y=F_{m-\mathfrak{a}}(y,x)=0$$

genügen. Alsdann ist identisch

$$(6.)\qquad \mu_{m-\mathfrak{a}}^{-1}F_{m-\mathfrak{a}}(y,x)=\frac{d}{dx}\mu_{m-\mathfrak{a}}^{-1}F_{m-\mathfrak{a}-1}(y,x),\quad (\mathfrak{a}=0\ldots m-1).$$

Daher geht die Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ durch successive Reduction mittels der k aufeinander folgenden integrirenden Factoren μ_m^{-1} bis μ_{m-k+1}^{-1} über in

$$(7.)\quad \begin{cases} F_{m-k}(y,x) = c_{m-k+1}\mu_{m-k+1} + c_{m-k+2}\mu_{m-k+1}\int\mu_{m-k+1}^{-1}\mu_{m-k+2}\,dx + \cdots \\ \qquad \cdots + c_m\mu_{m-k+1}\int dx\,\mu_{m-k+1}^{-1}\mu_{m-k+2}\cdots\int\mu_{m-1}^{-1}\mu_m\,dx, \end{cases}$$

wo die c Constanten sind. Die rechte Seite dieser Gleichung ist das vollständige Integral einer Differentialgleichung k^{ter} Ordnung:

$$(8.)\quad \frac{d^k s}{dx^k} + g_1\frac{d^{k-1}s}{dx^{k-1}} + \cdots + g_k s = 0.$$

Reducirt man andererseits die Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ $(m-k)$ mal mittels der Integrale von $F_{m-k}(y,x)=0$ durch successive Anwendung der Subsitutionen $y=\mu_1\int\mu_1^{-1}z\,dx$, $z=\mu_2\int\mu_2^{-1}u\,dx$, etc., so erhält man die Differentialgleichung (8.). Die Coefficienten g dieser Differentialgleichung sind unabhängig von der Wahl der Integrale von $F_{m-k}(y,x)=0$, welche zur Reduction verwandt worden sind. (Abh. Bd. 76, No. 2, wenn $F_m(y,x)$ auf die Form $\frac{d^m y}{dx^m} - \frac{d^{m-1}r_1 y}{dx^{m-1}} + \cdots + (-1)^m r_m y$ gebracht wird). Letzteres ersieht man schon einfach aus Gleichung (7.), indem die Reduction dieser Differentialgleichung mittels derjenigen integrirenden Factoren weiter fortgesetzt werden kann, die man aus einem beliebigen Systeme von Integralen der Differentialgleichung $F_{m-k}(y,x)=0$ unter der Form (4.) entnimmt.

Wenn nun die Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ die Integrale der Differentialgleichung $F_{m-k}(y,x)=0$ enthält und durch Gleichung (7.) ersetzt ist, so besteht zwischen den Coefficienten p, $p^{(k)}$ und g folgender Zusammenhang (Abh. Bd. 76, Gleichungen (10.) und (14.)):

Es werde der Ausdruck

$$(9.)\quad z_\mathfrak{a} + r\frac{dz_{\mathfrak{a}-1}}{dx} + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{d^2 z_{\mathfrak{a}-2}}{dx^2} + \cdots + \frac{d^r z_{\mathfrak{a}-r}}{dx^r} = \left(1+\frac{dz_\mathfrak{a}}{dx}\right)_r$$

gesetzt, so ist

$$(10.)\quad p_\mathfrak{a} = \sum_0^k{}_\mathfrak{b}\left(1+\frac{d}{dx}p^{(k)}_{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}\right)_{k-\mathfrak{b}} g_\mathfrak{b}, \quad (\mathfrak{a}=1,\ldots m),$$

wo

$$g_0 = p_0^{(k)} = 1, \quad p_{-1}^{(k)} = \cdots = p_{-k+1}^{(k)} = p_{m-k+1}^{(k)} = \cdots = p_m^{(k)} = 0$$

zu nehmen ist.

Die Grössen g gehen aus den k ersten Gleichungen dieses Systemes eindeutig als ganze rationale Functionen der Grössen p und $p^{(k)}$ und deren Differentialquotienten hervor; ebenso die Grössen $p^{(k)}$ aus den $m-k$ ersten Gleichungen als ganze rationale Functionen der Grössen p und g und deren

Differentialquotienten. Und umgekehrt (Abh. Bd. 76, Schluss von No. 2): Bestehen die Gleichungen (10.) und bildet man mit den Grössen $p^{(k)}$ und g die Gleichung (7.) und differentiirt dieselbe k mal, nachdem jedesmal vorher durch die Grösse μ, welche nicht unter dem Integralzeichen steht, dividirt worden ist, so erhält man eine Differentialgleichung der Form (3.), deren Coefficienten p durch die Gleichungen (10.) gegeben werden.

Es seien jetzt die Coefficienten p von Differentialgleichung (3.) $F_m(y,x)=0$ in der Umgebung eines Punktes $x=a$ einwerthige analytische Functionen, die für $x=a$ in endlicher Ordnung unendlich werden, und der charakteristische Index gleich h. Wenn dann diese Differentialgleichung die Integrale einer Differentialgleichung $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{m-h}(y,x)=0$, deren charakteristischer Index bei $x=a$ gleich Null ist, enthält, so bestehen zwischen p, $p^{(h)}$ und g die Gleichungen (10.) für $k=h$, und der charakteristische Index in der Differentialgleichung (8.) für $k=h$ ist gleich h (Abh. Bd. 76. No. 3; da der charakteristische Index der Coefficienten p in (10.) immer gleich der Summe derer der Coefficienten $p^{(k)}$ und der Coefficienten g ist). Und umgekehrt: Kann man p_a den Gleichungen (10.) gemäss für $k=h$ zerlegen, so dass die Coefficienten $p^{(h)}$ bei $x=a$ den charakteristischen Index gleich Null, die g denselben gleich h erhalten, so wird die Differentialgleichung (3.) durch (7.) für $k=h$ ersetzt, und enthält die Integrale der Differentialgleichung $F_{m-h}(y,x)=0$, deren charakteristischer Index bei $x=a$ gleich Null ist (Abh. Bd. 76, No. 3; vgl. auch No. 5 daselbst).

Um nun zur Bestimmung der Coefficienten in der Differentialgleichung (2.) zu gelangen, sind bei jedem singulären Punkte a im Endlichen in der Entwickelung der ächt gebrochenen rationalen Functionen $p^{(h)}$ nach Potenzen von $x-a$ die Glieder mit negativen Exponenten zu ermitteln. Die Coefficienten $p^{(h)}$ der Gleichung $F_{m-h}(y,x)=0$, die die $m-h$ linearunabhängigen regulären Integrale enthalten soll, werden in der Umgebung von $x=a$ schon dadurch bestimmt, dass man die formellen Entwickelungen der regulären Integrale von Differentialgleichuug (1.) nach Abh. Bd. 74, No. 8 bilden kann. Statt dessen kann man aber das System der Gleichungen (10.) direct behandeln.

Es ist nämlich die Zerlegung der Coefficienten p, die bei $x=a$ den charakteristischen Index gleich $h>0$ haben, den Gleichungen (10.) für $k=h$ gemäss, so dass die Coefficienten $p^{(h)}$ bei $x=a$ den charakteristischen Index gleich Null, die Coefficienten g denselben gleich h haben, immer formell und zwar nur auf eine Weise möglich.

Um dies zu zeigen, werden die Gleichungen (10.) für $k=h$ ausführlicher hingeschrieben:

$$(11.)\quad \begin{cases} p_1 = p_1^{(h)} + g_1, \\ p_2 = \left(1+\frac{dp_2^{(h)}}{dx}\right)_h + p_1^{(h)} g_1 + g_2, \\ \vdots \\ p_h = \left(1+\frac{dp_h^{(h)}}{dx}\right)_h + \left(1+\frac{dp_{h-1}^{(h)}}{dx}\right)_{h-1} g_1 + \cdots + p_1^{(h)} g_{h-1} + g_h, \\ p_{h+1} = \left(1+\frac{dp_{h+1}^{(h)}}{dx}\right)_h + \left(1+\frac{dp_h^{(h)}}{dx}\right)_{h-1} g_1 + \cdots + p_1^{(h)} g_h, \\ p_{h+2} = \left(1+\frac{dp_{h+2}^{(h)}}{dx}\right)_h + \left(1+\frac{dp_{h+1}^{(h)}}{dx}\right)_{h-1} g_1 + \cdots + p_2^{(h)} g_h, \\ \vdots \\ p_m = \left(1+\frac{dp_m^{(h)}}{dx}\right)_h + \left(1+\frac{dp_{m-1}^{(h)}}{dx}\right)_{h-1} g_1 + \cdots + p_{m-h}^{(h)} g_h, \end{cases}$$

wo $p_0^{(h)}=1$, $p_{-1}^{(h)}=\cdots=p_{-h+1}^{(h)}=p_{m-h+1}^{(h)}=\cdots=p_m^{(h)}=0$ ist.

Dieses Gleichungssystem zerfällt in zwei Gruppen; zu der ersten gehören die h ersten Gleichungen, zu der zweiten die übrigen. Wenn nun der charakteristische Index der Coefficienten $p_\mathfrak{a}^{(h)}$ ($\mathfrak{a}=0\ldots m-h, p_0^{(h)}=1$) bei $x=a$ gleich Null sein soll, so fängt $p_\mathfrak{a}^{(h)}$ höchstens mit der Potenz $(x-a)^{-\mathfrak{a}}$ an. Die Ordnungszahlen, in denen $p_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}=0\ldots m, p_0=1$) für $x=a$ unendlich werden, seien $\pi_\mathfrak{a}$ (wo $\pi_\mathfrak{a}$ gleich Null, wenn $p_\mathfrak{a}$ für $x=a$ nicht unendlich wird) und diejenigen, in denen $g_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}=0\ldots h, g_0=1$) unendlich werden, seien $\gamma_\mathfrak{a}$; und die grösste der positiven ganzen Zahlen $\pi_0+\mathfrak{a}$, $\pi_1+\mathfrak{a}-1$, … $\pi_\mathfrak{a}$ sei durch $\Pi_\mathfrak{a}$ bezeichnet. Dann folgt aus der ersten Gleichung, dass γ_1 höchstens gleich Π_1, aus der zweiten, dass γ_2 höchstens gleich Π_2 u. s. w., bis aus der $(h-1)^{\text{ten}}$, dass γ_{h-1} höchstens gleich Π_{h-1} sein kann. Aus der h^{ten} Gleichung ergiebt sich darauf, wenn man die Differenz $\pi_h-(\Pi_{h-1}+1)$ durch ν bezeichnet, wo $\nu \geqq 1$ ist, weil h charakteristischer Index von $p_\mathfrak{a}$, dass in g_h die Anfangspotenz $(x-a)^{-\pi_h}$ ist, und dass diese und die $\nu-1$ folgenden in den Coefficienten mit denen in p_h übereinstimmen, so dass $\gamma_h=\pi_h$ und

$$(g_h(x-a)^{\gamma_h})_{x=a} = (p_h(x-a)^{\pi_h})_{x=a}.$$

Betrachtet man jetzt die zweite Gruppe, so bestimmt die $\mathfrak{a}^{\text{te}}$ Gleichung durch das letzte Glied eindeutig in $p_\mathfrak{a}^{(h)}$ den Coefficienten von $(x-a)^{-\mathfrak{a}}$, nämlich $\left(\frac{p_{h+\mathfrak{a}}}{p_h}(x-a)^{\mathfrak{a}}\right)_{x=a}$, und die Coefficienten der $\nu-1$ folgenden Potenzen. In den Entwickelungen von g_h und den Coefficienten $p_\mathfrak{a}^{(h)}$ ($\mathfrak{a}=1\ldots m-h$) kennt man also

die ν Anfangspotenzen. Setzt man nun die letzteren in die $h-1$ ersten Gleichungen der ersten Gruppe ein, so bestimmt man successive für $\mathfrak{a}=1\ldots h-1$ in $g_\mathfrak{a}$ den Coefficienten von $(x-a)^{-II_\mathfrak{a}}$ und die der $\nu-1$ folgenden Potenzen (welche Coefficienten auch theilweise oder alle gleich Null sein können), so dass man auch in $g_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots h-1)$ die ν Anfangspotenzen kennt. Dann liefert die h^{te} Gleichung der ersten Gruppe weitere ν Potenzen in g_h, so dass man in g_h jetzt die 2ν ersten Potenzen kennt. In der zweiten Gruppe bestimmt dann die $\mathfrak{a}^{\text{te}}$ Gleichung durch das letzte Glied, wenn man in der Gleichung für $p_\mathfrak{b}^{(h)}$ $(\mathfrak{b}=1\ldots m-h)$ und g_1 bis g_{h-1} die ν, für g_h die 2ν Anfangspotenzen setzt, weitere ν Potenzen in $p_\mathfrak{a}^{(h)}$; so dass man in $p_\mathfrak{a}^{(h)}$ die 2ν ersten Potenzen kennt. Aus den $h-1$ ersten Gleichungen der ersten Gruppe werden dann successive in $g_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots h-1)$ weitere ν Potenzen ermittelt, so dass man auch bei diesen die 2ν ersten Potenzen erhält; alsdann aus der h^{ten} Gleichung die weiteren ν Potenzen in g_h, so dass man in g_h jetzt die 3ν ersten Potenzen kennt, und dieses Verfahren kann in eindeutiger Weise beliebig fortgesetzt werden.

Soll nun die Differentialgleichung (1.) die Integrale einer Differentialgleichung der Form (2.) enthalten, die man zur Gleichung $F_{m-h}(y,x)=0$ nimmt, so kann man aus dem Gleichungssystem (11.) durch das eben auseinandergesetzte Verfahren bei jedem singulären Punkte a im Endlichen zunächst in der Entwickelung des Coefficienten $p_\mathfrak{a}^{(h)}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots h)$ nach Potenzen von $x-a$ die Potenzen mit negativen Exponenten bestimmen, die höchstens bis $(x-a)^{-\mathfrak{a}}$ ansteigen (ist die oben durch ν bezeichnete Zahl $\geqq h$, so erhält man diese Potenzen unmittelbar aus der zweiten Gruppe der Gleichungen (11.)). Addirt man dann zur Ermittelung von $p_\mathfrak{a}^{(h)}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots h)$ die bei den singulären Punkten a_1 bis $a_\varkappa$ erhaltenen Ausdrücke, so giebt die Summe, da $p_\mathfrak{a}^{(h)}$ ächt gebrochen ist, diesen Coefficienten. Dann liefert die erste Gruppe der Gleichungen (11.) successive die Grössen g_1 bis g_h. Hierauf bestimmen, wofern $m-h>h$, die $(m-h)-h$ ersten Gleichungen der zweiten Gruppe (11.) successive eindeutig die Coefficienten $p_{h+1}^{(h)}$ bis $p_{m-h}^{(h)}$, und alsdann ist nothwendig, dass die übrigen Gleichungen der zweiten Gruppe von selbst erfüllt sind.

Und umgekehrt: Man berechne auf die vorhin angegebene Weise die Coefficienten $p_1^{(h)}$ bis $p_h^{(h)}$. Haben dieselben die Form der gleichstelligen Coefficienten in Differentialgleichung (2.), berechnet man dann aus der ersten Gruppe der Gleichungen (11.) die Coefficienten $g_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots h)$ und, wenn $m-h>h$, aus den $(m-h)-h$ ersten Gleichungen der zweiten Gruppe die Coefficienten $p_{h+1}^{(h)}$ bis $p_{m-h}^{(h)}$, und sind alsdann auch die übrigen Gleichungen (11.)

erfüllt, so wird die Differentialgleichung (1.) durch die Gleichung (7.) ersetzt für $k=h$, und die Coefficienten $p_{\mathfrak{a}}^{(h)}$ in $F_{m-h}(y, x)=0$ haben alle die Form der gleichstelligen Coefficienten in Differentialgleichung (2.). Denn alsdann ist bei jedem singulären Punkte a im Endlichen und für $x=t^{-1}$, $t=0$ der charakteristische Index der Coefficienten $p_{\mathfrak{a}}^{(h)}$ gleich Null.

Da nämlich die Coefficienten $p_1^{(h)}$ bis $p_h^{(h)}$ so bestimmt sind, dass $p_{\mathfrak{a}}^{(h)}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots h)$ in der Entwickelung nach Potenzen von $x-a$ höchstens mit $(x-a)^{-\mathfrak{a}}$ anfängt, so zeigen die oben über das System (11.) gemachten Betrachtungen, dass $g_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots h-1)$ höchstens mit $(x-a)^{-H_{\mathfrak{a}}}$ anfangen kann, und dass der charakteristische Index bei den Coefficienten $g_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=0\ldots h, g_0=1)$ und dem singulären Punkte a gleich h sein muss. Da aber die Coefficienten p_a denselben charakteristischen Index h haben, so muss der der Coefficienten $p_{\mathfrak{a}}^{(h)}$ $(\mathfrak{a}=0\ldots m-h, p_0^{(h)}=1)$ bei dem singulären Punkte a gleich Null sein (Abh. Bd. 76, No. 3). Man betrachte ferner den Punkt $x=t^{-1}$, $t=0$.

Wird die Differentialgleichung (1.) durch Gleichung (7.) für $k=h$ ersetzt, und setzt man in Differentialgleichung (8.) $s=F_{m-h}(y, x)$, so hat diese Differentialgleichung dieselben Integrale, wie (1.). Führt man nun die Bezeichnung

$$(12.)\qquad \frac{d^h s}{dx^h}+g_1\frac{d^{h-1}s}{dx^{h-1}}+\cdots+g_h s = f_h(s, x),$$

ein, so wird identisch

$$(13.)\qquad F_m(y, x) = f_h(F_{m-h}(y, x), x).$$

Setzt man ferner

$$(14.)\qquad F_m(y, t^{-1}) = (-1)^m t^{2m} F'_m(y, t),$$

wo $F'_m(y, t)$ durch Gleichung (15.) in No. 1 gegeben ist, und ebenso

$$(14^a.)\qquad \begin{cases} F_{m-h}(y, t^{-1}) = (-1)^{m-h} t^{2(m-h)} F'_{m-h}(y, t), \\ f_h(s, t^{-1}) = (-1)^h t^{2h} f'_h(s, t), \end{cases}$$

so erhält man aus (13.)

$$(15.)\qquad F'_m(y, t) = t^{-2(m-h)} f'_h\left(t^{2(m-h)} F'_{m-h}(y, t), t\right) = f''_h\left(F''_{m-h}(y, t), t\right),$$

wenn

$$t^{-2(m-h)} f'_h(t^{2(m-h)} u, t) = f''_h(u, t)$$

gesetzt wird.

Nun ist aber der charakteristische Index von $f''_h(u, t)=0$ bei $t=0$ derselbe, wie von $f'_h(s, t)=0$ und letzterer ist, wie man aus Gleichung (15.) in No. 1 ersieht, derselbe, wie in dem System $\frac{g_{\mathfrak{a}}}{t^{2\mathfrak{a}}}$ $(\mathfrak{a}=0\ldots h, g_0=1)$. Was

aber dieses System betrifft, so ist der charakteristische Index desselben aus der ersten Gruppe der Gleichungen (11.) zu erkennen, wenn man berücksichtigt, dass die Coefficienten $p_1^{(h)}$ bis $p_h^{(h)}$ die Form der gleichstelligen Coefficienten in Gleichung (2.) haben sollen, und daher $\frac{p_\mathfrak{a}^{(h)}}{t^{2\mathfrak{a}}}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots h)$ höchstens in der $\mathfrak{a}^{\text{ten}}$ Potenz für $t=0$ unendlich wird. Bildet man nämlich die Gleichung:

$$(16.)\qquad \frac{p_\mathfrak{a}}{t^{2\mathfrak{a}}} = \sum_0^\mathfrak{a}{}_\mathfrak{b}\Big(1+\frac{d}{dx}p_{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}^{(h)}\Big)_{h-\mathfrak{b}}\frac{1}{t^{2(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}}\frac{g_\mathfrak{b}}{t^{2\mathfrak{b}}},\quad x=t^{-1},\quad (\mathfrak{a}=1\ldots h)$$

so wird in dieser der Ausdruck

$$\Big(1+\frac{d}{dx}p_{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}^{(h)}\Big)_{h-\mathfrak{b}}\frac{1}{t^{2(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}},\quad x=t^{-1}$$

höchstens in $(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^{\text{ter}}$ Ordnung für $t=0$ unendlich. Daher muss der charakteristische Index, den das System $\frac{g_\mathfrak{a}}{t^{2\mathfrak{a}}}$ $(\mathfrak{a}=0\ldots h, g_0=1)$ hat, derselbe sein in dem System $\frac{p_\mathfrak{a}}{t^{2\mathfrak{a}}}$ $(\mathfrak{a}=0\ldots h, p_0=1)$. Dieser ist aber derselbe, wie in dem System $\frac{p_\mathfrak{a}}{t^{2\mathfrak{a}}}$ $(\mathfrak{a}=0\ldots m, p_0=1)$, da der des Letzteren der Voraussetzung nach $\leqq h$ ist, und dieser ist derjenige in der Differentialgleichung $F_m'(y,t)=0$ für $t=0$. Also ist der charakteristische Index in der Differentialgleichung $f_h''(u,t)=0$ für $t=0$ derselbe wie in $F_m'(y,t)=0$. Nun besteht nach Gleichung (15.), die der Gleichung (7.) entspricht, zwischen den Coefficienten p' von $F_m'(y,t)=0$, $p^{(h)'}$ von $F_{m-h}'(y,t)=0$ und g'' von $f_h''(u,t)=0$ der Zusammenhang, der durch die Gleichungen (10.) für $k=h$ ausgedrückt wird, wenn man für p, $p^{(h)}$ und g die entsprechenden Grössen einsetzt. Und daher muss nach Abh. Bd. 76, No. 3, da der charakteristische Index der Coefficienten p' und g'' derselbe ist, der der Coefficienten $p^{(h)'}$ gleich Null sein.

Es ist demnach nachgewiesen, dass der charakteristische Index in der Differentialgleichung $F_{m-h}(y,x)=0$ bei jedem singulären Punkte im Endlichen und für $x=t^{-1}$, $t=0$ gleich Null ist, und dass daher alle Coefficienten $p_\mathfrak{a}^{(h)}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots m-h)$ dieser Differentialgleichung die Form der gleichstelligen in Differentialgleichung (2.) haben.

Dass es immer solche Differentialgleichungen (1.) *giebt, welche die Integrale einer Differentialgleichung der Form* (2.) *enthalten*, weist man durch das umgekehrte Verfahren nach. Geht man nämlich von einer beliebigen Differentialgleichung (2.) aus, macht diese zur Gleichung $F_{m-h}(y,x)=0$ und nimmt in Gleichung (8.) für $k=h$ die Coefficienten g so, dass sie nur die

Punkte a_1 bis $a_\varkappa$ zu singulären Punkten im Endlichen haben, und bei diesen den charakteristischen Index überall gleich h, also

$$g_\mathfrak{a} = \frac{\omega_\mathfrak{a}(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-(h-\mathfrak{a}+1)}\dots(x-a_\varkappa)^{\alpha_\varkappa-(h-\mathfrak{a}+1)}}, \quad (\mathfrak{a}=1\dots h-1),$$

$$g_h = \frac{\omega_h(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_\varkappa)^{\alpha_\varkappa}}, \quad \alpha_1\dots\alpha_\varkappa > h,$$

wo die $\omega(x)$ ganze rationale Functionen und $\omega_h(a_1)$, ... $\omega_h(a_\varkappa)$ von Null verschieden, setzt diese Werthe von $p^{(h)}$ und g in System (11.) ein, und bestimmt dadurch die Coefficienten p, so ersetzt die Differentialgleichung $F_m(y, x)$ die Gleichung (7.), und der charakteristische Index der Coefficienten p muss bei jedem singulären Punkte a im Endlichen nach Abh. Bd. 76, No. 3 gleich h werden, und für $x = t^{-1}$, $t = 0$, da der von $F'_{m-h}(y, t) = 0$ gleich Null ist, nach dem Vorhergehenden $\leqq h$.

Die Form der Coefficienten p in Differentialgleichung (1.) ist:

$$(17.)\quad \begin{cases} p_\mathfrak{a} = \dfrac{\chi_\mathfrak{a}(x)}{(x-a_1)^{\varepsilon_1-(h-\mathfrak{a}+1)}\dots(x-a_\varkappa)^{\varepsilon_\varkappa-(h-\mathfrak{a}+1)}}, & (\mathfrak{a}=1\dots h-1), \\ p_h = \dfrac{\chi_h(x)}{(x-a_1)^{\varepsilon_1}\dots(x-a_\varkappa)^{\varepsilon_\varkappa}}, & \varepsilon_1, \dots \varepsilon_\varkappa > h, \quad \varkappa \geqq 1, \\ \chi_h(a_\mathfrak{a}) \ (\mathfrak{a}=1\dots\varkappa) \text{ von Null verschieden}, & \\ p_{h+\mathfrak{a}} = \dfrac{\chi_{h+\mathfrak{a}}(x)}{(x-a_1)^{\varepsilon_1+\mathfrak{a}}\dots(x-a_\varkappa)^{\varepsilon_\varkappa+\mathfrak{a}}}, & (\mathfrak{a}=1\dots m-h), \end{cases}$$

wo die Functionen $\chi(x)$ ganze rationale Functionen sind, deren Grad so beschaffen sein muss, dass für $x = t^{-1}$, $t = 0$ die Differentialgleichung (1.) den charakteristischen Index $\leqq h$ hat. Der charakteristische Index in $F'_m(y, t) = 0$ für $t = 0$ ist aber derselbe wie in $\frac{p_\mathfrak{a}}{t^{2\mathfrak{a}}}$ $(\mathfrak{a}=0\dots m, p_0=1)$. Daraus ergiebt sich, wenn der Grad von $\chi_\mathfrak{b}(x)$ durch $k_\mathfrak{b}$ bezeichnet wird, dass in der Reihe der $m+1$ Zahlen

$$\begin{gathered} m, \quad k_\mathfrak{a}+2\mathfrak{a}-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_\varkappa-\varkappa(h-\mathfrak{a}+1))+m-\mathfrak{a}, \quad (\mathfrak{a}=1\dots h-1), \\ k_h+2h-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_\varkappa)+m-h, \quad k_{h+\mathfrak{a}}+2(h+\mathfrak{a})-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_\varkappa+\varkappa\mathfrak{a})+m-h-\mathfrak{a}, \\ (\mathfrak{a}=1\dots m-h) \end{gathered}$$

die grösste positive auch unter den $h+1$ ersten sein muss; oder was dasselbe ist, in der Reihe der $m+1$ Zahlen

$$(18.)\quad \begin{cases} \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_\varkappa-h, & k_\mathfrak{a}+(\varkappa-1)(h-\mathfrak{a})+\varkappa, \quad k_h, \quad k_{h+\mathfrak{a}}-(\varkappa-1)\mathfrak{a}, \\ & (\mathfrak{a}=1\dots h-1), \qquad\qquad (\mathfrak{a}=1\dots m-h), \end{cases}$$

muss die grösste positive auch unter den $h+1$ ersten sich finden.

Wenn also die Coefficienten der Differentialgleichung (1.) *die durch* (17.), (18.) *angegebene Form haben, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass diese Differentialgleichung die Integrale einer Differentialgleichung der Form* (2.) *enthalte, folgende:*

Aus dem Gleichungssysteme (11.) *werden durch das für dieses System angegebene Verfahren bei jedem singulären Punkte a im Endlichen in der Entwickelung des Coefficienten* $p_{\mathfrak{a}}^{(h)}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots h)$ *nach Potenzen von* $(x-a)$ *die Glieder mit negativen Exponenten bestimmt, die höchstens bis* $(x-a)^{-\mathfrak{a}}$ *ansteigen, und die Ausdrücke, die bei den verschiedenen singulären Punkten* a_1 *bis* a_z *erhalten worden sind, addirt, wodurch man die ächt gebrochene Function* $p_{\mathfrak{a}}^{(h)}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots h)$ *aufgestellt hat. Von dieser Function ist zunächst nothwendig, dass sie die Form des gleichstelligen Coefficienten in Differentialgleichung* (2.) *annimmt. Ist dieses der Fall, so werden aus den h ersten Gleichungen des Systems* (11.) *die Grössen g successive eindeutig bestimmt, und wofern* $m-h>h$ *ist, aus den* $(m-h)-h$ *folgenden Gleichungen die übrigen Coefficienten* $p_{h+1}^{(h)}$ *bis* $p_{m-h}^{(h)}$ *eindeutig. Alsdann ist nothwendig und hinreichend, dass die übrigen Gleichungen des Systems* (11.), *deren Anzahl die kleinere der Zahlen h und* $m-h$ *ist, von selbst erfüllt sind.*

Die Differentialgleichung (1.) *wird dann ersetzt durch die Differentialgleichung:*

$$\frac{d^{m-h}y}{dx^{m-h}}+p_1^{(h)}\frac{d^{m-h-1}y}{dx^{m-h-1}}+\cdots+p_{m-h}^{(h)}y=s,$$

wo s das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^h s}{dx^h}+g_1\frac{d^{h-1}s}{dx^{h-1}}+\cdots+g_h s=0$$

ist; und für $s=0$ *erhält man aus der vorhergehenden die Differentialgleichung* (2.).

Durch die Untersuchung des Systemes (11.) ergab sich, dass der Coefficient von

$$\left(p_{\mathfrak{a}}^{(h)}(x-a)^{\mathfrak{a}}\right)_{x=a}=\left(\frac{p_{h+\mathfrak{a}}}{p_h}(x-a)^{\mathfrak{a}}\right)_{x=a},\quad(\mathfrak{a}=1\ldots m-h)$$

sein muss. Daher wird in Differentialgleichung (2.)

$$(19.)\qquad\frac{\psi_{\mathfrak{a}}(a_{\mathfrak{b}})}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{\mathfrak{a}}_{x=a_{\mathfrak{b}}}}=\left|\frac{p_{h+\mathfrak{a}}}{p_h}(x-a_{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{a}}\right|_{x=a_{\mathfrak{b}}},\quad\begin{pmatrix}\mathfrak{a}=1\ldots m-h\\ \mathfrak{b}=1\ldots z\end{pmatrix}.$$

Hat man demnach durch das vorhin angegebene Verfahren die Coefficienten

$p_a^{(h)}$ $(a=1\ldots h)$ und g_a $(a=1\ldots h)$ bestimmt und berechnet alsdann die Coefficienten $p_a^{(h)}$ $(a=h+1\ldots m-h)$, so wird man bei dem jedesmal berechneten zusehen, ob er die Form des gleichstelligen Coefficienten in Differentialgleichung (2.) erhält und ob der Werth von $\psi_a(a_b)$ mit dem in (19.) angegebenen übereinstimmt. Denn fände diese Uebereinstimmung nicht statt, so würde die weitere Rechnung überflüssig sein, da alsdann nach dem Vorhergehenden das System (11.) bei den angegebenen Werthen von $p_a^{(h)}$ $(a=1\ldots h)$ nicht erfüllbar wäre.

Man kann noch bemerken, dass sich hier aus der Betrachtung des Systemes (11.) unmittelbar ergiebt, dass Differentialgleichung (1.) die Integrale nur *einer* Differentialgleichung der Form (2.) enthalten kann, da die Coefficienten der letzteren, als ächt gebrochene rationale Functionen bestimmt sind, sobald man bei jedem singulären Punkte a im Endlichen in der Entwickelung nach Potenzen von $x-a$ die Glieder mit negativen Exponenten kennt, und letztere eindeutig aus dem Systeme (11.) hervorgehen.

Die hier behandelte Differentialgleichung (1.) schliesst sich an die von Herrn *Fuchs* (Bd. 66 dieses Journals S. 139) untersuchte an, die allenthalben einwerthige Coefficienten und nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte und bei jedem derselben nur reguläre Integrale hat, so dass der charakteristische Index bei jedem gleich Null ist; und man kann allgemein sagen:

Wenn eine homogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y=0$$

mit in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen und abgesehen von diesem Punkte stetigen Coefficienten, deren Coefficienten $p_0=1$, p_1 bis p_k $(k\geqq 0)$ für $x=a$ in endlicher Ordnung unendlich werden, wenigstens $m-k$ linearunabhängige reguläre Integrale haben soll, so ist nothwendig, dass alle Coefficienten für $x=a$ in endlicher Ordnung unendlich werden und dass der charakteristische Index $\leqq k$ sei.

Hat diese Differentialgleichung allenthalben einwerthige Coefficienten und nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte, werden in diesen die Coefficienten $p_0=1$, p_1 bis p_k $(k\geqq 0)$ nur in endlicher Ordnung unendlich und soll die Differentialgleichung bei jedem singulären Punkte wenigstens $m-k$ linearunabhängige reguläre Integrale haben, so müssen alle Coefficienten rationale Functionen sein, und in jedem singulären Punkte der charakteristische Index $\leqq k$.

Wenn nun eine homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten bei allen singulären Punkten im Endlichen einen und denselben charakteristischen Index $h \gtreqless 0$ hat, und für $x = t^{-1}$, $t = 0$ den charakteristischen Index $\lesseqgtr h$, und dieselbe die Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung $(m-h)^{ter}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten und keinen anderen singulären Punkten im Endlichen enthalten soll, die nur reguläre Integrale hat, so kann es nur eine einzige solche Differentialgleichung $(m-h)^{ter}$ Ordnung geben. Für $h = 0$ besteht dieselbe immer, wo es die ursprüngliche ist; für $h > 0$ ergiebt eine in eindeutiger Weise zu bewerkstelligende Rechnung, die nur solche Operationen, die bei der Differentiation rationaler Functionen vorkommen, verlangt, ob diese Differentialgleichung $(m-h)^{ter}$ Ordnung besteht und welche es ist.

3.

Das Verfahren der vorigen Nummern beruhte auf der Zerlegung der rationalen Coefficienten p der Differentialgleichung:

$$(1.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = F_m(y, x) = 0$$

dem Systeme der Gleichungen (10.) in No. 2 gemäss vermittelst der Bestimmung der rationalen Functionen $p^{(k)}$ durch die Ermittelung der Glieder mit negativen Exponenten in der Entwickelung dieser Functionen bei den singulären Punkten.

Man kann dasselbe Verfahren auch auf andere Differentialgleichungen als die bisher betrachteten, anwenden; nur hat man nicht immer ein besonderes, sondern mehrere Systeme von Werthen $p^{(k)}$ und g, bei welchen man versuchen muss, ob man mit einem derselben den Gleichungen (10.) genügen kann. Namentlich kann man dieses Verfahren auf die Untersuchungen Abh. Bd. 76 No. 6 anwenden *und dadurch, wenn die Differentialgleichung* (2.) *der vorigen Nummer besteht, in manchen Fällen auch die Differentialgleichung* (8.) *daselbst* (*für* $k = h$) *auflösen.*

Wenn man, wie in No. 1 (Gleichung (7.)) das Gleichungssystem aufstellt:

$$(2.) \qquad p_\mathfrak{a} = l_\mathfrak{a} + \frac{d l_{\mathfrak{a}-1}}{dx} + l_{\mathfrak{a}-1} \frac{d \log M}{dx}, \quad (\mathfrak{a} = 1-m), \quad l_0 = 1, \quad l_m = 0,$$

und der charakteristische Index der Coefficienten $p_\mathfrak{a}$ bei den singulären Punkten im Endlichen $\gtreqless 1$ ist, so kann man versuchen, $\frac{d \log M}{dx} = g_1$ als rationale Function so zu bestimmen, dass die Differentialgleichung

$$(3.) \qquad \frac{dM}{dx} - g_1 M = 0$$

keine anderen singulären Punkte im Endlichen hat als (1.) und bei jedem derselben den charakteristischen Index gleich 1. Alsdann hat M, welches der Differentialgleichung

$$(4.) \qquad \frac{d^m M}{dx^m} - \frac{d^{m-1} p_1 M}{dx^{m-1}} + \cdots + (-1)^m p_m M = 0$$

genügt, bei jedem singulären Punkt a im Endlichen die Form

$$(5.) \qquad e^w (x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha, \quad w = \sum_1^n c_{-\alpha} (x-a)^{-\alpha}.$$

Zur Bestimmung von w und r aus Differentialgleichung (4.) dienen die Untersuchungen Bd. 76 No. 6; und man erhält dadurch in jeder etwa vorhandenen Entwickelung von g_1, die für $x = a$ in endlicher und höherer als der ersten Ordnung unendlich wird, die Glieder mit negativen Exponenten $\frac{dw}{dx} + \frac{r}{x-a}$. Diese Glieder werden aus je einer Entwickelung bei jedem singulären Punkte im Endlichen herausgenommen, und diese Grössen addirt, wodurch man, hier versuchsweise, den ächten gebrochenen Theil in g_1 aufgestellt hat.

Setzt man dann $x = t^{-1}$, so erhält man (No. 1)

$$(6.) \qquad M(t^{-1}) t^{2m-2} F_m'(y, t) = \frac{d}{dt}\left(M(t^{-1}) t^{2m-2} F_{m-1}'(y, t)\right)$$

und für $M(t^{-1}) t^{2m-2} = M'$

$$(7.) \qquad \frac{dM'}{dt} + \left(\frac{g_1}{t^2} - \frac{2m-2}{t}\right) M' = 0.$$

Nun kann, wenn g_1 in den ganzen rationalen und den ächt gebrochenen Theil zerlegt ist, nur der erstere durch t^2 dividirt in Gleichung (7.) Glieder ergeben, die in höherer als der ersten Ordnung für $t = 0$ unendlich werden. Um diese zu bestimmen, hat man, wie bei den singulären Punkten im Endlichen aus der homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung für M', der Differentialgleichung der integrirenden Factoren von $F_m'(y, t) = 0$, die Entwickelungen von $\frac{d \log M'}{dt}$ aufzusuchen, die in endlicher und höherer als der ersten Ordnung für $t = 0$ unendlich werden. Giebt es keine solchen, so ist g_1 nur als ächt gebrochene Function möglich. Ist etwa der charakteristische Index bei allen singulären Punkten im Endlichen von Differentialgleichung (1.) gleich Eins und für $x = t^{-1}$, $t = 0$ grösser als Eins, so ist der ächt gebrochene Theil in g_1 eindeutig bestimmt.

Nachdem man auf diese Weise die rationale Function $g_1 = \frac{d \log M}{dx}$ aufgestellt hat, ist zuzusehen, ob man dem Gleichungssysteme (2.) genügen kann. Man hat also aus den $m-1$ ersten Gleichungen dieses Systemes die Grössen l_a successive zu berechnen, und dann muss die letzte Gleichung von selbst erfüllt sein. Bei jedem singulären Punkte a, wo der charakteristische Index in Differentialgleichung (3.) gleich Eins ist, wird der der Coefficienten l_a um eine Einheit niedriger als der von p_a, und wenn letzterer gleich h war und die Ordnungszahl, in der l_a für $x=a$ unendlich ist, durch λ_a bezeichnet wird, so ist nach Gleichung (2.)

$$(8.) \quad |p_h(x-a)^{\pi_h}|_{x=a} = |g_1(x-a)^{\gamma_1}|_{x=a} . |l_{h-1}(x-a)^{\lambda-1}|_{x=a},$$

$$\lambda_{h-1} = \pi_h - \gamma_1$$

und daher

$$\lambda_a \leqq \lambda_{h-1} - (h-a+1) \quad (a = 1 \ldots h-2), \quad \lambda_{h-1+a} \leqq \pi_h - \gamma_1 + a \quad (a = 1 \ldots m-h).$$

Ferner muss nach Gleichung (2.)

$$(9.) \quad |p_{h+a}(x-a)^{\pi_{h+a}}|_{x=a} = |g_1(x-a)^{\gamma_1}|_{x=a} . |l_{h-1+a}(x-a)^{\lambda_{h-1+a}}|_{x=a}, \quad (a = 1 \ldots m-h)$$

sein. Für $x = t^{-1}$, $t = 0$ müssen die Coefficienten l so beschaffen sein, dass, je nachdem der charakteristische Index in Differentialgleichung (7.) gleich Null oder Eins ist, der charakteristische Index in Differentialgleichung $F'_{m-1}(y, t) = 0$ gleich dem in $F'_m(y, t) = 0$ oder um Eins kleiner ist. Dadurch wird die Form der Coefficienten l_a zum Voraus bestimmt, und man wird bei dem jedesmal berechneten zusehen, ob er diese Form annimmt. Bei der Differentialgleichung $F_{m-1}(y, x) = 0$ ist dann zu ermitteln, ob sich dasselbe Verfahren anwenden lässt. —

Noch ist zu erwähnen, dass man mitunter Differentialgleichungen, die nicht die Form der bisher behandelten haben, durch eine rationale Substitution ersten Grades für x auf diese Form bringen kann. Wenn etwa eine Differentialgleichung bei allen singulären Punkten im Endlichen, bis auf einen, denselben charakteristischen Index $h > 0$ hat, bei diesem denselben $< h$, und für $x = t^{-1}$, $t = 0$ denselben gleich h, oder letzterer Punkt kein singulärer ist, so kann man jenen einen Punkt durch eine rationale Substitution ersten Grades ins Unendliche verlegen und kommt dadurch auf den Fall No. 2 zurück. Jede rationale Substitution ersten Grades lässt in den entsprechenden Punkten den charakteristischen Index der Coefficienten ungeändert, und wenn der eine der beiden entsprechenden Punkte kein singulärer ist, so dass keiner der Coefficienten dort unendlich wird, so auch der andere nicht.

Die rationale Substitution ersten Grades für x hat die Form $x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta}$, woraus $x' = \frac{\beta - \delta x}{\gamma x - \alpha}$.

Man nehme nun ein Paar entsprechender Punkte, die beide im Endlichen liegen, $x = a$ und $x' = a'$. Dann wird $\frac{dx}{dx'}$ und $\frac{dx'}{dx}$ in diesen Punkten nicht unendlich und also auch nicht Null. In der Umgebung von $x' = a'$ hat man dann die Entwickelung $x - a = (x' - a') \sum_0^\infty c_\alpha (x' - a')^\alpha$, wo c_0 von Null verschieden ist. Der Differentialquotient $\frac{d^n y}{dx^n}$ nimmt daher die Form an

$$q_0^{-n} \frac{d^n y}{dx'^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx'^{n-1}} + \cdots + q_{n-1} \frac{dy}{dx'},$$

wo die Grössen q rationale Functionen von x' in der Umgebung von $x' = a'$ einwerthig und allenthalben stetig sind, $q_0 = \frac{dx}{dx'}$. Ein Coefficient p, der für $x = a$ unendlich in der r^{ten} Ordnung wird, wird für $x' = a'$ in derselben Ordnung unendlich. Setzt man

$$(10.) \qquad F_m(y, x) = \left(\frac{dx}{dx'}\right)^{-m} \cdot f_m(y, x'),$$

so ist durch das Vorhergehende für $x = a$ in $F_m(y, x) = 0$ und $x' = a'$ in $f_m(y, x') = 0$ die obige Behauptung bewiesen.

Entspricht dem Punkte $x = t^{-1}$, $t = 0$ ein endlicher Werth von $x' = a'$, und setzt man nach No. 1: $F_m(y, x) = (-1)^m t^{2m} F'_m(y, t)$, so erhält man

$$(11.) \qquad F'_m(y, t) = \left(-t^2 \frac{dx}{dx'}\right)^{-m} f_m(y, x') = \left(\frac{dt}{dx'}\right)^{-m} f_m(y, x')$$

und $t = \frac{\gamma x' + \delta}{\alpha x' + \beta}$. Und da hier dem Punkte $t = 0$ der Punkt $x' = a'$ entspricht, so kommt man auf den Fall zurück, wo die entsprechenden Punkte im Endlichen liegen, wofür die Behauptung bereits bewiesen.

Ebenso ist es daher, wenn einem endlichen Werthe von $x = a$ der Werth $x' = \frac{1}{t'}$, $t' = 0$ entspricht.

Entspricht endlich dem Werthe $x = \frac{1}{t}$, $t = 0$ der Werth $x' = \frac{1}{t'}$, $t' = 0$, so hat man

$$F'_m(y, t) = \left(\frac{dt}{dx'}\right)^{-m} f_m(y, x'),$$

$$f_m(y, x') = (-1)^m (t')^{2m} f'_m(y, t'),$$

wodurch

$$(12.) \qquad F'_m(y,t) = \left(\frac{dt}{dt'}\right)^{-m} f'_m(y,t'),$$

$t = \frac{\gamma+\delta t'}{\alpha+\beta t'}$. Da hier dem Punkte $t=0$ der Punkt $t'=0$ entspricht, so kommt man ebenfalls auf das Frühere zurück. Demnach findet bei der rationalen Substitution ersten Grades für x bei jedem Paare entsprechender Punkte die oben gemachte Behauptung statt.

Berlin, den 24. Februar 1874.

Reduction der Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids auf das Variationsproblem eines einfachen Integrals, und Bestimmung der Bewegung für den Grenzfall eines unendlichen elliptischen Cylinders.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Mit Hülfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten hat *Lagrange* das allgemeine Problem der Bewegung einer Flüssigkeit als das Variationsproblem eines über den Raum der Flüssigkeit ausgedehnten Integrals behandelt. Das Problem derjenigen Bewegung eines flüssigen homogenen der Gravitation unterworfenen Ellipsoids, auf welche sich *Dirichlets* letzte, von Herrn *Dedekind* herausgegebene und fortgesetzte Arbeit *) bezieht, erlaubt aber vermöge der besonderen obwaltenden Umstände eine Zurückführung auf das Variationsproblem eines einfachen Integrals. Nach der von *Dirichlet* getroffenen Voraussetzung sind für ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt des flüssigen Ellipsoids ist, die drei Coordinaten eines in einem gewissen Zeitmoment betrachteten Elements der Flüssigkeit homogene lineare Functionen von den Coordinaten, die demselben Element bei dem Anfange der Bewegung zukommen. Die neun Coefficienten der bezeichneten drei Ausdrücke gelten als reine Functionen der Zeit, die zugehörige Determinante bleibt in Folge der Incompressibilität der Flüssigkeit unverändert. Wenn man nun einerseits die halbe Summe der in dem flüssigen Ellipsoid vorhandenen lebendigen Kräfte, andererseits das von der gegenseitigen Anziehung der Theile herrührende Potential des Ellipsoids auf sich selbst bestimmt, so wird der erstgenannte Werth gleich einer homogenen Function des zweiten Grades von den nach der Zeit genommenen ersten Differentialquotienten der erwähnten neun Coefficienten, und der zweitgenannte Werth gleich einer Function von diesen Coefficienten selbst. Man multiplicire

*) *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik,* im achten Bande der Abhandlungen der K. G. der Wissenschaften zu Göttingen, und dieses Journal Bd. 58, pag. 181. *Dedekind,* in demselben Bande dieses Journals, pag. 217, *Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung.*

jetzt das Aggregat der beiden Werthe mit dem Elemente der Zeit und integrire von dem Anfangswerthe bis zu einem beliebigen Werthe derselben. Alsdann fällt die Forderung, die Abhängigkeit dieser neun Coefficienten von der Zeit so zu bestimmen, dass die erste Variation des angegebenen Integrals bei festen Anfangs- und Endwerthen der Variabelen verschwindet, während die bezeichnete Determinante ungeändert bleiben muss, mit dem Inhalte des in Rede stehenden hydrodynamischen Problems zusammen. Wird die Bedingung der unveränderlichen Determinante nach der Methode des unbestimmten Factors in das Variationsproblem eingeführt, so liefert die Bestimmung des betreffenden Factors die Kenntniss des in der Flüssigkeit vorhandenen Druckes.

Das aufgestellte Variationsproblem ist in zwiefacher Hinsicht ebenso gebildet, wie dasjenige, auf welches *Hamilton* die Probleme der Mechanik, bei denen eine Kräftefunction existirt, bezogen hat. Einmal stimmen die bei der vorhin gegebenen Definition unseres Integrals angewendeten mechanischen Begriffe mit denjenigen überein, die *Hamilton* anwendet, um das Integral zu definiren, welches der Bewegung eines Systems von Massenpunkten zugehört. Dann ist aber die analytische Beschaffenheit unseres Integrals dieselbe, welche das *Hamilton*sche Integral für die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes annimmt, der einer Bedingungsgleichung genügt. An die Stelle der drei Coordinaten des einen Massenpunktes treten hier die neun variabelen Coefficienten, und die herrschende Bedingungsgleichung besteht in der Unveränderlichkeit der bezeichneten Determinante.

Eine beschränkende Voraussetzung, mit der sich sowohl *Dirichlet* als *Riemann* *), von verschiedenen Anschauungen ausgehend, beschäftigt haben, ist die, dass eine Hauptaxe des Ellipsoids ihrer Lage nach ungeändert bleibt, und dass nur um diese Rotation stattfindet. *Dirichlet* hat für den Fall, dass die beiden anderen Hauptaxen dauernd einander gleich bleiben, die Bewegung vollständig bestimmt, *Riemann* nimmt bei seiner Erörterung nicht an, dass diese beiden Hauptaxen einander gleich seien. Die Bewegung lässt sich aber auch in dem Falle vollständig bestimmen, dass die beiden in derselben Ebene bleibenden Hauptaxen einander ungleich sind, wofern die dritte Hauptaxe, welche ihre Lage nicht ändert, im Verhältniss zu jenen unendlich gross ist. Das Ellipsoid geht dadurch in einen unendlichen elliptischen Cylinder über. Das

---

*) *Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoids,* im neunten Bande der Abh. der K. G. d. Wiss. zu Göttingen.

vorhin entwickelte Variationsproblem enthält dann nur die vier Coefficienten, welche zu zwei linearen Ausdrücken von je zwei Grössen gehören. Bei der Vergleichung des zu variirenden Integrals mit dem *Hamilton*schen Integral, das der Bewegung eines einzigen Massenpunktes entspricht, erscheinen diese vier Coefficienten als die Repräsentanten der Coordinaten des betreffenden Massenpunktes, während wieder die Bedingung gilt, dass die aus den vier Coefficienten gebildete Determinante ihren Werth nicht ändert.

1.

Für eine incompressibele homogene Flüssigkeit von der Dichtigkeit Eins seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Elements zu der Zeit t, P der auf dasselbe ausgeübte Druck, X, Y, Z die rechtwinkligen Componenten der auf das Element wirkenden beschleunigenden Kraft. Wenn man die unabhängigen Variationen δx, δy, δz einführt, so nimmt die von *Lagrange*, mécanique analytique, seconde partie, Section XI, mit (a.) bezeichnete Formel, wo die Integration auf die ganze flüssige Masse erstreckt wird, indem X, Y, Z, P an die Stelle von $-X$, $-Y$, $-Z$, $-\lambda$ treten, die folgende Gestalt an

$$(1.)\quad \begin{cases} \iiint\Big[\Big(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \dfrac{\partial P}{\partial x}\Big)\delta x \\ \qquad + \Big(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y + \dfrac{\partial P}{\partial y}\Big)\delta y \\ \qquad + \Big(\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z + \dfrac{\partial P}{\partial z}\Big)\delta z\Big]\,dx\,dy\,dz. \end{cases}$$

Aus (1.) entstehen die partiellen Differentialgleichungen, welche die Bewegung der Flüssigkeit beherrschen, dadurch, dass die unter dem Integralzeichen befindlichen Factoren von δx, δy, δz gleich Null gesetzt werden. Hierzu kommt in Folge der Incompressibilität, wofern die auf den Anfangszustand eines Elements bezüglichen Werthe durch Anhängung des Zeichens 0 notirt werden, die Gleichung, dass die Determinante

$$(2.)\quad \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial x_0}\,\frac{\partial y}{\partial y_0}\,\frac{\partial z}{\partial z_0}$$

den Werth der Einheit haben muss. Die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$ werden durch Gleichungen von der Gestalt

$$(3.)\quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x_0}\,\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y_0}\,\frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z_0}\,\frac{\partial z_0}{\partial x}$$

definirt, und die vier Grössen x, y, z, P sind Functionen von den vier unabhängigen Variabelen x_0, y_0, z_0, t.

Die Daten des von *Dirichlet* behandelten Problems werde ich in der von *Riemann* gewählten Weise ausdrücken, so dass die halben Hauptaxen des flüssigen Ellipsoids zu der Zeit t mit a, b, c, zu der Anfangszeit t_0 mit a_0, b_0, c_0, bezeichnet werden, und dass zwischen den Coordinaten x, y, z eines Elements und den Anfangscoordinaten desselben Elements die Gleichungen gelten

$$(4.)\quad \begin{cases} x = l\,\frac{x_0}{a_0} + m\,\frac{y_0}{b_0} + n\,\frac{z_0}{c_0}, \\ y = l'\,\frac{x_0}{a_0} + m'\,\frac{y_0}{b_0} + n'\,\frac{z_0}{c_0}, \\ z = l''\,\frac{x_0}{a_0} + m''\,\frac{y_0}{b_0} + n''\,\frac{z_0}{c_0}. \end{cases}$$

Die Anfangswerthe der neun Functionen l, m, ... n'' von t sind die folgenden

$$(4^a.)\quad \begin{cases} l_0 = a_0, & m_0 = 0, & n_0 = 0, \\ l_0' = 0, & m_0' = b_0, & n_0' = 0, \\ l_0'' = 0, & m_0'' = 0, & n_0'' = c_0, \end{cases}$$

und die Determinante $\Sigma \pm l m' n''$, welche Θ heissen möge, muss wegen der erwähnten Eigenschaft von (2.) die Gleichung erfüllen

$$(5.)\quad \Theta = a_0 b_0 c_0.$$

Wenn dem Anfangszustande des Ellipsoids ein Raum S_0, dem Zustande zu der Zeit t ein Raum S entspricht, so ist das zwischen den betreffenden Ortscoordinaten x_0, y_0, z_0 und x, y, z aufgestellte System von Gleichungen (4.) der Ausdruck für die Beziehung einer allgemeinen Affinität zwischen den Räumen S_0 und S. Man fingire nun einen dritten Raum S_1, dessen affine Beziehung zu dem Raume S_0 darin besteht, dass die rechtwinkligen Coordinaten des zu dem Punkte (x_0, y_0, z_0) zugeordneten Punktes die Werthe $\frac{x_0}{a_0}$, $\frac{y_0}{b_0}$, $\frac{z_0}{c_0}$ haben. Alsdann entsprechen den drei rechtwinkligen Hauptaxen des Ellipsoids in S_0 drei rechtwinklige Axen in S_1, und die Werthe a_0, b_0, c_0 drücken respective die lineare Vergrösserung im Sinne jeder Axe aus. Wenn man jetzt die drei auf einander senkrechten Axen in S aufsucht, denen drei auf einander senkrechte Axen in S_1 entsprechen, so erhält man die drei Hauptaxen des Ellipsoids in S, und die Werthe a, b, c drücken für die zwischen den Räumen S und S_1 stattfindende Affinität die lineare Vergrösserung im Sinne von jeder der bezeichneten Axen aus. Die Beziehung zwischen den Coordinaten x, y, z eines Punktes in S und den Coordinaten $\frac{x_0}{a_0}$, $\frac{y_0}{b_0}$, $\frac{z_0}{c_0}$

des zugeordneten Punktes in S_1 wird durch die beiden Systeme von orthogonalen Substitutionen

$$(6.)\qquad \begin{cases} \xi = \alpha\ x+\beta\ y+\gamma\ z, \\ \eta = \alpha' x+\beta'\ y+\gamma'\ z, \\ \zeta = \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z \end{cases}$$

und

$$(7.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\xi}{a} = \alpha_1 \dfrac{x_0}{a_0}+\beta_1 \dfrac{y_0}{b_0}+\gamma_1 \dfrac{z_0}{c_0}, \\ \dfrac{\eta}{b} = \alpha_1' \dfrac{x_0}{a_0}+\beta_1' \dfrac{y_0}{b_0}+\gamma_1' \dfrac{z_0}{c_0}, \\ \dfrac{\zeta}{c} = \alpha_1'' \dfrac{x_0}{a_0}+\beta_1'' \dfrac{y_0}{b_0}+\gamma_1'' \dfrac{z_0}{c_0} \end{cases}$$

ausgedrückt, welche *Riemann* in denselben Zeichen aufgestellt hat. Es leuchtet ein, dass ξ, η, ζ die auf die Hauptaxen des Ellipsoids bezogenen Coordinaten des Punktes (x, y, z) in S, dagegen $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$, $\frac{\zeta}{c}$ die auf die Bilder der Hauptaxen bezogenen Coordinaten des Punktes $\left(\frac{x_0}{a_0}, \frac{y_0}{b_0}, \frac{z_0}{c_0}\right)$ in S_1 sind. Die einander correspondirenden Oberflächen des Ellipsoids in S_0 und in S haben in S_1 die Kugelfläche von der Gleichung

$$\left(\frac{x_0}{a_0}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b_0}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c_0}\right)^2 = 1$$

zu ihrem Bilde. Das System (6.) erlaubt, die wirkliche Bewegung der Hauptaxen in dem flüssigen Ellipsoid, das System (7.) erlaubt, die Bewegung von den Bildern der Hauptaxen in dem Raume S_1 zu verfolgen. Die beiden Substitutionsdeterminanten $\Sigma \pm \alpha\beta'\gamma''$ und $\Sigma \pm \alpha_1\beta_1'\gamma_1''$ haben den Werth der positiven Einheit. Demnach folgt aus (7.) in Verbindung mit (5.) die Gleichung

$$(5^a.)\qquad \Theta = abc = a_0 b_0 c_0.$$

Die nach dem *Newton*schen Gesetz ausgeübte Anziehung der Theile des Ellipsoids auf den Punkt (x, y, z) bringt das Potential V hervor, das bei Anwendung der Coordinaten ξ, η, ζ den Ausdruck hat

$$(8.)\qquad V = \pi \int_0^\infty \frac{abc\,ds}{\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}} \left(1-\frac{\xi^2}{s+a^2}-\frac{\eta^2}{s+b^2}-\frac{\zeta^2}{s+c^2}\right).$$

Die Stärke der Anziehung in der Einheit der Entfernung wird ε genannt, so dass die Componenten der beschleunigenden Kraft gleich den partiellen Ableitungen der Grösse εV in Bezug auf die zugehörigen Coordinaten sind. In

Betreff des Druckes P genügt den Anforderungen des vorgelegten Problems die Annahme

$$(9.) \qquad P = Q + \sigma\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2}\right),$$

wo Q den constanten Werth des an der Oberfläche herrschenden Druckes, und σ eine Function der Zeit t bedeutet.

Das Integral (1.) muss für die Auflösung des hydrodynamischen Problems den Werth Null erhalten, wie auch immer die Variationen δx, δy, δz angenommen werden. Ich werde dieselben gegenwärtig so definiren, dass in den Gleichungen (4.) die neun Grössen l, m, ... n'' allein variirt werden, oder dass

$$(10.) \qquad \begin{cases} \delta x = \delta l \, \frac{x_0}{a_0} + \delta m \, \frac{y_0}{b_0} + \delta n \, \frac{z_0}{c_0}, \\ \delta y = \delta l' \, \frac{x_0}{a_0} + \delta m' \, \frac{y_0}{b_0} + \delta n' \, \frac{z_0}{c_0}, \\ \delta z = \delta l'' \, \frac{x_0}{a_0} + \delta m'' \, \frac{y_0}{b_0} + \delta n'' \, \frac{z_0}{c_0} \end{cases}$$

ist, und diese Variationen in das Integral (1.) substituirt denken, um hierauf den Werth desselben zu ermitteln. In Folge von (4.) und (5.) kann das Volumenelement $dx\,dy\,dz$ durch das Volumenelement $dx_0\,dy_0\,dz_0$ ersetzt, und das Innere des flüssigen Ellipsoids durch die Ungleichheit $\frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b_0^2} + \frac{z_0^2}{c_0^2} < 1$ bezeichnet werden; die reinen Functionen der Zeit t bleiben von der über dieses Gebiet auszuführenden Integration unberührt.

Zunächst bekommt der Ausdruck

$$(11.) \qquad \iiint\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)dx_0\,dy_0\,dz_0,$$

indem man aus (4.) die zweiten Differentialquotienten der Grössen x, y, z nach t ableitet, und erwägt, dass die drei Integrale von der Gestalt

$$\iiint \frac{x_0^2}{a_0^2}\,dx_0\,dy_0\,dz_0$$

einzeln gleich $\frac{4\pi\Theta}{15}$, und die drei Integrale von der Gestalt

$$\iiint \frac{x_0\,y_0}{a_0\,b_0}\,dx_0\,dy_0\,dz_0$$

einzeln gleich Null sind, den Werth

$$(11^a.) \qquad \frac{4\pi\Theta}{15}\Sigma\frac{d^2l}{dt^2}\delta l.$$

Das Zeichen Σ geht hier, wie auch im Folgenden, auf die neun Grössen $l, m, \ldots n''$.

Der unter dem Integralzeichen in (1.) stehende Ausdruck $-X\delta x - Y\delta y - Z\delta z$ darf unmittelbar durch den Ausdruck

$$(12.) \qquad -\varepsilon\overline{\delta V} = \varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{abc\,ds}{\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}}\left(\frac{2\xi\overline{\delta\xi}}{s+a^2}+\frac{2\eta\overline{\delta\eta}}{s+b^2}+\frac{2\zeta\overline{\delta\zeta}}{s+c^2}\right)$$

ersetzt werden, wo die Variationen $\overline{\delta\xi}$, $\overline{\delta\eta}$, $\overline{\delta\zeta}$ mit den Variationen δx, δy, δz ebenso verbunden sind, wie die Grössen ξ, η, ζ mit den Grössen x, y, z. Vermöge der Systeme (6.) und (7.), in welche das System (4.) zerfallen ist, hängen die Coordinaten ξ, η, ζ von den Coordinaten $\frac{x_0}{a_0}$, $\frac{y_0}{b_0}$, $\frac{z_0}{c_0}$ und von den Functionen der Zeit $l, m, \ldots n''$ ab. Weil nun der Gebrauch des Zeichens δ die alleinige Aenderung der Grössen $l, m, \ldots n''$ andeuten soll, so folgen aus (6.) die Gleichungen

$$(13.) \qquad \begin{cases} \delta\xi = \overline{\delta\xi} + \delta\alpha\, x + \delta\beta\, y + \delta\gamma\, z, \\ \delta\eta = \overline{\delta\eta} + \delta\alpha'\, x + \delta\beta'\, y + \delta\gamma'\, z, \\ \delta\zeta = \overline{\delta\zeta} + \delta\alpha''\, x + \delta\beta''\, y + \delta\gamma''\, z. \end{cases}$$

Nach (6.) und (7.) darf eine über den Raum des flüssigen Ellipsoids zu erstreckende Integration auch auf das Volumenelement $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ und die Ungleichheit $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}<1$ bezogen werden. Daher wird das Integral

$$\iiint \xi(\delta\alpha\, x + \delta\beta\, y + \delta\gamma\, z)\, dx_0\, dy_0\, dz_0$$

durch Wiederholung von so eben gebrauchten Schlüssen gleich dem Ausdrucke $\frac{4\pi\Theta}{15}(\alpha\delta\alpha+\beta\delta\beta+\gamma\delta\gamma)$, und dieser verschwindet wegen der Gleichung $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Mithin liefert das System (13.) die Gleichung

$$(14.) \qquad \iiint \xi\overline{\delta\xi}\, dx_0\, dy_0\, dz_0 = \iiint \xi\delta\xi\, dx_0\, dy_0\, dz_0,$$

und die entsprechenden Gleichungen für die Coordinaten η und ζ.

Diese Gleichungen geben die Berechtigung, bei der Bestimmung des Ausdruckes $-\iiint \varepsilon\overline{\delta V}\, dx_0\, dy_0\, dz_0$ die Gleichung (12.) so anzuwenden, dass beziehungsweise für $\overline{\delta\xi}$, $\overline{\delta\eta}$, $\overline{\delta\zeta}$ die Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ genommen werden. Aus (7.) folgt nun die Gleichung

$$(15.) \qquad \frac{\xi}{a}\delta\left(\frac{\xi}{a}\right) = \left(\alpha_1\frac{x_0}{a_0}+\beta_1\frac{y_0}{b_0}+\gamma_1\frac{z_0}{c_0}\right)\left(\delta\alpha_1\frac{x_0}{a_0}+\delta\beta_1\frac{y_0}{b_0}+\delta\gamma_1\frac{z_0}{c_0}\right),$$

und daher ist das Integral $\iiint \frac{\xi}{a}\delta\left(\frac{\xi}{a}\right)dx_0dy_0dz_0$ gleich dem Ausdrucke $\frac{4\pi\Theta}{15}(\alpha_1\delta\alpha_1+\beta_1\delta\beta_1+\gamma_1\delta\gamma_1)$, welcher auf Grund der Gleichung $\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1$ wieder verschwindet. Demnach wird das Integral $\iiint \frac{\xi\delta\xi}{a^2}dx_0dy_0dz_0$ gleich dem Integral $\iiint \frac{\xi^2\delta a}{a^3}dx_0dy_0dz_0$, und, wenn statt des Elements $dx_0dy_0dz_0$ das Element $d\xi d\eta d\zeta$ eingeführt wird, aus den bekannten Motiven gleich dem Ausdrucke $\frac{4\pi\Theta}{15}\frac{\delta a}{a}$. Somit erhält das Integral $-\iiint \varepsilon\overline{\delta V}dx_0dy_0dz_0$ den Werth

$$(16.)\qquad \frac{4\pi\Theta}{15}\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{abc\,ds}{\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}}\left(\frac{2a\delta a}{s+a^2}+\frac{2b\delta b}{s+b^2}+\frac{2c\delta c}{s+c^2}\right).$$

Für den Ausdruck

$$\frac{\partial P}{\partial x}\delta x+\frac{\partial P}{\partial y}\delta y+\frac{\partial P}{\partial z}\delta z = \overline{\delta P}$$

liefert die Gleichung (9.) die Darstellung

$$(17.)\qquad \overline{\delta P} = -\sigma\left(\frac{2\xi\overline{\delta\xi}}{a^2}+\frac{2\eta\overline{\delta\eta}}{b^2}+\frac{2\zeta\overline{\delta\zeta}}{c^2}\right),$$

und das Integral $\iiint \overline{\delta P}dx_0dy_0dz_0$ nimmt vermöge der angestellten Betrachtungen den Werth an

$$(18.)\qquad -\frac{4\pi\Theta}{15}2\sigma\left(\frac{\delta a}{a}+\frac{\delta b}{b}+\frac{\delta c}{c}\right).$$

Unter den gegenwärtigen Umständen verwandelt sich also das Integral (1.) in den mit dem Factor $\frac{4\pi\Theta}{15}$ multiplicirten Ausdruck

$$(19.)\ \Sigma\frac{d^2l}{dt^2}\delta l+\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{abc\,ds}{\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}}\left(\frac{2a\delta a}{s+a^2}+\frac{2b\delta b}{s+b^2}+\frac{2c\delta c}{s+c^2}\right)-2\sigma\left(\frac{\delta a}{a}+\frac{\delta b}{b}+\frac{\delta c}{c}\right).$$

Die Forderung, dass derselbe für unabhängige Werthe der Variationen δl, δm, ... $\delta n''$ gleich Null werde, erzeugt das System von neun gewöhnlichen Differentialgleichungen, welches in Verbindung mit der Gleichung (5^a.)

$$\Theta = abc = a_0b_0c_0$$

die Abhängigkeit der neun Functionen l, m, ... n'' und der Function σ von der Zeit t determinirt.

2.

Es sind jetzt die mechanischen Begriffe anzuführen, welche bei

der aufgestellten Forderung ins Spiel kommen. Die Masse des bewegten flüssigen Ellipsoids hat den Werth $\frac{4\pi\Theta}{3}$, die halbe Summe der vorhandenen lebendigen Kräfte bestimmt sich aus den Gleichungen (4.) vermittelst der mehrfach angewendeten Integrationen folgendermassen

$$(20.)\qquad \tfrac{1}{2}\iiint\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)dx\,dy\,dz = \frac{4\pi\Theta}{15}\tfrac{1}{2}\Sigma\left(\frac{dl}{dt}\right)^2,$$

das Potential des Ellipsoids in Bezug auf sich selbst erhält den bekannten Ausdruck

$$(21.)\qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\iiint V\,dx\,dy\,dz = \dfrac{4\pi\Theta}{15}2H, \\ H = \pi\displaystyle\int_0^\infty \frac{abc\,ds}{\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}}. \end{cases}$$

Auch gehört das Resultat hierher, dass die über das ganze Ellipsoid ausgedehnte Summe von den Producten jedes Volumenelements in das Quadrat der Entfernung zwischen dem betreffenden Element und dem Mittelpunkte des Ellipsoids durch die Gleichung ausgedrückt wird

$$(22.)\qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\iiint(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \dfrac{4\pi\Theta}{15}G, \\ G = \tfrac{1}{2}\Sigma l^2. \end{cases}$$

Das Integral (22.) repräsentirt für das hydrodynamische Problem einen mechanischen Begriff, auf den in dem Aufsatze: *über einen algebraischen Typus der Bedingungen eines bewegten Massensystems*, dieses Journal, Bd. 66, pag. 363 aufmerksam gemacht ist. In der Abhandlung: *Sätze aus dem Grenzgebiet der Mechanik und der Geometrie* *) habe ich diesen Begriff unter einem allgemeineren Gesichtspunkte erörtert, und die betreffende Literatur möglichst vollständig angegeben.

Nach (21.) ist die vollständige Variation der Function H diese

$$\delta H = \pi\int_0^\infty \frac{abc\,ds}{\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}}\left(\frac{\delta(abc)}{abc}-\frac{a\,\delta a}{s+a^2}-\frac{b\,\delta b}{s+b^2}-\frac{c\,\delta c}{s+c^2}\right);$$

daher darf der Ausdruck (19.) mit Benutzung der Gleichung $\Theta = abc$ so dargestellt werden

$$(23.)\qquad \Sigma\frac{d^2l}{dt^2}\,\delta l - 2\varepsilon\,\delta H + 2\varepsilon H\frac{\delta\Theta}{\Theta} - 2\sigma\frac{\delta\Theta}{\Theta}.$$

---

*) Mathematische Annalen von *Clebsch* und *Neumann*, Bd. 6, pag. 416.

Das Verschwinden dieses Ausdruckes, mit der Gleichung (5ª.) zusammengenommen, bildet zugleich die nothwendige Bedingung dafür, dass die erste Variation des Integrals

$$(24.) \qquad \int_{t_0}^{t} \left(\tfrac{1}{2} \Sigma \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + 2\varepsilon H \right) dt$$

für feste Anfangs- und Endwerthe der neun abhängigen Variabelen $l, m, \ldots n''$ unter Voraussetzung der Gleichung (5ª.) gleich Null werde. Das Element des Integrals (24.) ist gleich dem Product des Zeitelements in das Aggregat aus der halben Summe der in dem flüssigen Ellipsoid vorhandenen lebendigen Kräfte und des Potentials der flüssigen Masse auf sich selbst, durch ein Fünftel der Gesammtmasse dividirt, und diese Gesammtmasse ist nach (5ª.) unveränderlich. Das in Rede stehende Variationsproblem gehört zu denjenigen Problemen, über welche dieses Journal, Bd. 74, pag. 110 allgemeinere Betrachtungen angestellt worden sind. Man darf nach den dort entwickelten Grundsätzen den Ausdruck gebrauchen, dass bei dem gegenwärtigen Problem das *Hamilton*sche Variationsproblem auf die Bewegung eines Punktes in einer Mannigfaltigkeit von neun Dimensionen ausgedehnt ist, dass die neun Coordinaten $l, m, \ldots n''$ des fingirten Punktes durch die eine Gleichung $\Theta = a_0 b_0 c_0$ verbunden sind, und dass das Quadrat des Linearelements in jener Mannigfaltigkeit durch das Aggregat der Quadrate Σdl^2 dargestellt wird, während die Function $2\varepsilon H$ den Platz der Kräftefunction einnimmt.

Diese Function ist vorhin mittelst der Halbaxen a, b, c ausgedrückt. Eine unmittelbare Darstellung durch die Grössen $l, m, \ldots n''$ folgt aus der Bemerkung, dass für einen indefiniten Werth s die Verbindung

$$(25.) \qquad \frac{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}{a^2 b^2 c^2}$$

zu der quadratischen Form der Variabelen ξ, η, ζ

$$(26.) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + s\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} \right)$$

als Determinante gehört. Vermittelst der Gleichungen (6.) und (7.) geht die Form (26.) in die Form

$$(27.) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + s\left(\left(\frac{x_0}{a_0} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{b_0} \right)^2 + \left(\frac{z_0}{c_0} \right)^2 \right)$$

über. Es mögen nun in dem System (4.) die zu den $l, m, \ldots n''$ gehörigen Unterdeterminanten respective mit $\lambda, \mu, \ldots \nu''$ bezeichnet werden, dann giebt

die Auflösung das System von Gleichungen

$$(28.)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0}{a_0} = \dfrac{\lambda x+\lambda' y+\lambda'' z}{\Theta}, \\ \dfrac{y_0}{b_0} = \dfrac{\mu x+\mu' y+\mu'' z}{\Theta}, \\ \dfrac{z_0}{c_0} = \dfrac{\nu x+\nu' y+\nu'' z}{\Theta}. \end{cases}$$

Wenn man mit Hülfe desselben die Form (27.) als eine Form der Variabelen x, y, z darstellt, so muss die zugehörige Determinante gleich der Determinante (25.) der Form (26.) sein, weil die Substitutionsdeterminante $\Sigma\pm\alpha\beta'\gamma''$ des Systems (6.) den Werth der Einheit hat. Die wirkliche Bildung der bezeichneten Determinante giebt die Relation

$$(29.)\quad \frac{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}{a^2b^2c^2} = \frac{s^3+\Sigma l^2 s^2+\Sigma\lambda^2 s+\Theta^2}{\Theta^2},$$

und diese liefert für die Function H die gesuchte Umformung

$$(30.)\quad H = \pi\int_0^\infty \frac{\Theta\, ds}{\sqrt{s^3+\Sigma l^2 s^2+\Sigma\lambda^2 s+\Theta^2}}.$$

Die Einsetzung dieses Integrals in den Ausdruck (23.) und das Integral (24.) lenkt den Blick auf die algebraische Structur des in Rede stehenden Problems. Unter dem Zeichen des Integrals (24.) kommt ausser der quadratischen Form von neun Differentialen Σdl^2 nur die Function H vor, diese enthält die Variabelen l, m, ... n'' ausschliesslich in den drei rationalen ganzen Functionen Σl^2, $\Sigma\lambda^2$, Θ, und Θ ist zugleich diejenige Function, deren Constantsein die Bedingung des Problems ausmacht. Der von Herrn *Dedekind* gefundene Reciprocitätssatz beruht, wie *Riemann* l. c. Art. 5 bemerkt hat, auf der Berechtigung, bei dem System der Variabelen l, m, ... n'' eine Vertauschung der Horizontalreihen und Vertikalreihen, und gewisse Aenderungen der Vorzeichen vorzunehmen. Diese Vertauschung und diese Aenderungen sind so beschaffen, dass bei denselben sowohl die quadratische Form Σdl^2, wie auch die Verbindungen Σl^2, $\Sigma\lambda^2$, Θ ungeändert bleiben, und daraus kann die angeführte Berechtigung abgeleitet werden.

Die Coefficienten der orthogonalen Substitutionen (6.) und (7.) sind so lange vollständig bestimmt, als die drei Grössen a^2, b^2, c^2 von einander verschieden sind, das heisst, so lange als das Nullsetzen der rechten Seite von (29.) für die Grösse $-s$ drei verschiedene Werthe liefert, und die Coefficienten werden für den Fall des Gleichwerdens von zweien dieser Grössen

unbestimmt. Da nun *Riemanns* Transformation des hydrodynamischen Problems die Grössen a, b, c, die Verbindungen

$$\frac{d\alpha'}{dt}\alpha''+\frac{d\beta'}{dt}\beta''+\frac{d\gamma'}{dt}\gamma'', \quad \frac{d\alpha_1'}{dt}\alpha_1''+\frac{d\beta_1'}{dt}\beta_1''+\frac{d\gamma_1'}{dt}\gamma_1'',$$

und die durch Zeigervertauschung aus diesen hervorgehenden vier anderen Verbindungen als neue Variabele einführt, so schliesst der erwähnte Artikel den Fall der gleichen Axen aus. Die vorhin ausgeführte Reduction auf das Variationsproblem des Integrals (24.), und das Verschwinden des Ausdrucks (23.) ist aber an die Ungleichheit der Axen nicht gebunden und hat einen völlig allgemeinen Character, der durch die Vergleichung des resultirenden Systems von Differentialgleichungen mit dem von *Dirichlet* aufgestellten System von Differentialgleichungen (a.) leicht bestätigt werden kann.

Für den Fall, dass die Grössen a^2, b^2, c^2 unter einander verschieden sind, gelangt man zu einer algebraischen Darstellung der Substitutionscoefficienten α, β, ... γ'' bei dem erwähnten Uebergang von der Form (26.) der Variabelen ξ, η, ζ zu der Form (27.), als einer Form der Variabelen x, y, z, und zu einer algebraischen Darstellung der Substitutionscoefficienten α_1, β_1, ... γ_1'' bei einem Uebergange von der Form (26.), als einer Form der Variabelen $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$, $\frac{\zeta}{c}$ zu der Form (27.), als einer Form der Variabelen $\frac{x_0}{a_0}$, $\frac{y_0}{b_0}$, $\frac{z_0}{c_0}$. Für diesen Zweck genügt die allgemeine Theorie des Hauptaxenproblems, und ich erlaube mir wegen des hierher Gehörigen auf den Beitrag zu dieser Theorie zu verweisen, welcher in den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1873 erschienen ist. Der vorliegenden algebraischen Frage eigenthümlich ist die Darstellung der vollständigen Variationen der Grössen a, b, c als Functionen der neun Elemente l, m, ... n''. Wenn man in (6.) die Grössen x, y, z durch ihre aus (4.) genommenen Ausdrücke ersetzt, und die hervorgehenden Werthe der ξ, η, ζ mit den aus (7.) resultirenden Werthen vergleicht, so entstehen die Relationen

$$(31.)\quad \begin{cases} a\alpha_1 = \alpha l + \beta m + \gamma n, \\ a\beta_1 = \alpha l' + \beta m' + \gamma n', \\ a\gamma_1 = \alpha l'' + \beta m'' + \gamma n'', \end{cases}$$

und zwei entsprechende, den Grössen b und c zugehörige Relationen. Man variire die drei Gleichungen (31.) vollständig, multiplicire successive mit α_1, β_1, γ_1 und addire, so kommt, da der Ausdruck

$$(\delta\alpha l+\delta\beta m+\delta\gamma n)\alpha_1+(\delta\alpha l'+\delta\beta m'+\delta\gamma n')\beta_1+(\delta\alpha l''+\delta\beta m''+\delta\gamma n'')\gamma_1$$

in Folge von den Gleichungen

$$(32.)\qquad \begin{cases} a\alpha = \alpha_1 l + \beta_1 l' + \gamma_1 l'', \\ a\beta = \alpha_1 m + \beta_1 m' + \gamma_1 m'', \\ a\gamma = \alpha_1 n + \beta_1 n' + \gamma_1 n'', \end{cases}$$

die eine Consequenz der neun angegebenen sind, gleich dem Ausdrucke

$$a\alpha\delta\alpha + a\beta\delta\beta + a\gamma\delta\gamma,$$

mithin gleich Null ist, für die Variation δa der Ausdruck

$$(33.)\qquad \begin{cases} \delta a = \alpha\alpha_1\delta l + \beta\alpha_1\delta m + \gamma\alpha_1\delta n \\ \quad + \alpha\beta_1\delta l' + \beta\beta_1\delta m' + \gamma\beta_1\delta n' \\ \quad + \alpha\gamma_1\delta l'' + \beta\gamma_1\delta m'' + \gamma\gamma_1\delta n''. \end{cases}$$

Die Variationen δb und δc werden durch die gleichnamigen Verbindungen der beiden orthogonalen Substitutionen dargestellt, welche beziehungsweise mit einem Accent und mit zwei Accenten versehen sind. Sobald die Gleichung (33.) auf beiden Seiten mit der Grösse $2a$ multiplicirt wird, so können in dem Ausdruck der rechten Seite entweder mit Hülfe von (31.) die Grössen α_1, β_1, γ_1 oder mit Hülfe von (32.) die Grössen α, β, γ eliminirt werden. Hieraus entstehen beziehungsweise zwei Ausdrücke der Variation des Quadrats a^2, welche in der Gleichung (11.), Art. 1 des angeführten Beitrages zu der Theorie des Hauptaxenproblems bei Anwendung auf die erwähnten zwei Transformationsaufgaben enthalten sind, und von denen der erste Ausdruck die Bestimmung der Coefficienten α, β, ... γ'', der zweite die Bestimmung der Coefficienten α_1, β_1, ... γ_1'' vermittelt. In der genannten Untersuchung treten zwar die Variationen δa^2, δb^2, δc^2 auf, dagegen die Variationen δa, δb, δc nicht.

3.

Wenn man in dem Ausdruck (23.) statt der Variationen δl, δm, ... $\delta n''$ geeignete Systeme von Werthen substituirt, so folgen aus dem nothwendigen Verschwinden des Ausdrucks die sieben allgemeinen von *Dirichlet* aufgestellten Integrale des betreffenden Systems von Differentialgleichungen. Die Werthe $\frac{dl}{dt}$, $\frac{dm}{dt}$, ... $\frac{dn''}{dt}$ führen zu einem Integral, welches bei den Variationsproblemen dieser Art stets vorhanden ist, und das gegenwärtig mit dem Satze

von der Erhaltung der lebendigen Kraft zusammentrifft,

$$(34.) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = 2\varepsilon(H+\mathfrak{H}).$$

Die successive Ersetzung der Variationen δl, δm, ... $\delta n''$ durch die Werthsysteme

$$(35.) \qquad \begin{cases} 0 & -n & m & 0 & -n' & m' & 0 & -n'' & m'' \\ n & 0 & -l & n' & 0 & -l' & n'' & 0 & -l'' \\ -m & l & 0 & -m' & l' & 0 & -m'' & l'' & 0 \end{cases}$$

und durch die Werthsysteme

$$(36.) \qquad \begin{cases} 0 & 0 & 0 & -l'' & -m'' & -n'' & l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' & 0 & 0 & 0 & -l & -m & -n \\ -l' & -m' & -n' & l & m & n & 0 & 0 & 0 \end{cases}$$

hat die Wirkung, die vollständigen Variationen der Verbindungen Σl^2, $\Sigma\lambda^2$, Θ und daher auch der Function H zum Verschwinden zu bringen, und den Ausdruck $\Sigma\frac{d^2l}{dt^2}\delta l$ zu einem nach t genommenen vollständigen Differentialquotienten zu machen. Es entstehen daher durch die Anwendung von (35.) die drei Integrale

$$(37.) \qquad \begin{cases} m\frac{dn}{dt} - n\frac{dm}{dt} + m'\frac{dn'}{dt} - n'\frac{dm'}{dt} + m''\frac{dn''}{dt} - n''\frac{dm''}{dt} = \mathfrak{A}_{12}, \\ n\frac{dl}{dt} - l\frac{dn}{dt} + n'\frac{dl'}{dt} - l'\frac{dn'}{dt} + n''\frac{dl''}{dt} - l''\frac{dn''}{dt} = \mathfrak{A}_{20}, \\ l\frac{dm}{dt} - m\frac{dl}{dt} + l'\frac{dm'}{dt} - m'\frac{dl'}{dt} + l''\frac{dm''}{dt} - m''\frac{dl''}{dt} = \mathfrak{A}_{01}, \end{cases}$$

welche sich auf die Erhaltung der Rotation beziehen, und durch die Anwendung von (36.) die drei Integrale

$$(38.) \qquad \begin{cases} l'\frac{dl''}{dt} - l''\frac{dl'}{dt} + m'\frac{dm''}{dt} - m''\frac{dm'}{dt} + n'\frac{dn''}{dt} - n''\frac{dn'}{dt} = \mathfrak{E}_{12}, \\ l''\frac{dl}{dt} - l\frac{dl''}{dt} + m''\frac{dm}{dt} - m\frac{dm''}{dt} + n''\frac{dn}{dt} - n\frac{dn''}{dt} = \mathfrak{E}_{20}, \\ l\frac{dl'}{dt} - l'\frac{dl}{dt} + m\frac{dm'}{dt} - m'\frac{dm}{dt} + n\frac{dn'}{dt} - n'\frac{dn}{dt} = \mathfrak{E}_{01}, \end{cases}$$

welche die drei Flächensätze bilden. Die Integrationsconstanten sind mit $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}_{12}$, $\mathfrak{A}_{20}$, $\mathfrak{A}_{01}$, $\mathfrak{E}_{12}$, $\mathfrak{E}_{20}$, $\mathfrak{E}_{01}$ notirt.

Der Nachweis der Möglichkeit der charakterisirten Bewegung kommt

nach einer von *Dirichlet* l. c. §. 2 nachdrücklich hervorgehobenen Bemerkung darauf hinaus, zu zeigen, dass, wenn für eine beliebige Zeit die Werthe von $l, m, \ldots n''$ und ihren ersten Derivirten als endlich und völlig bekannt vorausgesetzt werden, aus den aufgestellten Gleichungen die Werthe der zweiten Derivirten $\frac{d^2 l}{dt^2}, \frac{d^2 m}{dt^2}, \ldots \frac{d^2 n''}{dt^2}$ abgeleitet werden können. Diese Werthe ergeben sich für uns unmittelbar, indem in dem Ausdrucke (23.) die Factoren der Variationen $\delta l, \delta m, \ldots \delta n''$ gleich Null gesetzt werden, und es bleibt nur nachzuweisen, dass die Function σ einen bestimmten endlichen Werth hat. Dem Variationsproblem des Integrals (24.) entspricht der Ausdruck (23.) in der Weise, dass die Bedingungsgleichung $\Theta = a_0 b_0 c_0$ nach *Lagranges* Methode des unbestimmten Factors behandelt ist, und dass dessen Stelle von dem Ausdruck $-2\varepsilon H + 2\sigma$ eingenommen wird. Der bekannte Verlauf dieser Methode gestattet aber den Schluss, dass in dem vorliegenden Falle, wo die Form Σdl^2, das Aggregat der Quadrate von neun Differentialen, unter dem Integralzeichen steht, die Function σ gleich einem Ausdrucke wird, dessen Nenner ein Aggregat von neun Quadraten ist, die nicht gleichzeitig verschwinden. Aus der Bedingung (5^a.) folgen die beiden Gleichungen

$$(39.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Theta}{dt} = \Sigma\lambda \dfrac{dl}{dt} = 0, \\ \dfrac{d^2\Theta}{dt^2} = \Sigma \dfrac{d\lambda}{dt}\dfrac{dl}{dt} + \Sigma\lambda \dfrac{d^2 l}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Man hat daher behufs der Bestimmung von σ in (23.) die Variationen $\delta l, \delta m, \ldots \delta n''$ respective durch die Grössen $\lambda, \mu, \ldots \nu''$ zu ersetzen. Dann geht $\delta \Sigma l^2$ in $2\Sigma l\lambda = 6\Theta$ über, ferner, da $\Sigma\lambda^2$ gleich dem Aggregat der drei Ausdrücke ist, welche aus der Verbindung

$$(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)-(ll'+mm'+nn')^2$$

durch Zeigervertauschung entstehen, die Variation $\delta\Sigma\lambda^2$ in $4\Theta\Sigma l^2$, und $\delta\Theta$ in $\Sigma\lambda^2$. Nach (30.) ist

$$\delta\left(\frac{H}{\Theta}\right) = -\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{(\delta\Sigma l^2 s^2 + \delta\Sigma\lambda^2 s + \delta\Theta^2)\,ds}{(s^3+\Sigma l^2 s^2+\Sigma\lambda^2 s+\Theta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und dieser Ausdruck verwandelt sich bei der angegebenen Substitution in den folgenden

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{(6\Theta s^2+4\Theta\Sigma l^2 s+2\Theta\Sigma\lambda^2)\,ds}{(s^3+\Sigma l^2 s^2+\Sigma\lambda^2 s+\Theta^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\int_0^\infty d\left(\frac{\Theta}{(s^3+\Sigma l^2 s^2+\Sigma\lambda^2 s+\Theta^2)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

welcher durch Ausführung der unbestimmten Integration den Werth -2π erhält. Wenn man also diese Substitution in (23.) ausführt, und den Ausdruck $\frac{d^2\Theta}{dt^2}$ aus (39.) subtrahirt, so ergiebt sich für σ die Gleichung

$$(40.) \qquad -\Sigma\frac{dl}{dt}\frac{d\lambda}{dt}+4\varepsilon\pi\Theta-2\sigma\frac{\Sigma\lambda^2}{\Theta}=0.$$

Zufolge der Gleichung (29.) ist der Factor $\Sigma\lambda^2$ gleich der Verbindung aus den Quadraten der Halbaxen $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$.

Die Function $G=\frac{1}{2}\Sigma l^2$, welche vorhin durch die Gleichungen (22.) eingeführt ist, steht zu dem Variationsproblem des Integrals (24.) in derselben Beziehung, wie in der citirten Abhandlung: *Sätze aus dem Grenzgebiet der Mechanik und der Geometrie* die mit $f_0(u)$ bezeichnete Function zu dem Variationsproblem des dortigen Integrals (26.). Sobald in dem obigen Ausdruck (23.) für die Variationen δl, δm, ... $\delta n''$ die Variabelen l, m, ... n'' selbst eingesetzt werden, so entsteht eine Darstellung des zweiten nach t genommenen Differentialquotienten der Function G, welche Darstellung in der Formel (39.) der so eben erwähnten Abhandlung als specieller Fall enthalten ist. Vermöge der bezeichneten Substitution geht jede homogene Function der Variabelen l, m, ... n'' nach dem *Euler*schen Fundamentalsatze in die mit ihrer Gradzahl multiplicirte Function über, so dass sich $\delta\Sigma l^2$ in $2\Sigma l^2$, $\delta\Sigma\lambda^2$ in $4\Sigma\lambda^2$, $\delta\Theta$ in 3Θ verwandelt. Somit wird aus der schon gebildeten Variation $\delta\left(\frac{H}{\Theta}\right)$ der Ausdruck

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^\infty\frac{(2\Sigma l^2s^2+4\Sigma\lambda^2s+6\Theta^2)\,ds}{(s^3+\Sigma l^2s^2+\Sigma\lambda^2s+\Theta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

welcher gleich dem Aggregat der beiden Integrale ist,

$$-2\pi\int_0^\infty\frac{ds}{(s^3+\Sigma l^2s^2+\Sigma\lambda^2s+\Theta^2)^{\frac{1}{2}}}-2\pi\int_0^\infty d\left(\frac{s}{(s^3+\Sigma l^2s^2+\Sigma\lambda^2s+\Theta^2)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Das zweite erweist sich durch Ausführung der unbestimmten Integration und Einsetzung der Grenzen als verschwindend, das erste ist gleich $-\frac{2H}{\Theta}$. Demnach wird in (23.) das Aggregat $-2\varepsilon\delta H+2\varepsilon H\frac{\delta\Theta}{\Theta}$ in den Ausdruck $2\varepsilon H$, der Bestandtheil $-2\sigma\frac{\delta\Theta}{\Theta}$ in den Ausdruck -6σ verwandelt, und es resultirt aus dem Verschwinden von (23.) die Gleichung

$$(41.) \qquad \Sigma\frac{d^2l}{dt^2}l=-2\varepsilon H+6\sigma,$$

aus der für die Function G die Gleichung

$$(41^*.) \qquad \frac{d^2G}{dt^2} - \Sigma\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = -2\varepsilon H + 6\sigma$$

hervorgeht. Die Function G kann vermöge der Gleichung (29.) auch durch die Verbindung aus den Quadraten der Halbaxen $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$ ausgedrückt werden.

4.

Sobald die Differentialquotienten $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dn'}{dt}$, $\frac{dl''}{dt}$, $\frac{dm''}{dt}$ für den Anfang der Bewegung gleich Null sind, so bleiben die Variabelen n, n', l'', m'', deren Anfangswerthe nach (4^a.) an sich gleich Null sind, für die ganze Dauer der Bewegung gleich Null. Denn wenn man aus dem vorgeschriebenen Verschwinden des Ausdrucks (23.) die Werthe der zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2n}{dt^2}$, $\frac{d^2n'}{dt^2}$, $\frac{d^2l''}{dt^2}$, $\frac{d^2m''}{dt^2}$ ableitet, so sind diese gleich Aggregaten von Ausdrücken, welche die betreffenden partiellen Differentialquotienten der drei Verbindungen Σl^2, $\Sigma\lambda^2$, Θ zu Factoren haben. Die genannten partiellen Differentialquotienten werden aber mit jenen vier Variabelen gleichzeitig gleich Null, und daraus folgt sogleich das Behauptete. Der hier herausgehobene Fall trifft mit demjenigen zusammen, welchen *Riemann* l. c. Art. 7 untersucht hat, und er umfasst auch den von *Dirichlet* l. c. §. 6 behandelten Fall eines Rotationsellipsoids. Durch die in Rede stehenden Annahmen gehen die Gleichungen (4.) in die Gleichungen

$$(42.) \qquad \begin{cases} x = l\frac{x_0}{a_0} + m\frac{y_0}{b_0}, \\ y = l'\frac{x_0}{a_0} + m'\frac{y_0}{b_0}, \\ z = n''\frac{z_0}{c_0}, \end{cases}$$

über, und die affine Beziehung zwischen den Räumen, welche vorhin S und S_0 genannt worden sind, wird eine solche, dass die z-Axe in S stets der z_0-Axe in S_0 entspricht. Hiemit bleibt die in die z-Axe fallende Hauptaxe des flüssigen Ellipsoids in ihrer Lage ungeändert, und bestimmt die Richtung, um welche in der Flüssigkeit allein Rotation stattfindet. Da gegenwärtig die vier Variabelen l, m, l', m' eine zusammengehörige Gruppe bilden, welcher die eine Variabele n'' gegenüber steht, so möge für Summationen, die sich

nur auf die vier ersten beziehen, das Zeichen S gebraucht werden. Es sei ferner

$$(43.)\qquad \begin{cases} K = \frac{1}{2}(l^2+m^2+l'^2+m'^2) = \frac{1}{2}\mathrm{S}l^2, \\ N = lm'-l'm, \end{cases}$$

dann bestehen die Gleichungen

$$(44.)\qquad \begin{cases} \Sigma l^2 &= 2K+n''^2, \\ \Sigma\lambda^2 &= 2Kn''^2+N^2, \\ \Theta &= Nn'', \end{cases}$$

und die Gleichung (29.) ergiebt die Gleichung

$$(45.)\qquad (s+a^2)(s+b^2)(s+c^2) = (s^2+2Ks+N)(s+n''^2),$$

welche sich vermöge der über die Anfangswerthe getroffenen Bestimmungen in die Gleichungen

$$(46.)\qquad \begin{cases} (s+a^2)(s+b^2) &= s^2+2Ks+N^2, \\ ab &= N, \\ c &= n'' \end{cases}$$

auflöst. Demnach nimmt die Function H die Gestalt an

$$(47.)\qquad H = \pi\int_0^\infty \frac{\Theta\, ds}{\sqrt{(s^2+2Ks+N)(s+n''^2)}},$$

und aus (23.) wird der Ausdruck

$$(48.)\qquad \mathrm{S}\frac{d^2l}{dt^2}\delta l+\frac{d^2n''}{dt^2}\delta n''-2\varepsilon\,\delta H+2\varepsilon H\frac{\delta\Theta}{\Theta}-2\sigma\frac{\delta\Theta}{\Theta}.$$

Was die vorhandenen allgemeinen Integrale anlangt, so erscheint das in (34.) ausgedrückte Integral der lebendigen Kraft gegenwärtig wie folgt

$$(49.)\qquad \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2 = 2\varepsilon(H+\mathfrak{H}).$$

Die geltende Voraussetzung bewirkt ferner, dass in (37.) und (38.) die Ausdrücke verschwinden, welche den Constanten $\mathfrak{A}_{12}$, $\mathfrak{A}_{20}$, $\mathfrak{E}_{12}$, $\mathfrak{E}_{20}$ gleich gesetzt sind. Die beiden übrigen Integrale nehmen, wenn bei $\mathfrak{A}_{01}$ und $\mathfrak{E}_{01}$ die Zeiger fortgelassen werden, die einfachere Form an

$$(50.)\qquad \begin{cases} l\frac{dm}{dt}-m\frac{dl}{dt}+l'\frac{dm'}{dt}-m'\frac{dl'}{dt} &= \mathfrak{A}, \\ l\frac{dl'}{dt}-l'\frac{dl}{dt}+m\frac{dm'}{dt}-m'\frac{dm}{dt} &= \mathfrak{E}. \end{cases}$$

Aus (40.) wird die Gleichung

$$(51.)\qquad -2n''\left(\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt}-\frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}\right)-2\frac{dn''}{dt}\frac{dN}{dt}+4\varepsilon\pi\Theta-2\sigma\frac{2Kn''^2+N^2}{\Theta}=0,$$

und aus (41*.) die Gleichung

$$(52.)\qquad \frac{d^2K}{dt^2}+\tfrac{1}{2}\frac{d^2(n''^2)}{dt^2}-\mathrm{S}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2-\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2=-2\varepsilon H+6\sigma.$$

Das System von Differentialgleichungen, welches dem Verschwinden des Ausdrucks (48.) unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung

$$\Theta=Nn''=a_0b_0c_0$$

entspricht, ist von der achten Ordnung, und die Gleichungen (49.) und (50.) enthalten drei Integrale desselben. Nach einer Bemerkung *Riemanns* sind indessen nur noch drei Integrale aufzusuchen, mit deren Hülfe die beiden fehlenden auf Quadraturen zurückgeführt werden können. Um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen und wegen der dabei zu Tage tretenden algebraischen Beziehungen gehe ich auf diese Zurückführung näher ein.

Es leuchtet ein, dass augenblicklich an die Stelle der Systeme von Gleichungen (6.) und (7.) die beiden Systeme treten

$$(53.)\qquad \begin{cases}\xi=\alpha x+\beta y,\\ \eta=\alpha' x+\beta' y,\\ \zeta=\qquad\quad z,\end{cases}$$

$$(54.)\qquad \begin{cases}\dfrac{\xi}{a}=\alpha_1\dfrac{x_0}{a_0}+\beta_1\dfrac{y_0}{b_0},\\ \dfrac{\eta}{b}=\alpha_1'\dfrac{x_0}{a_0}+\beta_1'\dfrac{y_0}{b_0},\\ \dfrac{z}{c}=\qquad\qquad\dfrac{z_0}{c_0}.\end{cases}$$

Mithin darf man die vorhandenen Substitutionscoefficienten folgendermassen durch die beiden Drehungswinkel φ und ψ ausdrücken, von denen der erste die Drehung der beweglichen Hauptaxen des flüssigen Ellipsoids, der zweite die Drehung von den Bildern dieser Hauptaxen in dem mit S_1 bezeichneten Raume misst,

$$(55.)\qquad \begin{cases}\alpha=\ \cos\varphi, & \beta=\sin\varphi,\\ \alpha'=-\sin\varphi, & \beta'=\cos\varphi,\\ \alpha_1=\ \cos\psi, & \beta_1=\sin\psi,\\ \alpha_1'=-\sin\psi, & \beta_1'=\cos\psi.\end{cases}$$

Diese Werthe mögen in den Ausdruck (33.) der Variation δa und den entsprechenden Ausdruck der Variation δb substituirt werden, wobei zu beachten ist, dass die Grössen γ, γ_1, γ', γ'_1 den Werth Null haben. So entstehen die Gleichungen

$$(56.)\quad \begin{cases} \delta a = \cos\varphi\cos\psi\,\delta l + \cos\varphi\sin\psi\,\delta m \\ \qquad + \sin\varphi\cos\psi\,\delta l' + \sin\varphi\sin\psi\,\delta m', \\ \delta b = \sin\varphi\sin\psi\,\delta l - \sin\varphi\cos\psi\,\delta m \\ \qquad - \cos\varphi\sin\psi\,\delta l' + \cos\varphi\cos\psi\,\delta m'. \end{cases}$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$(57.)\quad \begin{cases} \delta(a-b) = \cos(\varphi+\psi)\,\delta(l-m') + \sin(\varphi+\psi)\,\delta(l'+m), \\ \delta(a+b) = \cos(\varphi-\psi)\,\delta(l+m') + \sin(\varphi-\psi)\,\delta(l'-m). \end{cases}$$

Nun ziehen (46.) und (43.) die Gleichungen nach sich

$$(58.)\quad \begin{cases} (a-b)^2 = 2K-2N = (l-m')^2+(l'+m)^2, \\ (a+b)^2 = 2K+2N = (l+m')^2+(l'-m)^2, \end{cases}$$

und daher gelten die Relationen

$$(59.)\quad \begin{cases} l-m' = \sqrt{2K-2N}\cos(\varphi+\psi), \quad l'+m = \sqrt{2K-2N}\sin(\varphi+\psi), \\ l+m' = \sqrt{2K+2N}\cos(\varphi-\psi), \quad l'-m = \sqrt{2K+2N}\sin(\varphi-\psi). \end{cases}$$

Die Kenntniss der Grössen K und N und der Winkel $\varphi+\psi$ und $\varphi-\psi$ ergiebt also unmittelbar die Werthe der vier linearen Verbindungen $l-m'$, $l+m'$, $l'+m$, $l'-m$. Die Winkel $\varphi+\psi$ und $\varphi-\psi$ lassen sich aber durch Quadraturen bestimmen, sobald K und N als Functionen von t gefunden sind. Aus (59.) folgen für die Differentiale $d(\varphi+\psi)$ und $d(\varphi-\psi)$ die Ausdrücke

$$(60.)\quad \begin{cases} d(\varphi+\psi) = \dfrac{(l-m')\,d(l'+m)-(l'+m)\,d(l-m')}{2K-2N}, \\ d(\varphi-\psi) = \dfrac{(l+m')\,d(l'-m)-(l'-m)\,d(l+m')}{2K+2N}. \end{cases}$$

Die betreffenden Zähler hängen mit den in (50.) auftretenden Constanten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A}$ so zusammen

$$(61.)\quad \begin{cases} (l-m')\dfrac{d(l'+m)}{dt}-(l'+m)\dfrac{d(l-m')}{dt} = \mathfrak{E}+\mathfrak{A}, \\ (l+m')\dfrac{d(l'-m)}{dt}-(l'-m)\dfrac{d(l+m')}{dt} = \mathfrak{E}-\mathfrak{A}, \end{cases}$$

und daher werden die genannten Winkel, deren jeder für den Anfang der

Bewegung gleich Null ist, wie folgt, dargestellt

$$(62.)\quad \begin{cases} \varphi+\psi = \int_{t_0}^{t} \frac{(\mathfrak{E}+\mathfrak{A})\,dt}{2K-2N}, \\ \varphi-\psi = \int_{t_0}^{t} \frac{(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})\,dt}{2K+2N}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen folgen durch Integration aus den Gleichungen $(a-b)^2 w = \tau$, $(a+b)^2 w' = \tau'$ bei *Riemann*, l. c., Art. 7.

Für die Bildung der Differentialgleichungen, welche die Abhängigkeit der Grössen K und N von der Zeit t ausdrücken, ist die Bemerkung wesentlich, dass die ersten nach t genommenen Differentialquotienten der vier Variabelen l, m, l', m' in den Gleichungen (51.) und (52.) ausser in der Verbindung $\frac{dN}{dt}$ nur in den beiden Verbindungen $\mathfrak{S}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$ und $\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt}-\frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}$ vorkommen. Diese Verbindungen können nun mit Hülfe der beiden Integrale (50.) durch die Functionen K und N und deren erste Differentialquotienten ausgedrückt werden. Durch Differentiation nach t entstehen aus (58.) die beiden Gleichungen

$$(63.)\quad \begin{cases} \frac{d(K-N)}{dt} = (l-m')\frac{d(l-m')}{dt}+(l'+m)\frac{d(l'+m)}{dt}, \\ \frac{d(K+N)}{dt} = (l+m')\frac{d(l+m')}{dt}+(l'-m)\frac{d(l'-m)}{dt}, \end{cases}$$

und vermöge einer viel benutzten algebraischen Identität folgen aus diesen und aus (61.) die Relationen

$$(64.)\quad \begin{cases} (2K-2N)\left[\left(\frac{dl}{dt}-\frac{dm'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dl'}{dt}+\frac{dm}{dt}\right)^2\right]-\left(\frac{dK}{dt}-\frac{dN}{dt}\right)^2 = (\mathfrak{E}+\mathfrak{A})^2, \\ (2K+2N)\left[\left(\frac{dl}{dt}+\frac{dm'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dl'}{dt}-\frac{dm}{dt}\right)^2\right]-\left(\frac{dK}{dt}+\frac{dN}{dt}\right)^2 = (\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^2. \end{cases}$$

Diese liefern aber die gesuchten Darstellungen

$$(65.)\quad \begin{cases} 2\mathfrak{S}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{\left(\frac{dK}{dt}-\frac{dN}{dt}\right)^2+(\mathfrak{E}+\mathfrak{A})^2}{2K-2N}+\frac{\left(\frac{dK}{dt}+\frac{dN}{dt}\right)^2+(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^2}{2K+2N}, \\ 4\left(\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt}-\frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}\right) = -\frac{\left(\frac{dK}{dt}-\frac{dN}{dt}\right)^2+(\mathfrak{E}+\mathfrak{A})^2}{2K-2N}+\frac{\left(\frac{dK}{dt}+\frac{dN}{dt}\right)^2+(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^2}{2K+2N}. \end{cases}$$

Wegen der Gleichung $Nn'' = a_0 b_0 c_0$ kann statt der Function N die Variabele n'' bestimmt werden. Man erhält zwei Differentialgleichungen für die Grössen K und n'', indem man den Factor von $\delta n''$ in (48.) gleich Null setzt, und die

Gleichung (52.) hinzufügt, nämlich

$$(66.)\quad \begin{cases} \frac{d^2n''}{dt^2} = 2\varepsilon\frac{\partial H}{\partial n''} - 2\varepsilon\frac{H}{n''} + \frac{2\sigma}{n''}, \\ \frac{d^2K}{dt^2} + n''\frac{d^2n''}{dt^2} - \mathrm{S}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = -2\varepsilon H + 6\sigma. \end{cases}$$

Durch (51.) und (65.) sind $\mathrm{S}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$, $\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt} - \frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}$ und σ zu eliminiren, und $\frac{dN}{dt}$ ist durch $\frac{dn''}{dt}$ auszudrücken. Die Gleichung (49.) wird durch Substitution des Werthes von $\mathrm{S}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$ aus (65.) zu einem Integral des so eben aufgestellten Systems von Differentialgleichungen (66.); aus diesem Integral hat *Riemann* l. c. den Schluss gezogen, dass die Verbindung $K-N$ nicht Null werden, das heisst, dass das Gleichwerden der Halbaxen a und b nicht eintreten kann, sobald die Constante $\mathfrak{E}+\mathfrak{A}$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Die Voraussetzung, dass $\mathfrak{E}+\mathfrak{A}$ nicht gleich Null sei, wird hiermit ausdrücklich eingeführt, und dadurch das Verschwinden von $K-N$ ausgeschlossen.

5.

Wie schon erwähnt, würde die vollständige Integration des Systems (66.) noch die Auffindung von drei Integralen erfordern. Es wird jetzt die Annahme erörtert werden, dass die halbe Hauptaxe c des Ellipsoids einen im Verhältniss zu den beiden anderen halben Hauptaxen sehr grossen Werth habe und behalte. Diese Annahme, deren Berechtigung vorerst nachgewiesen werden muss, kommt der Verfügung über zwei Integrationsconstanten gleich; mithin bleibt dann nur noch eine Integration zu leisten übrig. Zunächst soll die Vereinfachung untersucht werden, welche durch die bezeichnete Annahme in dem Ausdruck der Function H hervorgerufen wird. In der Darstellung von H, welche in (21.) gegeben ist, führe ich statt der Variabele s eine neue Variabele $u = \frac{s}{c^2}$ ein, dann entsteht die Gleichung

$$(67.)\quad H = \pi abc\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\left(u+\frac{a^2}{c^2}\right)\left(u+\frac{b^2}{c^2}\right)(u+1)}}.$$

Aus derselben folgt, indem erstens das Integrationsintervall in zwei Theile getheilt wird, die sich von 0 bis 1, und von 1 bis ∞ erstrecken, und indem zweitens gleiche Elemente addirt und subtrahirt werden, die fernere Gleichung

$$(68.)\quad \begin{cases} \dfrac{H}{\pi ab} = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(u+\frac{a^2}{c^2}\right)\left(u+\frac{b^2}{c^2}\right)}} + \int_0^1 \frac{1-\sqrt{u+1}}{u\sqrt{u+1}}\,du + \int_1^\infty \frac{du}{u\sqrt{u+1}} \\ \quad + \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{u}{\sqrt{\left(u+\frac{a^2}{c^2}\right)\left(u+\frac{b^2}{c^2}\right)}} - 1\right)\frac{1-\sqrt{u+1}}{u\sqrt{u+1}}\,du \\ \quad + \displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{u}{\sqrt{\left(u+\frac{a^2}{c^2}\right)\left(u+\frac{b^2}{c^2}\right)}} - 1\right)\frac{du}{u\sqrt{u+1}}. \end{cases}$$

Die beiden Integrale der zweiten und der dritten Zeile nähern sich, wenn c im Verhältniss zu a und b über jedes Mass hinaus wächst, der Null. Denn der Ausdruck $\dfrac{u}{\sqrt{\left(u+\frac{a^2}{c^2}\right)\left(u+\frac{b^2}{c^2}\right)}} - 1$ ist für positive Werthe von u gleich einem negativen echten Bruche, dessen numerischer Werth mit wachsendem u immerfort abnimmt, und bei hinreichend grossem $\frac{c}{a}$ und $\frac{b}{a}$ für einen beliebig zu wählenden Werth von u der Null beliebig nahe kommt. Da nun der Factor

$$\frac{1-\sqrt{u+1}}{u\sqrt{u+1}} = \frac{-1}{\sqrt{u+1}\,(1+\sqrt{u+1})}$$

auch für $u=0$ endlich bleibt, so gilt die aufgestellte Behauptung für das erste der in Rede stehenden beiden Integrale, und da der Factor $\dfrac{du}{u\sqrt{u+1}}$ bei wachsendem u wie $u^{-\frac{3}{2}}$ abnimmt, so gilt die Behauptung auch für das zweite der genannten Integrale. Demnach wird die Function $\dfrac{H}{\pi ab}$ bei wachsenden Werthen von $\frac{c}{a}$ und $\frac{c}{b}$ mit beliebiger Genauigkeit durch das Aggregat der drei Integrale dargestellt, die sich in der ersten Zeile der rechten Seite von (68.) befinden. Wie sich leicht ergiebt, hat das erste von diesen den Werth $2\log\dfrac{\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}}{a+b}$, welcher gegenwärtig durch den Werth $2\log\dfrac{2c}{a+b}$ ersetzt werden darf; ferner hat das Aggregat des zweiten und dritten Integrals den Werth $2\log 2$. Somit resultirt für die Function H die Gleichung

$$(69.)\qquad H = 2\pi ab\log\frac{4c}{a+b}.$$

Dieselbe verwandelt sich, indem man die Gleichungen $c=n''$, $(a+b)^2=2K+2N$, $ab=N$ anwendet, und die constanten Anfangswerthe K_0 und N_0 einführt, in

die Gleichung

$$(70.) \qquad H = \pi N\Big(\log\frac{8n''^2}{K_0+N_0} - \log\frac{K+N}{K_0+N_0}\Big).$$

Es kommt jetzt darauf an, sich zu überzeugen, dass, wenn für irgend eine Zeit die Halbaxe n'' einen im Verhältniss zu den beiden anderen Halbaxen a und b sehr grossen Werth hat, und wenn zugleich $\frac{dn''}{dt} = 0$ ist, der Differentialquotient $\frac{d^2n''}{dt^2}$ verschwindet; denn unter diesen Verhältnissen bleibt der einmal angenommene Werth der Halbaxe n'' beständig derselbe. Wenn man den Ausdruck für H und für $\frac{\partial H}{\partial n''}$ aus (70.) entnimmt und in die erste Gleichung (66.) einsetzt, so erhält man

$$(71.) \qquad \frac{d^2n''}{dt^2} = \frac{4\varepsilon\pi N}{n''} - 2\varepsilon\pi\frac{N}{n''}\Big(\log\frac{8n''^2}{K_0+N_0} - \log\frac{K+N}{K_0+N_0}\Big) + \frac{2\sigma}{n''}.$$

Dieser Ausdruck des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2n''}{dt^2}$ hat offenbar, wofern die Grössen K, N und σ in festen Grenzen eingeschlossen bleiben, die Eigenschaft, für einen hinreichend grossen Werth des Verhältnisses $\frac{n''}{\sqrt{N}}$ gleich einer beliebig kleinen Grösse zu werden, da die einzelnen Summanden, und namentlich auch der Summand $-2\varepsilon\pi\sqrt{N}\cdot\frac{\sqrt{N}}{n''}\log\frac{8n''^2}{K_0+N_0}$ nach dem bekannten Verhalten des Logarithmus, diese Eigenschaft besitzen. Die Grösse σ wird durch die Gleichung (51.) bestimmt, welche, mit der Grösse $\Theta = Nn''$ dividirt, die folgende Gestalt annimmt

$$(72.) \qquad -\frac{2\Big(\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt} - \frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}\Big)}{N} - \frac{2\frac{dn''}{dt}}{n}\frac{\frac{dN}{dt}}{N} + 4\varepsilon\pi - \frac{2\sigma}{N}\Big(\frac{2K}{N} + \frac{N}{n''^2}\Big) = 0.$$

In Folge der Unveränderlichkeit der Grösse $\Theta = Nn''$ ist der Ausdruck

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{n''}\frac{dn''}{dt}$$

und daher gegenwärtig verschwindend. Vermöge der Gleichung (72.) gründet sich somit die Endlichkeit der Grösse σ und deshalb auch die Endlichkeit des Druckes in der Flüssigkeit, auf die Endlichkeit der Verbindung

$$\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt} - \frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}.$$

Der Werth dieser Verbindung ist in (65.) ausgedrückt. Das Verschwinden

des Nenners $K-N$, oder das Gleichwerden der halben Hauptaxen a und b wird dadurch ausgeschlossen, dass der Constante $\mathfrak{E}+\mathfrak{A}$ ein von Null verschiedener Werth vorgeschrieben ist. Wofern also zu der Zeit $t=t_0$ die Halbaxe n'' einen sehr grossen Werth n_0'' und $\frac{dn''}{dt}$ den Werth Null erhält, so ist unter den angeführten Voraussetzungen für die ganze Dauer der Bewegung $n''=n_0''$.

6.

Bei der Annahme, dass die halbe Hauptaxe n'' unveränderlich den grossen Werth n_0'' hat, verwandelt sich das flüssige Ellipsoid in einen unendlichen elliptischen Cylinder, und zwar hat der gegen die Axe senkrechte Querschnitt desselben einen constanten Inhalt, da die Bedingung $Nn''=a_0b_0c_0$ wegen der Gleichung $n=n_0''=c_0$ zu der Gleichung

$$(73.) \qquad N=a_0b_0$$

führt. In dem Ausdrucke (48.) fällt der in die Variation $\delta n''$ multiplicirte Bestandtheil, wie sich gezeigt hat, fort, und das zu lösende Bewegungsproblem kommt auf die Forderung hinaus, dass die erste Variation des Integrals

$$(74.) \qquad \int_{t_0}^{t'}\left(\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm}{dt}\right)^2+\left(\frac{dl'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm'}{dt}\right)^2\right)+2\varepsilon H\right)dt$$

unter der Bedingung (73.) und für feste Anfangswerthe und Endwerthe der Variabelen l, m, l', m' zum Verschwinden gebracht werde. Der Werth der Function H ist aus der Gleichung (70.) zu entnehmen; weil aber nach (73.) die Gleichung $N=N_0=l_0m_0'$ gilt, und weil der constante Bestandtheil

$$\pi N_0 \log\frac{8n_0''^2}{K_0+N_0}$$

der Function H auf das in Rede stehende Variationsproblem keinen Einfluss ausübt, so kann derselbe für die Auflösung des Problems ebenso wohl weggedacht werden. Dieses Problem ist dem allgemeineren Variationsproblem des Integrals (24.) durchaus ähnlich, und kann nach den vorhin erwähnten Anschauungen als das Problem der Bewegung eines Punktes in einer Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen gedeutet werden, wo zwischen den Coordinaten l, m, l', m' des fingirten Punktes die Gleichung $N=l_0m_0'$ besteht, und das Quadrat des Linearelements durch das Aggregat der Quadrate

$$dl^2+dm^2+dl'^2+dm'^2$$

repräsentirt wird. An die Stelle der Function $G = \frac{1}{2}\Sigma l^2$ tritt jetzt die Function $K = \frac{1}{2}(l^2+m^2+l'^2+m'^2)$, indem sie bei dem Variationsproblem des Integrals (74.) denjenigen Begriff ausdrückt, welcher in der mehrfach erwähnten Abhandlung: *Sätze aus dem Grenzgebiet der Mechanik und der Geometrie* bei dem Variationsproblem des dortigen Integrals (26.) mit $f_0(u)$ bezeichnet ist.

Man hat für das vorliegende Problem in (50.) die Integrale

$$\begin{cases} l\frac{dm}{dt} - m\frac{dl}{dt} + l'\frac{dm'}{dt} - m'\frac{dl'}{dt} = \mathfrak{A}, \\ l\frac{dl'}{dt} - l'\frac{dl}{dt} + m\frac{dm'}{dt} - m'\frac{dm}{dt} = \mathfrak{E}, \end{cases}$$

wo die Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$ folgendermassen durch die Anfangswerthe ausgedrückt werden können

$$(75.) \qquad \begin{cases} l_0\left(\frac{dm}{dt}\right)_0 - m_0'\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0 = \mathfrak{A}, \\ l_0\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0 - m_0'\left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = \mathfrak{E}. \end{cases}$$

Ferner dienen zu der Bestimmung der Winkel φ und ψ die Gleichungen (62.), welche durch die Substitution $N = N_0$ das Ansehen erhalten

$$\begin{cases} \varphi+\psi = \int_{t_0}^{t} \frac{(\mathfrak{E}+\mathfrak{A})\,dt}{2K-2N_0}, \\ \varphi-\psi = \int_{t_0}^{t} \frac{(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})\,dt}{2K+2N_0}. \end{cases}$$

In dem Integral der lebendigen Kraft (49.) fällt der Ausdruck $\frac{dn''}{dt}$ wegen der Unveränderlichkeit der Grösse n'' fort, und durch Einführung der Anfangswerthe nimmt jene Gleichung mit Hülfe der Bezeichnung

$$(76.) \qquad \left(\frac{dl}{dt}\right)_0^2+\left(\frac{dm}{dt}\right)_0^2+\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0^2+\left(\frac{dm'}{dt}\right)_0^2 = v_0^2$$

die von dem Bestandtheil $\varepsilon\pi N_0 \log\frac{8n''^2}{K_0+N_0}$ der Function H befreite Gestalt an

$$(77.) \qquad \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm}{dt}\right)^2+\left(\frac{dl'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm'}{dt}\right)^2\right) = \tfrac{1}{2}v_0^2 - 2\varepsilon\pi N_0 \log\frac{K+N_0}{K_0+N_0}.$$

Die Constante K_0 hat den Werth $K_0 = \frac{1}{2}(l_0^2+m_0'^2)$. Der Werth der linken Seite von (77.) ist vermöge der ersten Gleichung in (65.) nur von den Grössen K und $\frac{dK}{dt}$ abhängig, da $N = N_0$ und $\frac{dN}{dt} = 0$ zu setzen ist. Wenn man daher den bezeichneten Ausdruck in die linke Seite von (77.) substituirt, und

die Gleichung mit dem Factor $K^2-N_0^2$ multiplicirt, so entsteht für den Differentialquotienten $\frac{dK}{dt}$ die Bestimmung

$$(78.)\quad \begin{cases} 2K\left(\frac{dK}{dt}\right)^2 = R(K), \\ R(K) = -(\mathfrak{E}+\mathfrak{A})^2(K+N_0)-(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^2(K-N_0) \\ \qquad +\left(4v_0^2-16\varepsilon\pi N_0\log\frac{K+N_0}{K_0+N_0}\right)(K^2-N_0^2). \end{cases}$$

Hieraus folgt das letzte für die vollständige Auflösung des Problems erforderliche Integral, welches die Zeit $t-t_0$ als Function der Variabele K darstellt,

$$(79.)\quad t-t_0 = \int_{K_0}^{K}\frac{\sqrt{2K}}{\sqrt{R(K)}}\,dK.$$

Die unter dem Quadratwurzelzeichen befindliche Function $R(K)$ muss für die ganze Dauer der Bewegung positiv bleiben. Der Werth $R(K_0)$ kann keinesfalls negativ sein. Da nun $R(K)$ für den kleinsten möglichen Werth von K, nämlich $K=N_0$, gleich der negativen Grösse $-(\mathfrak{E}+\mathfrak{A})^2 2N_0$ ist, die nach der vorgeschriebenen Eigenschaft der Constante $\mathfrak{E}+\mathfrak{A}$ nicht gleich Null werden kann, da ferner $R(K)$ für einen immerfort wachsenden Werth von K nothwendig ebenfalls negativ werden muss, so existiren für die Function $R(K)$ zwei Grenzwerthe, welche dieselbe zum Verschwinden bringen, und zwischen denen $R(K)$ positiv bleibt. Das Verschwinden der Function $R(K)$ möge für diese beiden Werthe so erfolgen, dass das Integral (79.) oder der Werth $t-t_0$ immer gleich einer endlichen Grösse ist, und dies geschieht, wofern der Differentialquotient $\frac{dR(K)}{dK}$ mit $R(K)$ nicht gleichzeitig verschwindet. Alsdann lehrt die Gleichung (79.), dass die Variabele K sich in gleichen Zeiträumen von einem Minimumswerth bis zu einem Maximumswerth, zu dem ersteren zurück, und ohne Ende so fort bewegt. Die Gestalt der Durchschnittsellipse des flüssigen Cylinders schwankt deshalb, während der Inhalt der Ellipse constant bleibt, rein periodisch zwischen zwei Zuständen, in denen die Variabele K, das ist die halbe Summe der Quadrate ihrer halben Hauptaxen, ein Minimum und ein Maximum ist.

Durch die Einführung der Variabele K statt der Variabele t erhalten die Verbindungen der beiden Drehungswinkel $\varphi+\psi$ und $\varphi-\psi$ die folgende Darstellung:

$$(80.)\quad \begin{cases} \varphi+\psi = \int_{K_0}^{K} \frac{\mathfrak{E}+\mathfrak{A}}{2K-2N_0}\,\frac{\sqrt{2K}}{\sqrt{R(K)}}\,dK, \\ \varphi-\psi = \int_{K_0}^{K} \frac{\mathfrak{E}-\mathfrak{A}}{2K+2N_0}\,\frac{\sqrt{2K}}{\sqrt{R(K)}}\,dK. \end{cases}$$

Jeder der beiden Ausdrücke setzt das Wachsen in dem Sinne ohne Ende fort, in dem es einmal begonnen ist, und wächst unter den erwähnten Voraussetzungen jedes Mal um eine bestimmte unveränderliche Grösse, wenn die Variabele K ihre Periode vollständig durchläuft. Die Werthe der Variabelen l, m, l', m' werden jetzt durch die Gleichungen (59.), in denen $N = N_0$ zu setzen ist, als Functionen der Variabele K so dargestellt

$$(81.)\quad \begin{cases} l-m' = \sqrt{2K-2N_0}\cos(\varphi+\psi), \quad l'+m = \sqrt{2K-2N_0}\sin(\varphi+\psi), \\ l+m' = \sqrt{2K+2N_0}\cos(\varphi-\psi), \quad l'-m = \sqrt{2K+2N_0}\sin(\varphi-\psi). \end{cases}$$

Die Combination von (72.) und (65.) liefert endlich den Ausdruck der Grösse σ als Function von K

$$(82.)\quad \sigma = \varepsilon\pi\frac{N_0^2}{K} + \mathfrak{E}\mathfrak{A}\frac{N_0}{4K^2} + \frac{N_0^2}{4K^2}\left(v_0^2 - 4\varepsilon\pi N_0 \log\frac{K+N_0}{K_0+N_0}\right).$$

Demnach erweist sich die Grösse K als die naturgemässe unabhängige Variabele des gelösten Problems, und die Gleichung (79.), aus welcher durch Umkehrung die Abhängigkeit der Grösse K von der Zeit t zu bestimmen ist, erhält für dieses Problem dieselbe Bedeutung, welche die *Kepler*sche Gleichung für das Planetenproblem hat.

Bonn, den 9. März 1874.

Ueber die Theorie der Elektrodynamik.

Dritte Abhandlung.

Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern.

(Von Herrn *H. Helmholtz.*)

Meine Abhandlung im 72. Bande dieses Journals behandelt die elektrodynamischen Wirkungen nur in ruhenden leitenden Körpern; in solchen beschränken sich die genannten Wirkungen auf die Induction elektromotorischer Kräfte. Dieser Fall erschien als der verhältnissmässig einfachste für die theoretische Behandlung, weil die bestehende elektrische Bewegung irgend einen Arbeitswerth, das heisst ein *Potential*, nothwendig haben muss, und der Werth desselben für geschlossene Stromleiter als wohlbekannt angesehen werden durfte. Der Zweck jener Arbeit war ein wesentlich praktischer; es handelte sich darum zu untersuchen, welche verschiedenen Formen der Werth der elektrodynamischen Energie für ungeschlossene Ströme etwa noch haben konnte, wenn man ihn für geschlossene Ströme durch die von *F. E. Neumann* dem Vater (beziehlich durch *Gauss**)) gegebenen Ausdrücke als bekannt ansieht; ferner bei welcher Art von Versuchen sich möglicher Weise Unterschiede zeigen könnten, welche von den noch unbestimmten Theilen des Ausdrucks herrührten. Hielt man an der Wahrscheinlichkeit fest, dass gewisse allgemeinste Eigenschaften der bekannten Theile der gesuchten Ausdrücke auch den noch unbekannten zukommen würden, so liess sich das, was zweifelhaft blieb, auf den unbekannt bleibenden Werth einer Constanten k zurückführen, welche in der Lehre von der Elektrodynamik etwa dieselbe Rolle spielt, wie in der Lehre von der Elasticität diejenige Constante, welche das Verhältniss zwischen dem Widerstande gegen Compression und dem gegen Schiebung der Schichten angiebt. Ueber diese Constante ergab die Untersuchung nur soviel, dass sie nicht negativ sein dürfe (ebenso wenig, wie die genannte Constante der Elasticität), weil sonst das Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in einem ruhenden Leiter labil würde, und sich dann die Möglichkeit elektrischer Be-

*) *Gauss* Werke, Bd. V., S. 610 u. 613. Die nachgelassenen Papiere aus dem Jahre 1835 enthalten den Werth des elektrodynamischen Potentials.

wegungen ergeben hätte, deren Arbeitswerth geringer gewesen wäre als der des Ruhezustandes.

Ich habe in jener Arbeit die von Herrn *F. E. Neumann* in die Wissenschaft einmal eingeführten Bezeichnungen beibehalten. Die Grösse, die in demselben Sinne wie die lebendige Kraft ponderabler bewegter Massen das der elektrischen Bewegung entsprechende Quantum von Energie angiebt, und die man deshalb mit *Cl. Maxwell* auch passend die *actuelle Energie der elektrischen Bewegung* nennen kann, ist gleich dem *negativen Werthe des von Neumann senior definirten elektrodynamischen Potentials,* und nur in diesem Sinne ist letzterer Ausdruck an den meisten Stellen jener Arbeit beibehalten worden.

Der genannte Begriff wird also daselbst ohne jede Beziehung auf die bei Bewegungen von Leitern eintretenden elektrodynamischen Erscheinungen gebraucht, und seine Anwendung bleibt unberührt durch die Einwände, welche seitdem von mehreren Physikern und Mathematikern gegen eine erweiterte Anwendung desselben auf die von Leitern elektrischer Ströme gegen einander ausgeübten Bewegungskräfte (*ponderomotorische Kräfte* nach Herrn *C. Neumann* juniors zweckmässiger Nomenclatur) erhoben worden sind. Letzteres entspricht einer anderen Bedeutung des elektrodynamischen Potentials, die mit der erst erwähnten nicht nothwendig verbunden ist, sich aber historisch zuerst entwickelt und die Terminologie bestimmt hat. Danach spielt das elektrodynamische Potential den ponderomotorischen Kräften zweier linearer Stromleiter gegenüber dieselbe Rolle, wie das magnetische oder elektrostatische Potential den magnetischen oder elektrischen Anziehungskräften gegenüber. Es giebt in diesem Sinne die potentielle Energie der ponderomotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprungs an, welche, wenn die Stromstärken in den leitenden Fäden unverändert bleiben, bei den Bewegungen der Leiter in mechanische Arbeit verwandelt werden kann. Und zwar *ist die bei einer bestimmten Verschiebung der Leiter und bei unverändert gebliebenen Stromintensitäten von den ponderomotorischen Kräften elektrodynamischen Ursprungs geleistete Arbeit gleich zu setzen der Differenz, um welche der Werth des elektrodynamischen Potentials während dieser Verschiebung kleiner geworden ist.* Bei diesem Gebrauche des Potentialbegriffs ist also die Rede von einer besonderen Art von Arbeit (der mechanischen bei Bewegung der Leiter geleisteten), welche unter besonderen beschränkenden Bedingungen (Constanz der Stromintensitäten) geleistet werden kann. Wenn wir in dem Sinne meiner früheren Arbeit das negativ genommene elektrodynamische Potential gleich der actuellen Energie

der elektrischen Bewegung setzen, so ist dabei keine Beschränkung weder der einen noch der andern Art zu machen nöthig. Der Beweis, dass das elektrodynamische Potential negativ genommen das Arbeitsäquivalent der elektrischen Bewegung ausdrücke, ist allerdings dort nur geführt worden unter der Voraussetzung, dass die elektrischen Ströme ohne Bewegung der Leiter verlaufen und erlöschen. Die Wärme, welche dabei in den durchströmten Leitern entwickelt wird, ergiebt sich als das Aequivalent jenes Arbeitswerthes. Dadurch ist aber die Bedeutung jener Grösse als eines Arbeitsäquivalents ein für alle Mal festgestellt.

Die Aufgabe des vorliegenden Aufsatzes ist nun, den Umfang festzustellen, in welchem die andere und ursprünglichere Bedeutung des elektrodynamischen Potentials als eines Potentials der ponderomotorischen Kräfte den vorhandenen Thatsachen gegenüber zulässig erscheint.

Die Hypothese, dass die ponderomotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprungs, wenn die Intensität sämmtlicher elektrischer Strömungen in deren materiellen leitenden Fäden constant bleibt, ein Potential haben, können wir mit dem von Herrn *C. Neumann* angewendeten Namen kurz das *Potentialgesetz der ponderomotorischen elektrodynamischen Kräfte* nennen. Ist der Werth des Potentials gegeben, und wird ferner die Hypothese gemacht, dass die Grösse und Richtung der genannten ponderomotorischen Kräfte unabhängig von den gleichzeitig erfolgenden virtuellen oder actuellen Verschiebungen der Leiterelemente sei, so ist dadurch die Grösse dieser Kräfte vollständig bestimmt.

Thatsächlich bekannt ist die Grösse der ponderomotorischen Kräfte bisher erst für die Wirkungen von je zwei oder mehreren geschlossenen Strömen auf einander, und für die Wirkungen eines geschlossenen Stroms auf seine einzelnen Theile. Wir dürfen das *Ampère*sche Gesetz als einen thatsächlich richtigen gesetzlichen Ausdruck dieses bis jetzt bekannten Bereichs von Erscheinungen ansehen.

Wir werden also zunächst nachzuweisen haben, dass für geschlossene Ströme bei beliebiger Biegsamkeit, Dehnbarkeit und Verschiebbarkeit der Leiterstücke die Berechnung der ponderomotorischen Kräfte aus dem Potentialgesetze genau dieselben Werthe giebt, wie die aus dem *Ampère*schen Gesetze.

Dieser Nachweis ist von Herrn *F. E. Neumann* *) selbst nur gegeben

---

*) Ueber ein allgemeines Prinzip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Berlin 1848. — Abhandl. d. Berliner Akademie 1847.

worden für den Fall, dass die betreffenden Stromleiter linear sind, und jeder von ihnen unveränderliche Form und Grösse hat. Vergegenwärtigt man sich den Zustand der mathematischen Theorie der elektrischen Vorgänge zur Zeit der Veröffentlichung dieses Beweises, so ist leicht zu verstehen, warum der Autor desselben in seiner vorsichtigen, an wohlbestätigten Thatsachen streng festhaltenden Weise sich jene Beschränkungen auferlegte, und die Tragweite seines wichtigen und fruchtbaren Gesetzes, welches die ganze Elektrodynamik zu umfassen fähig war, zunächst noch so eng abgrenzte. Zu jener Zeit war nämlich die Theorie der Vertheilung elektrischer Ströme in Leitern von drei Dimensionen noch nicht durchgearbeitet, also konnten auch die Wirkungen der elektrodynamischen Induction auf nicht lineare Leiter noch nicht behandelt werden. Das Potential eines Leiters auf sich selbst wird aber unendlich gross, wenn man ihn als eine Linie im strengen Sinne des Worts betrachtet, und die Kräfte, welche die Theile eines seine Form verändernden Leiters auf einander ausüben, lassen sich nicht behandeln, ehe der Werth des Potentials, welches er auf sich selbst ausübt, sicher berechnet werden kann.

Was im Jahre 1847 mangelte, ist jetzt geleistet, ist theoretisch und experimentell durchgearbeitet zum grossen Theil durch Herrn *Neumann* senior selbst und seine Schüler, so dass, was an dem damals gegebenen Beweise fehlte, jetzt verhältnissmässig leicht zu ergänzen ist. Die mathematischen Methoden dafür waren durch die früheren Arbeiten gegeben, und ich würde kaum gewagt haben für eine solche Arbeit den Platz in diesem Journale in Anspruch zu nehmen, wenn nicht die Schwierigkeiten, auf welche die Herren *J. Bertrand* *), *C. Neumann* **) und *Riecke* ***) bei der Anwendung des Potentialgesetzes gestossen sind, und die Einwände, die sie daraus hernehmen zu dürfen glaubten, mir gezeigt hätten, dass eine methodische Durchführung des Beweises mit Beseitigung der früheren beschränkenden Annahmen wünschenswerth und nützlich sein würde.

Die Einwände der letztgenannten beiden Herren beziehen sich auf die Erscheinungen an Stromkreisen mit Gleitstellen. Eine vollständig genügende Behandlung dieser Fälle ist nur zu geben, wenn man die Werthe der Kräfte

---

*) Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc. 1872, 14 Octobre; 1873, 3 et 10 Novembre.

**) Berichte der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1872, 3. August. — Mathematische Annalen Bd. V, 602.

***) Göttinger Nachrichten. 1872, 24. August.

in Leitern von drei Dimensionen schon bestimmt hat. Bei den wirklich ausführbaren Versuchen mit Gleitstellen haben wir immer eine flüssige Schicht (Quecksilber, elektrolytische Flüssigkeiten oder auch wohl elektrische Funken und Lichtbogen) zwischen den Leitern, welche einen continuirlichen Uebergang der Bewegung vom einen zum anderen Leiter herstellen, so dass auch an der Gleitstelle die Componenten der Geschwindigkeit continuirliche Functionen der Coordinaten bleiben. Dies letztere muss vorausgesetzt werden, wenn das Potentialgesetz überhaupt anwendbar sein soll. Nun lässt sich aber zeigen, dass die Wirkung einer sehr dünnen Uebergangsschicht dieser Art von ihrer Dicke unabhängig ist, und sich auch nicht ändert, wenn letztere verschwindend klein wird, so dass die Componenten der Geschwindigkeit an der Gleitfläche discontinuirlich werden. Daraus ergiebt sich dann, wie man die Sache zu behandeln hat, wenn man zur Vereinfachung der Rechnung die mathematische Fiction einer absoluten Discontinuität der Bewegung einführen will. Wenn man diese Discontinuität analytisch richtig behandelt, als Grenze eines continuirlichen Ueberganges, so ergiebt das Potentialgesetz genau dieselben Folgerungen wie das *Ampère*sche, die auch in guter Uebereinstimmung mit den bekannten Thatsachen sind.

Während für geschlossene Stromkreise die genannten beiden Gesetze die vollkommenste Uebereinstimmung zeigen bei ganz beliebigen Formveränderungen der Leiter, so unterscheiden sie sich von einander in Bezug auf die ponderomotorischen Wirkungen an ungeschlossenen Leitern. Ungeschlossene Leiter haben Enden, und diese Enden sind dadurch charakterisirt, dass an ihnen freie positive oder negative Elektricität auftritt oder verschwindet. Das *Ampère*sche Gesetz reducirt alle ponderomotorischen Wirkungen auf anziehende oder abstossende Kräfte zwischen Stromelementen. Ist das Potentialgesetz auch für ungeschlossene Ströme gültig, so müssen ausser 1) den *Ampère*schen Kräften zwischen Stromelementen, auch noch 2) anziehende oder abstossende Kräfte zwischen Stromelementen und Stromenden und 3) eben solche zwischen Stromenden existiren. Die Art des Stromendes charakterisirt man am zweckmässigsten durch den Werth von $\frac{de}{dt}$, wo e die freie positive Elektricität an der betreffenden Stelle bezeichnet. Die Kräfte ad 2) sind proportional $\frac{de}{dt}$ und der auf das Stromende e hin gerichteten Componente der Strömung in dem wirkenden Stromelemente, abstossend, wenn diese Componente und $\frac{de}{dt}$ gleiches

Zeichen haben, übrigens umgekehrt proportional der Entfernung beider und unabhängig von der Constante k, also jeder Form des Potentialgesetzes in gleicher Stärke zukommend. Die Kräfte ad 3) für zwei Stromenden mit den freien Elektricitäten e und ε sind proportional dem Product $\frac{de}{dt}\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot(1+k)$; sie sind anziehend, wenn die beiden Differentialquotienten gleiches Zeichen haben, und unabhängig von der Entfernung. Sie könnten nur bei dem unzulässigen Werthe $k=-1$ wegfallen.

An den Umstand, dass hier Kräfte aufgeführt werden, deren Intensität von der Entfernung unabhängig ist, hat Herr *Bertrand* *) Einwendungen geknüpft, welche berechtigt sein würden, wenn es sich um unabhängig von einander bestehende Elementarkräfte handelte. Das Potentialgesetz in seiner ursprünglichen Form kennt ebenso gut, wie das *Ampère*sche nur Fernwirkungen, die mit wachsender Entfernung abnehmen. Wenn man aber die Differenz zwischen den von beiden Gesetzen angezeigten Wirkungen nimmt, und diese Differenz nach Art der von *Ampère* gewählten Darstellung in einfache anziehende Kräfte auflöst, die von Punkt zu Punkt wirken, so kommt man auf Kräfte, die von der Entfernung unabhängig sind. Da aber jede ungeschlossene Linie zwei Enden hat, und von beiden Enden gleich grosse und entgegengesetzte Kräfte dieser Art ausgehen, diese sich auch der Natur der Sache nach nothwendig noch mit anderen von den Elementen der Stromcurve herrührenden Summanden verbinden, so kommt es nicht darauf an, ob die zu einem bestimmten Zwecke ausgesonderten Theile einzeln, sondern nur darauf, ob ihre Summe physikalisch unzulässige Folgerungen giebt. Das letztere aber ist nicht der Fall.

Diese Verhältnisse sind in §. 15 dieser Arbeit für unverzweigte lineare Leiter auseinandergesetzt, in §. 16 für körperliche Leiter, in §. 17 ist die Behandlung der analytischen Ausdrücke für Gleitstellen besprochen.

Da directe Versuche über die ponderomotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprungs an Stromenden noch nicht vorliegen, so blieb zunächst nur noch nachzuweisen übrig, dass das Potentialgesetz in seiner Anwendung auf ungeschlossene Leiter von beliebig veränderlicher Form dem Gesetz von der Constanz der Energie genüge. Zu dem Ende sind in §. 18 die analytischen

---

*) Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc. T. LXXVII p. 1054. — Die Einwände beziehen sich auf einen vorläufigen Auszug der vorliegenden Arbeit in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom Februar 1873.

Ausdrücke für die elektrodynamische Induction durch Bewegung körperlicher Leiter entwickelt, und ist in §. 19 mit deren Hülfe die Constanz der Energie nachgewiesen.

Nachdem auf diese Weise der Nachweis vervollständigt war, dass das Potentialgesetz in seiner verallgemeinerten Fassung in allen Fällen den an ein solches Gesetz nach dem jetzigen Stande unserer physikalischen Kenntnisse zu stellenden Anforderungen entspreche, habe ich noch die Frage zu beantworten gesucht, ob und welche Abweichungen in den Werthen der ponderomotorischen und durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kräfte von dem Potentialgesetze etwa stattfinden könnten, ohne das Gesetz von der Erhaltung der Kraft zu verletzen, und ohne die ponderomotorischen Wirkungen geschlossener Ströme gegen einander zu verändern.

Die Untersuchung hierüber ist in §. 20 geführt worden; da die allgemeineren Formen der durch Aenderungen der Stromstärken inducirten Kräfte von mir schon früher discutirt sind, so konnte ich mich hier auf die durch Bewegung der Leiter zu inducirenden beschränken. Es ist dabei die Annahme festgehalten worden, 1) dass die zu den elektromotorischen Kräften vielleicht hinzuzufügenden Zusatzkräfte im Leiterelement Ds unabhängig von der Stromstärke i in Ds, aber proportional der Stromstärke j in dem inducirenden Elemente $D\sigma$ zu setzen, und dass die ponderomotorische Arbeit, welche sie bei einer kleinen Verschiebung leisten, proportional mit $i.j$ ist; 2) dass die Analogie zwischen der Wirkung geschlossener Ströme und der von Magneten auch in diesen Fällen bestehe, 3) dass die elektromotorischen und ponderomotorischen Wirkungen der einzelnen wirkenden Elemente $D\sigma$ auf das Element Ds sich einfach summiren.

Diese Annahmen führen zu den in den Gleichungen (7^a.) und (7^b.) aufgestellten Werthen der Zusätze, welche zu den elektromotorischen Kräften $j\mathfrak{r}$ auf Ds, $i\mathfrak{r}_1$ auf $D\sigma$ ausgeübt, und zu der ponderomotorischen Arbeit $i.j.\delta\mathfrak{w}$ gemacht werden könnten. Darin kommen sechs unbekannte Functionen der Entfernung r beider Elemente vor, nämlich φ, ψ, χ und φ_1, ψ_1, χ_1, von denen die drei ersteren auch noch von $\frac{dr}{d\sigma}$ und die drei letzteren auch noch von $\frac{dr}{ds}$ abhängen können. Nimmt man an, wie es Herr *Neumann* gethan, dass nur die *Ampère*schen ponderomotorischen Kräfte existiren, und keine anderen, so bestimmen sich die genannten Functionen, wie es in den Gleichungen (8.) angegeben ist, und der Werth der durch Bewegung der Leiter inducirten elektromotorischen Kraft

wird in Gleichung (8^b.) gegeben. Dieser Werth unterscheidet sich von dem, den Herr *C. Neumann* *) bei Lösung einer sehr ähnlichen Aufgabe gefunden hat, dadurch dass er die unbestimmt bleibende Constante k enthält, welche nach der *Neumann*schen Deduction den bestimmten Werth $k = -1$ annehmen müsste. *Der von mir gefundene allgemeinere Werth entspricht aber allen denjenigen Forderungen, welche Herr C. Neumann als die Grundlagen seiner Rechnung vorangestellt hat* (l. c. S. 419—420 und 468—470).

Der Unterschied ist dadurch bedingt, dass der genannte Autor im Laufe der Rechnung (l. c. S. 481—482) noch eine weitere beschränkende Hypothese gleichsam als selbstverständlich einführt, die dies aber, wie mir scheint, durchaus nicht ist. Er nimmt nämlich an, dass bei einer durch Bewegung erzeugten Verlängerung eines Stromelements dasselbe inducirend so wirke, als ob in dem hinzugekommenen Theile seiner Länge ein neuer Strom entstände, und wendet auf diesen Vorgang das Gesetz der Induction durch Intensitätsänderung an, welches, wenn man das Potentialgesetz verlässt, von dem der Induction durch Lagenänderung verschieden ist. Man könnte aber eine Dehnung eines Stromelements ebenso gut als eine Entfaltung vorher eingefalteter Theile desselben ansehen, und müsste dann offenbar das Gesetz der Induction durch Lagenänderung anwenden. Da ich keine solche beschränkende Hypothese gemacht habe, ist der von mir gefundene Ausdruck allgemeiner, indem er eine Constante k mehr enthält.

Dieser Unterschied ist aber von grosser Wichtigkeit. Herrn *C. Neumann*s Deduction zeigt nämlich, dass wenn man von seinen Voraussetzungen ausgeht, die Constante k einen negativen Werth erhält, und das Gleichgewicht der Elektricität in den Leitern labil wird. Wie ich in meinen früheren beiden Arbeiten gezeigt habe, sind überhaupt negative Werthe von k nicht zulässig. Wären Herrn *C. Neumann*s Voraussetzungen unanfechtbar, so würde durch seine sorgfältige und scharfsinnige Untersuchung meines Erachtens nach der Beweis geführt gewesen sein, dass das *Ampère*sche Gesetz, als ausschliessliches Gesetz der ponderomotorischen Kräfte betrachtet, mit dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft unvereinbar sei **). Da aber die bezeichnete,

---

*) Ueber die den Kräften elektromotorischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. Abhandl. d. Königl. Sächs. Akademie d. Wiss. Math. Phys. Klasse Bd. X. — Die elektrischen Kräfte. Leipzig, 1873. Aus der ersteren Abhandlung ist oben citirt.

**) Von dieser Meinung ausgehend habe ich einen Bericht für die englische Zeitschrift „the Academy“ (March 14. 1874) geschrieben, und erst später gesehen, dass gegen Herrn *C. Neumann*s Deduction Einwendungen zu machen seien.

nachträglich gemachte Hypothese über die Induction durch Dehnung der Leiterelemente keineswegs als unumgänglich erscheint, ist, so weit ich sehe, aus rein theoretischen Gründen über die an den Enden ungeschlossener Leiter wirkenden ponderomotorischen Kräfte keine Entscheidung zu gewinnen, und muss an das Experiment appellirt werden.

Ich habe schon in der der Berliner Akademie gemachten Mittheilung (Februar 1873) kurz angedeutet, wie solche Versuche gemacht werden könnten.

Die dort geplanten Versuche werden aber nur bei Anwendung sehr grosser Drahtmassen und Batterien Erfolg gewähren können. Leichter ausführbar ist vielleicht eine andere Classe von Versuchen, bei deren Erfolg freilich noch eine andere Frage in Betracht kommt, welche zwischen den verschiedenen Theorien streitig ist. Herrn *W. Webers* Theorie setzt nämlich voraus, dass elektrische Quanta, welche irgend wie ihre relative Lage zu einander ändern, elektrodynamische Wirkungen hervorbringen müssen, einerlei ob ihre ponderablen Träger sich mit ihnen bewegen oder nicht. Das Potentialgesetz dagegen kennt nur Wirkungen, welche die strömende Elektricität hervorbringt, wenn sie sich in ihren Leitern und relativ zu diesen bewegt. Letzterer Annahme entsprechend würden Spitzen, durch welche Elektricität ausströmt oder einströmt, sei es gegen die Scheibe einer Elektrisirmaschine, sei es um von der bewegten Luft fortgetragen zu werden, als Stromenden zu betrachten sein, und würden die elektrodynamischen Eigenschaften von solchen zeigen können.

Einstweilen, ehe solche Versuche ausgeführt sind, bleiben wir auf die Wahrscheinlichkeit beschränkt, welche die grössere oder geringere Einfachheit und Symmetrie der Gesetze, die mehr oder weniger gut bewahrte Analogie der wesentlichen Eigenschaften der wirksamen Kräfte in den verschiedenen Fällen darbietet. Solche Betrachtungen geben allerdings keine definitive Entscheidung, aber sie geben doch immerhin den verhältnissmässig besten Leitfaden in die Hand, um den richtigen Weg zu finden.

In dieser Beziehung ist zu bemerken, dass das Potentialgesetz unter denselben analytischen Ausdruck, der namentlich bei der Annahme $k = 1$ ausserordentlich einfach wird, die sämmtlichen Erscheinungen 1) der ponderomotorischen Kräfte, 2) der Induction durch Stromesänderung, 3) der Induction durch Bewegung vereinigt, also überhaupt das ganze Gebiet der bisher bekannten Thatsachen der Elektrodynamik. Die Auffindung des Potentialgesetzes durch *Gauss* und *Neumann* senior kann in der That als eine der glücklichsten und glänzendsten Errungenschaften der mathematischen Physik angesehen

werden. Weichen wir dagegen ab vom Potentialgesetze, so brauchen wir für jedes der genannten Gebiete besondere Gesetze, wobei das für 2) mit dem Potentialgesetze übereinstimmt, die beiden anderen complicirter sind, als jenes.

An geschlossenen Stromkreisen finden wir thatsächlich folgende allgemeine Eigenthümlichkeiten der elektrodynamischen Wirkungen:

1) Die ponderomotorischen Kräfte geschlossener Stromkreise haben ein Potential. Das heisst: die mechanische Arbeit der ponderomotorischen Kräfte beider Kreise bei constant bleibenden Stromintensitäten *) ist nur von der Anfangs- und Endlage beider Kreise, nicht von der Art des Uebergangs abhängig.

2) Die ponderomotorischen Kräfte, welche ein geschlossener Stromkreis auf ein lineares Stromelement ohne freie Enden ausübt, stehen auf der Richtung des letzteren senkrecht.

3) Die gesammte elektromotorische Kraft, welche ein geschlossener Stromkreis während einer endlichen Verschiebung und Aenderung seiner Stromstärke in einem anderen hervorbringt, ist nur abhängig von der anfänglichen und endlichen relativen Lage beider Kreise zu einander, so wie von der anfänglichen und endlichen Stromstärke des Inducenten, nicht von den Zwischenzuständen.

Diese drei Eigenschaften der elektrodynamischen Kräfte überträgt das Potentialgesetz hypothetisch auch auf ungeschlossene Ströme. Wird eine von ihnen übertragen, so werden nothwendig auch die anderen übertragen.

Wenn wir dagegen das *Ampère*sche Gesetz als den vollständigen Ausdruck für die ponderomotorischen Kräfte annehmen, so überträgt sich keine von diesen allgemeinen Eigenschaften der Wirkungen geschlossener Ströme auf die ungeschlossenen. Es wird in diesem Falle nur eine mögliche, aber nicht nothwendige Zerlegungsweise der ponderomotorischen Kräfte geschlossener Stromkreise in Elemente, die physikalisch nicht direct nachweisbar sind, auf die ungeschlossenen Kreise übertragen.

Ich muss gestehen, dass es mir im höchsten Grade unwahrscheinlich dünkt, dass Eigenschaften, wie 1) und 3), die am entscheidendsten für den Charakter der Naturkräfte sind, bei den uns bekannten elektrodynamischen Wir-

---

*) Gleitstellen sind dabei zu behandeln als sich entfaltende Falten, oder man muss die neuen Leiterstücke durch Dehnung entwickelt denken.

kungen nur durch einen gleichsam zufälligen Einfluss der Summirung über eine geschlossene Linie entstanden sein sollten, während sie den einzelnen Summanden an und für sich nicht zukämen.

§. 15. Die ponderomotorischen Kräfte nach dem Potentialgesetze.

Das Potentialgesetz giebt unmittelbar nur den Werth der mechanischen Arbeit, welche von den ponderomotorischen Kräften elektrodynamischen Ursprungs geleistet wird, wenn zwei lineare Stromleiter eine Aenderung ihrer relativen Lage erleiden, während die Intensität des elektrischen Stromes in beiden constant bleibt. Die letztere Bedingung, nämlich Constanz der Stromstärke, wird im Folgenden immer als erfüllt vorausgesetzt, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt ist. Der Ausdruck, den das genannte Gesetz für den Werth der genannten Arbeit giebt, lässt sich auf ganz beliebige Verschiebungen der einzelnen Punkte der Leiter anwenden, wie sie durch beliebige andere gleichzeitig einwirkende mechanische Kräfte hervorgebracht werden können, wobei nur zu bemerken ist, dass überall, wo die Strömung fortbestehen soll, die Componenten der Verschiebungen continuirliche Functionen der Coordinaten sein müssen, da discontinuirliche Verschiebungen die Continuität der Leitung aufheben würden. Unter diesen Umständen genügt der Ausdruck für den Werth der Arbeit, um die elektrodynamischen Kräfte vollständig zu bestimmen, welche auf die einzelnen Punkte des Leiters wirken, wenn wir voraussetzen, dass *die elektrodynamische Kraft, welche auf jeden Punkt des Leiters wirkt, unabhängig ist von den Geschwindigkeiten dieses Punktes und unabhängig von den gleichzeitigen Verschiebungen der übrigen Punkte des Leiters.* Die Aufgabe *) dieses Paragraphen ist, zu zeigen, dass ein eindeutig bestimmtes System von solchen Kräften angegeben werden kann, welches die durch den Werth des Potentials angezeigte Arbeit in jedem Falle hervorzubringen geeignet ist; und ferner werden wir die Werthe dieser durch das Potentialgesetz angezeigten Kräfte zu vergleichen haben mit denen, welche *Ampère* angenommen hat.

Das Längenelement des einen Leiters s sei Ds, und die Stromintensität in demselben i, während wir dieselben Grössen für den anderen Leiter σ mit $D\sigma$ und j bezeichnen. Die Entfernung zwischen Ds und $D\sigma$ bezeichnen wir mit r. Für den Werth des Potentials DP der ponderomotorischen Kräfte,

*) Diese Formulirung der Aufgabe ist gewählt, um die von Herrn *Bertrand* (Comptes Rendus T. LXXVII, p. 1049—1054) begangenen Missverständnisse bestimmter auszuschliessen.

welches die beiden Elemente Ds und $D\sigma$ gegen einander hervorbringen, nehme ich aus den in meiner ersten Abhandlung auseinander gesetzten Gründen wieder den allgemeineren Ausdruck

$$(1.)\quad DP = -\tfrac{1}{2} A^2 \cdot \frac{ij}{r}[(1+k)\cos(Ds, D\sigma)+(1-k)\cos(r, Ds)\cos(r, D\sigma)]\, Ds\,.\,D\sigma.$$

Darin ist A die von Herrn *W. Weber* gemessene Constante, oder $\frac{1}{A}$ eine der Lichtgeschwindigkeit nahehin gleiche Geschwindigkeit, k eine vorläufig noch unbekannt bleibende Constante, welche nicht negativ sein kann, und $(Ds, D\sigma)$, (r, Ds), $(r, D\sigma)$ sind die Winkel zwischen den Richtungen der bezeichneten Linien, wobei Ds und $D\sigma$ als positiv wachsend zu nehmen sind nach der Richtung, in welcher die positive Elektricität fliesst, r aber positiv wächst von $D\sigma$ nach Ds. Als Einheit der Stromstärke ist, wie früher, diejenige genommen, bei welcher die algebraische Summe der durch einen Querschnitt in bestimmtem Sinne fliessenden Elektricität gleich der elektrostatischen Maasseinheit ist.

Das ganze Potential der beiden Leiter s und σ aufeinander würde sein

$$P = \iint DP.$$

Das Potentialgesetz sagt aus, dass *wenn die beiden Stromleiter s und σ aus einer ersten Lage mit dem Potentialwerth P_1 in eine zweite mit dem Potentialwerthe P_2 bewegt werden, und die Ströme i und j dabei constante Intensität behalten, die während der Bewegung von den elektrodynamischen Bewegungskräften, welche jeder Leiter auf den andern ausübt, geleistete Arbeit gleich $P_1 - P_2$ sei.*

Es wird in diesem Paragraphen also vorläufig noch abgesehen von den Kräften, welche jedes Element des Leiters s von sämmtlichen übrigen desselben Leiters erleidet. Diese Kräfte können nur bei Berücksichtigung der drei Dimensionen der Leiter berechnet werden, da, wie schon bemerkt, das elektrodynamische Potential für lineare Leiter mit endlicher Strömung unendlich wird.

Wir bezeichnen die rechtwinkeligen Coordinaten des Linienelements Ds mit x, y, z, die des Elements $D\sigma$ mit ξ, η, ζ. Während einer unendlich kleinen Lagenänderung mögen die ersteren zunehmen um δx, δy, δz, die zweiten um $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, der Potentialwerth P um δP. Dabei seien $X.Ds$, $Y.Ds$, $Z.Ds$ die Componenten der elektrodynamischen Kräfte, welche σ auf

Ds ausübt, und ΞDs, $\mathrm{Y}Ds$, $\mathrm{Z}Ds$ seien dieselben für die Wirkung von s auf $D\sigma$. Ferner seien $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ und $\bar{\Xi}$, $\bar{\mathrm{Y}}$, $\bar{\mathrm{Z}}$ die Componenten der Kräfte, welche auf die Enden der beiden Stromleiter einwirken, und $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, sowie $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ die zugehörigen Coordinaten. Nach dem Potentialgesetz ist alsdann

$$(1^a.)\quad \begin{cases} \delta P + \int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, Ds + \Sigma[\bar{X}\delta\bar{x} + \bar{Y}\delta\bar{y} + \bar{Z}\delta\bar{z}] \\ \quad + \int (\Xi\delta\xi + \mathrm{Y}\delta\eta + \mathrm{Z}\delta\zeta)\, D\sigma + \Sigma[\bar{\Xi}\delta\bar{\xi} + \bar{\mathrm{Y}}\delta\bar{\eta} + \bar{\mathrm{Z}}\delta\bar{\zeta}] = 0. \end{cases}$$

Die Variationen der Coordinaten sind hierbei ganz beliebig zu nehmen, nur müssen, wie oben bemerkt, δx, δy und δz continuirliche Functionen der Länge s, und $\delta\xi$, $\delta\eta$ und $\delta\zeta$ der Länge σ sein, wenn wir mit s und σ die längs des Leiters gemessenen Abstände der Elemente Ds und $D\sigma$ von zwei beliebig gewählten festen Anfangspunkten verstehen. Wäre diese Bedingung an irgend einer Stelle nicht erfüllt, so würde die Continuität der Leitung daselbst unterbrochen werden. In diesem Falle wäre eine solche Stelle als ein Paar von Endpunkten der sich trennenden beiden Leiterstücke zu betrachten. Welche Kräfte auf solche wirken, wird sich im Folgenden ergeben. Wie die Fälle discontinuirlicher Lagenänderungen in Gleitstellen zu behandeln sind, in denen die Leitung des Stroms nicht aufhört, werde ich in §. 17 auseinandersetzen.

Zur bequemeren Berechnung von δP wollen wir P zunächst in zwei Theile zerlegen

$$P = P_0 + P_1,$$

$$DP_0 = -A^2 \frac{ij}{r} \cos(Ds, D\sigma).Ds.D\sigma,$$

$$DP_1 = -\tfrac{1}{2}A^2 \frac{ij}{r}(1-k)[\cos(r, Ds)\cos(r, D\sigma) - \cos(Ds, D\sigma)].Ds.D\sigma$$

oder

$$DP_1 = -\tfrac{1}{2}A^2 ij.(1-k)\frac{d^2r}{ds\,d\sigma}\cdot Ds.D\sigma.$$

Wenn wir durch Integration nach s und σ aus der letzteren Gleichung den Werth von P_1 bilden, und die an den Enden von s und σ angesammelte freie Elektricität beziehlich mit e und ε bezeichnen, können wir schreiben

$$(1^b.)\qquad P_1 = -\frac{1-k}{2} A^2 \Sigma\Big[\frac{de}{dt}\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot r\Big],$$

wo sich das Summenzeichen auf alle aus je einem Endpunkt von s und je einem Endpunkt von σ zu bildenden Combinationen bezieht. Der Werth von P_1 ist also nur von der Lage der Endpunkte der beiden Leiter abhängig, und

ergiebt also auch nur Kräfte, welche auf diese wirken, deren Grösse wir weiter unten bestimmen werden.

Der andere Theil des Potentials P_0 hat die ursprüngliche von Herrn *F. E. Neumann* in der oben citirten Abhandlung gewählte Form, abgesehen von einer anderen Wahl der Stromeinheit. Er kann im Allgemeinen von dem Integralzeichen nicht befreit werden. Da nun bei der Ausführung der Variationen δx, δy, δz auch die Längen der Elemente Ds variiren werden, so wollen wir unter dem Integrationszeichen statt s und σ zwei andere Variabele p und ϖ einführen, deren Werthe für jeden einzelnen materiellen Punkt des Leiters bei der Bewegung unverändert bleiben sollen, und die so gewählt sind, dass s eine continuirliche Function von p, σ eine eben solche von ϖ ist. Dann ist also

$$P_0 = -A^2 ij\iint \frac{\cos(Ds, D\sigma)}{r}\cdot\frac{ds}{dp}\cdot\frac{d\sigma}{d\varpi}\cdot dp\,.\,d\varpi$$

oder

$$(1^c.)\qquad P_0 = -A^2.ij\iint\frac{1}{r}\left[\frac{dx}{dp}\cdot\frac{d\xi}{d\varpi}+\frac{dy}{dp}\cdot\frac{d\eta}{d\varpi}+\frac{dz}{dp}\cdot\frac{d\zeta}{d\varpi}\right]\cdot dp.d\varpi.$$

Da die Variationen der Coordinaten keiner anderen einschränkenden Bedingung unterliegen, als der, dass sie continuirliche Functionen der Coordinaten sind, so kann man die Variation für jede derselben einzeln berechnen, indem man die Variationen der anderen Coordinaten gleich Null setzt. Variiren wir nur x, so wird

$$\delta P_0 = -A^2.ij\iint\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)\delta x\left[\frac{dx}{dp}\cdot\frac{d\xi}{d\varpi}+\frac{dy}{dp}\cdot\frac{d\eta}{d\varpi}+\frac{dz}{dp}\cdot\frac{d\zeta}{d\varpi}\right]\cdot dp\,.\,d\varpi$$
$$-A^2.ij\iint\frac{1}{r}\cdot\frac{d\xi}{d\varpi}\cdot\frac{d\delta x}{dp}\cdot dp\,.\,d\varpi.$$

Schaffen wir aus dem letzten Gliede den Factor $\frac{d\delta x}{dp}$ durch partielle Integration nach p fort, so erhalten wir ein Integral, welches in allen seinen Gliedern den Factor δx hat, und da δx eine willkürliche continuirliche Function von p ist, so kann Gleichung $(1^a.)$ die in diesem Falle

$$\delta P_0+\delta P_1+\int X\delta x\,.\,ds+\bar{X}\,.\,\delta\bar{x} = 0$$

wird, bei der im Anfange dieses Paragraphen ausgesprochenen Annahme, dass der Werth von X, wie der der übrigen Kraftcomponenten unabhängig von δx, δy, δz sei, nur dann erfüllt sein, wenn die mit δx multiplicirte Grösse für jeden Punkt von s gleich Null ist. Für *innere Punkte* giebt dies:

$$(2.)\quad \begin{cases} X\frac{ds}{dp} = A^2 ij\int\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)\left[\frac{dx}{dp}\cdot\frac{d\xi}{d\varpi}+\frac{dy}{dp}\cdot\frac{d\eta}{d\varpi}+\frac{dz}{dp}\cdot\frac{d\zeta}{d\varpi}\right]d\varpi \\ \qquad -A^2 ij\int\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\xi}{d\varpi}d\varpi \end{cases}$$

und für die *Endpunkte von s* ergiebt sich mit Berücksichtigung von $(1^b.)$

$$(2^a.)\quad \overline{X} = A^2 j\frac{de}{dt}\int\frac{1}{r}\cdot\frac{d\xi}{d\varpi}d\varpi+\frac{1-k}{2}A^2\frac{de}{dt}\Sigma\left[\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot\frac{dr}{dx}\right].$$

Da bei der weiteren Berechnung dieser Werthe Verschiebungen nicht mehr zu berücksichtigen sind, können wir als unabhängige Variable unter dem Integrationszeichen wieder s und σ anwenden, und erhalten:

$$(2^b.)\quad \begin{cases} X = A^2.ij\cdot\frac{dy}{ds}\int\frac{1}{r^3}\left[(y-\eta)\frac{d\xi}{d\sigma}-(x-\xi)\frac{d\eta}{d\sigma}\right]d\sigma \\ \qquad +A^2.ij\cdot\frac{dz}{ds}\int\frac{1}{r^3}\left[(z-\zeta)\frac{d\xi}{d\sigma}-(x-\xi)\frac{d\zeta}{d\sigma}\right]d\sigma \\ \text{und entsprechend:} \\ Y = A^2.ij\cdot\frac{dx}{ds}\int\frac{1}{r^3}\left[(x-\xi)\frac{d\eta}{d\sigma}-(y-\eta)\frac{d\xi}{d\sigma}\right]d\sigma \\ \qquad +A^2.ij\cdot\frac{dz}{ds}\int\frac{1}{r^3}\left[(z-\zeta)\frac{d\eta}{d\sigma}-(y-\eta)\frac{d\zeta}{d\sigma}\right]d\sigma, \\ Z = A^2.ij\cdot\frac{dx}{ds}\int\frac{1}{r^3}\left[(x-\xi)\frac{d\zeta}{d\sigma}-(z-\zeta)\frac{d\xi}{d\sigma}\right]d\sigma \\ \qquad +A^2.ij\cdot\frac{dy}{ds}\int\frac{1}{r^3}\left[(y-\eta)\frac{d\zeta}{d\sigma}-(z-\zeta)\frac{d\eta}{d\sigma}\right]d\sigma. \end{cases}$$

Daraus ergiebt sich leicht

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds} = 0,$$

das heisst: *Nach dem Potentialgesetz ist die Resultante der elektrodynamischen Bewegungskräfte, welche ein linearer Stromleiter auf ein Stromelement im Innern einer linearen Leitung ausübt, jedesmal senkrecht auf die Richtung der Strömung.* Dies ist in Uebereinstimmung mit Herrn *Grassmanns* *) Elementargesetz, stimmt aber mit *Ampères* Gesetz nur, wenn σ ein geschlossener Leiter ist. Von dem *Grassmann*schen Gesetze unterscheidet sich das Potentialgesetz dadurch, dass jenes die in Gleichung $(2^a.)$ gegebenen, auf die Endpunkte der Leitung und die dort frei werdende Elektricität $\frac{de}{dt}$ wirkenden Kräfte nicht kennt. Wenn

*) *Poggendorff* Annalen LXIV. 1845.

man die in den Gleichungen (2^b.) vor Ausführung der Integration mit $d\sigma$ multiplicirten Werthe mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ bezeichnet, so dass

$$X = \int \mathfrak{x}\, d\sigma,$$

$$Y = \int \mathfrak{y}\, d\sigma,$$

$$Z = \int \mathfrak{z}\, d\sigma,$$

so sind diese Grössen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die Componenten der Wirkung, welche das Stromelement $d\sigma$ auf die inneren Punkte von ds ausübt. In der That reducirt sich der Werth von X, Y, Z auf $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, wenn man den Stromleiter σ auf das Element $d\sigma$ reducirt. Bezeichnen wir nun mit α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Coordinatenaxen mit derjenigen Richtung machen, die zugleich senkrecht gegen r und gegen $D\sigma$ ist, so ist leicht einzusehen, dass

$$\alpha.\mathfrak{x}+\beta.\mathfrak{y}+\gamma.\mathfrak{z} = 0,$$

das heisst, dass die Richtung der vom Elemente $D\sigma$ auf die inneren Punkte von Ds ausgeübten Kraft auch senkrecht zu der Richtung ist, deren Projectionen α, β, γ sind, oder dass die Richtung der Kraft in der durch r und $D\sigma$ gelegten Ebene liegt, wie es dem von Herrn *Grassmann* aufgestellten Gesetze entspricht.

Für ein einzelnes lineares Element Ds bleiben also stehen, ebenso wie für ein längeres Stück von s, erstens die Kräfte, welche auf sämmtliche Punkte der Länge von Ds senkrecht zu Ds wirken, und zweitens zwei Kräfte (2^a.), welche auf die Endpunkte von Ds wirken. Ist das Linienelement Ds als ein fester Körper anzusehen, so lassen sich diese Kräfte im Allgemeinen auf zwei einzelne Kräfte als Resultanten reduciren *) oder, wenn man lieber will, auf eine Kraft und ein Kräftepaar, wie ich dies in meiner zweiten Abhandlung (Bd. 75 dieses Journals) schon angegeben habe.

Einen linearen Leiter kann man in jedem Punkte sich getheilt denken, also jeden Punkt desselben als die zusammenfallenden Endpunkte zweier Leiter-

*) Es würde unstatthaft sein, zuerst, wie es Herr *Bertrand* in Comptes Rendus T. LXXVII., p. 1052—1053 verlangt, für jedes Element diese Reduction der Kräfte auf eine Kraft und ein Kräftepaar ausführen zu wollen, um dann die aus dieser Reduction sich ergebenden Resultanten zur weiteren Berechnung der Wirkungen auf die einzelnen Punkte eines vollkommen beweglichen Leiters zu benutzen. Denn jene Reduction ist nur zulässig für Stücke Ds, welche als absolut feste Körper zu betrachten sind, während die Anwendung, auf die es hier ankommt, an die Voraussetzung gebunden ist, dass die Theile des Leiters im Gegentheil nachgiebig seien.

stücke betrachten. Dann würde diesem Paar von Endpunkten von der einen Seite her eben so viel frei werdende positive Elektricität zuströmen, als von der andern Seite negative. Die Summe der frei werdenden Elektricität würde also doch wieder gleich Null sein. Dem entsprechend würde Gleichung (2^a.) anzeigen, dass zwei gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf den betreffenden Punkt wirkten, die eine, insofern er oberes Ende des einen Leiterstücks ist, und in ihm positive Elektricität frei wird, die andere, insofern er unteres Ende des andern Leiterstücks ist, und in ihm negative Elektricität frei wird. Da beide Kräfte genau denselben Punkt mit genau gleicher Grösse und genau entgegengesetzter Richtung angreifen, so werden sie sich gegenseitig vollkommen aufheben, so lange nicht der Zusammenhang des Leiters an dieser Stelle zerrissen wird; die Summe ihrer virtuellen Momente oder ihrer Arbeit für irgend eine denkbare oder wirkliche Verschiebung des Leiters ohne Aufhebung der Continuität der Strömungslinie wird immer gleich Null sein*). Dagegen ist dies nicht mehr der Fall, so wie der Leiter an dieser Stelle zerreisst, und seine Verschiebungen discontinuirliche Functionen der Coordinaten werden. Es werden also die Kräfte der Gleichung (2^a.), welche auf die Stromenden wirken, in der That auch im Innern des Leiters bei geeigneter Richtung des Stromes j ein Zerreissen des Leiters s und eine Aufhebung seines Zusammenhanges befördern können. Zugleich zeigt aber auch die Gleichung (2^a.), dass bei endlichen Stromstärken und endlicher Länge der Stromleiter die beiden Kräfte, welche in jedem einzelnen Querschnitt des Leiters den Molecularkräften, welche den Zusammenhang zu bewahren streben, entgegenwirken, von endlicher Grösse sind **).

Die bis hierher ausgeführte Zerlegung der ponderomotorischen Kräfte in diejenigen Kräfte, welche auf die einzelnen Punkte des Innern und der Oberfläche des bewegten Leiters wirken, hat ihre bestimmte physikalische Bedeutung, da im Falle der Bewegung die Beschleunigung jedes einzelnen Leiterpunktes nur von den auf ihn selbst wirkenden Kräften mechanischen und elektrodynamischen Ursprungs abhängt. Die weitere Zerlegung der elektro-

*) Herr *Bertrand* (l. c. p. 1053) behauptet, diese Endkräfte, welche nicht die Richtung der Tangente des Leiters s hätten, müssten den Leiter verschieben. Er hat dabei nicht beachtet, dass jeder innere Punkt des Leiters von zwei gleich grossen und entgegengesetzten Kräften dieser Art angegriffen wird, die sich genau aufheben, so lange der Leiter nicht zerreisst.

**) Einen hierauf bezüglichen Einwand von Herrn *Bertrand* will ich am Ende des Paragraphen besprechen.

dynamischen Kraft, welche der Leiter σ auf einen jeden der Punkte von s ausübt, in Theile, welche den einzelnen Theilen von σ entsprechen, hat etwas Willkürliches, da die Art, wie wir σ theilen, willkürlich ist. Bisher haben wir es in Längenelemente getheilt. Indessen können wir auch bis auf Kräfte, die von den Punkten von σ ausgehen, zurückgehen, da ja andererseits bei der Bewegung von σ die Beschleunigungen seiner einzelnen Punkte auf Kräfte zurückführen, welche vom ganzen Leiter s auf die einzelnen Punkte von σ ausgeübt werden.

Eine solche Zerlegung ist nun in unserem Falle namentlich vortheilhaft, um den Unterschied der von dem Potentialgesetze angezeigten Wirkungen von denen des *Ampère*schen Gesetzes möglichst einfach heraustreten zu lassen. Ausserdem ist zu bemerken, dass die von dem *Grassmann*schen Gesetze angezeigten Elementarkräfte zwischen Stromelement und Stromelement dem Gesetz der Gleichheit der Action und Reaction nicht genügen, obgleich dieses Gesetz bei der Zusammenfassung der gleichzeitig auf Stromelemente und Stromenden stattfindenden Wirkungen gewahrt bleibt. Die Zerlegung in Punktkräfte führt dagegen auf Elementarwirkungen, die dem Gesetz von der Action und Reaction genügen.

Um elementare Kräfte der letzteren Art zu erhalten, muss man eine nochmalige partielle Integration des letzten Gliedes der Gleichung (2.) ausführen, was bei gleichzeitiger Einführung von s und σ an Stelle der Variablen p und ϖ, das Resultat giebt:

$$X = \Sigma\Big[A^2 i\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot(x-\xi)\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big]$$
$$-A^2.ij\int\Big[(x-\xi)\frac{d^2}{ds.d\sigma}\Big(\frac{1}{r}\Big)+\frac{x-\xi}{r^3}\cdot\cos(ds,d\sigma)\Big]d\sigma,$$
$$Y = \Sigma\Big[A^2 i\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot(y-\eta)\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big]$$
$$-A^2.ij\int\Big[(y-\eta)\frac{d^2}{ds.d\sigma}\Big(\frac{1}{r}\Big)+\frac{y-\eta}{r^3}\cdot\cos(ds,d\sigma)\Big]d\sigma,$$
$$Z = \Sigma\Big[A^2 i\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot(z-\zeta)\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big]$$
$$-A^2.ij\int\Big[(z-\zeta)\frac{d^2}{ds.d\sigma}\Big(\frac{1}{r}\Big)+\frac{z-\zeta}{r^3}\cdot\cos(ds,d\sigma)\Big]d\sigma.$$

Es sind dies die Componenten einer Summe von Abstossungskräften, welche theils von den Enden, theils von den linearen Stromelementen der Leitung σ auf das Stromelement ds ausgeübt werden. Die Werthe sind folgende:

1) ***Abstossende Kraft eines Endes von σ auf ein Stromelement ds***

$$+A^2 i \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot r \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right) = -A^2 i \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{ds}.$$

2) ***Abstossende Kraft der Stromelemente von σ auf die von s***

$$-A^2 . ij . \left[r \cdot \frac{d^2}{ds . d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \cos(ds, d\sigma) \right].$$

Da nun

$$\frac{d^2}{ds . d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{ds}\right] = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 r}{ds . d\sigma} + \frac{2}{r^3} \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{d\sigma}$$

und ferner

$$\frac{dr}{ds} = \cos(r, ds),$$

$$\frac{dr}{d\sigma} = -\cos(r, d\sigma),$$

$$\frac{d^2 r}{ds . d\sigma} = \frac{1}{r}[\cos(r, ds) . \cos(r, d\sigma) - \cos(ds, d\sigma)],$$

so wird der Werth der Abstossungskraft:

$$-\frac{A^2 . ij}{r^2} \cdot [2\cos(ds, d\sigma) - 3\cos(r, ds) . \cos(r, d\sigma)],$$

was die bekannte Form von *Ampère* ist.

Die auf die Enden von s wirkenden Kräfte bringen wir auf die entsprechende Form, indem wir in (2^a.) das $\frac{d\xi}{d\varpi}$ durch partielle Integration fortschaffen

$$\overline{X} = -\frac{1+k}{2} A^2 \frac{de}{dt} \cdot \Sigma\left[\frac{d\varepsilon}{dt} \cdot \frac{x-\xi}{r}\right] + A^2 \frac{de}{dt} \cdot j \cdot \int (x-\xi) \cdot \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma,$$

und ebenso

$$\overline{Y} = -\frac{1+k}{2} A^2 \frac{de}{dt} \cdot \Sigma\left[\frac{d\varepsilon}{dt} \cdot \frac{y-\eta}{r}\right] + A^2 \frac{de}{dt} \cdot j \cdot \int (y-\eta) \cdot \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma,$$

$$\overline{Z} = -\frac{1+k}{2} A^2 \frac{de}{dt} \cdot \Sigma\left[\frac{d\varepsilon}{dt} \cdot \frac{z-\zeta}{r}\right] + A^2 \frac{de}{dt} \cdot j \cdot \int (z-\zeta) \cdot \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma.$$

Dies sind die Componenten von Abstossungskräften, welche theils von den Enden der Leitung σ, theils von deren inneren Elementen auf die Enden der Leitung s ausgeübt werden. Und zwar ist die Grösse *der Abstossung*

3) ***zwischen den Enden der Leitungen***

$$-\frac{1+k}{2} \cdot \frac{de}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} A^2$$

unabhängig von der Entfernung,

4) *zwischen den inneren Elementen von σ und den Enden von s*

$$A^2 \frac{de}{dt} \cdot j \cdot r \cdot \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = -A^2 \frac{de}{dt} j \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\sigma} d\sigma,$$

welcher Ausdruck dem vorher für die Abstossung zwischen den Enden von σ und den inneren Elementen von s gefundenen genau entspricht.

Die Ergebnisse der bisher angestellten Untersuchung sind also folgende:

Für die Kräfte, welche die inneren Längenelemente zweier linearen, unverzweigten, in beliebigem Grade biegsamen und dehnsamen Leiter auf einander ausüben, ergiebt das Potentialgesetz genau dieselben Werthe, wie das Gesetz von Ampère. Der Werth der Constanten k in der von mir gewählten allgemeineren Form des Potentialgesetzes hat darauf keinen Einfluss.

Unterschieden ist das Potentialgesetz von dem von *Ampère* nur durch die Kräfte, welche auf die Enden der Leitungen nicht geschlossener Ströme wirken, an denen sich Elektricität ansammelt. Dergleichen Kräfte kennt *Ampères* Gesetz nicht. Das Potentialgesetz dagegen ergiebt, wenn man alle Kräfte in anziehende und abstossende zerlegt, eine in Richtung der Verbindungslinie wirkende Kraft sowohl zwischen Stromelementen und Stromenden, wie zwischen je zwei Stromenden. *Die Kraft zwischen Stromelementen und Stromenden* (1 und 3 oben) *ist eine anziehende, wenn die an dem Stromende sich sammelnde Art der Elektricität gleichnamig ist mit derjenigen, welche in dem Stromelemente sich von dem Stromende entfernt.* Die Grösse dieser Kraft ist proportional der Geschwindigkeit der Ansammlung der betreffenden Elektricität an dem Stromende, ferner proportional der Geschwindigkeit, mit der die Entfernung zwischen beiden wächst, endlich umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung, übrigens unabhängig von der Constante k. Sie ist also ein nothwendiges Ergebniss jeder Form des Potentialgesetzes. Im Gegensatz zu Herrn *W. Webers* Hypothese ist es hier nicht die schon angesammelte freie, sondern die eben aus Bewegung in Ruhe übergehende sich ansammelnde Elektricität, welche die Wirkung ausübt, und die Wirkung selbst nicht dem Quadrate, sondern der ersten Potenz von $\frac{dr}{dt}$ proportional.

Es strebt also hiernach bewegte Elektricität die eben frei werdende Elektricität derselben Art in derselben Bewegung nachzuziehen, in welcher erstere relativ zu letzterer begriffen ist.

Die Kraft zwischen Stromenden endlich ist eine anziehende, wenn sich Elektricität gleicher Art an beiden Stromenden sammelt. Dass in der Unab-

hängigkeit dieser Kraft von der Entfernung keine physikalische Schwierigkeit liegt, ist schon in der Einleitung erörtert worden.

In den Comptes Rendus vom 14. October 1872 hat Herr *Bertrand* der Académie des Sciences eine Betrachtung mitgetheilt, durch welche er beweisen zu können glaubt, dass die durch das Potentialgesetz gegebenen Kräfte, die, wenn man sich die einzelnen Längenelemente des Leiters als feste Stäbe denkt, für jedes derselben auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar zurückgeführt werden könnten, nothwendig den festesten Leiter zertrümmern müssten, wenn sie existirten. Ich habe in der vorläufigen Zusammenfassung der hier vorgetragenen Resultate, die ich der Berliner Akademie (Februar 1873) gab, diesen Einwurf erwähnt und kurz bezeichnet, was mir die wahrscheinlichste Quelle des Irrthums in Herrn *Bertrands* Raisonnement zu sein schien. Meine dort gegebene Interpretation seiner Meinung hat mein Gegner aber in dem Compte Rendu vom 10. November 1873 als unrichtig bezeichnet, und eine Auseinandersetzung wiederholt, welche ich vorher nur für eine nicht sehr glücklich gewählte und leicht misszuverstehende Form der Darstellung gehalten und deshalb übergangen hatte. Bei der hervorragenden Stellung, welche Herr *Bertrand* unter den französischen Mathematikern einnimmt, muss ich hier auf die Sache zurückkommen. Um meinem Gegner nichts unterzuschieben, was er nicht selbst gesagt hat, citire ich aus C. R. LXXV p. 863 die Stelle, wo derselbe die Sache in möglichst drastischer Anschaulichkeit beschreibt:

„Lassen Sie uns einen geradlinigen horizontalen Draht annehmen, der ein Meter lang und in 100 Milliarden gleicher Theile getheilt ist, welche die Stelle der unendlich kleinen Elemente in der Formel (nämlich des Potentialgesetzes) vertreten; nehmen wir weiter an, jedes derselben werde durch ein Kräftepaar von zwei verticalen Kräften angegriffen, deren jede dem Gewicht von 1 Milligramm gleich ist. Es kommt hier nicht darauf an, dass solche Kräfte, wenn sie auf einen als absolut fest betrachteten Stab einwirken, sich nach den Regeln der Statik in ein Kräftepaar von sehr kleinem Moment zusammensetzen würden, welches, ohne Zweifel, unfähig sein würde, einen Spinnenfaden zu zerreissen; muss der Kupferdraht, welcher nach oben gezogen wird durch 100 Milliarden Milligramm, das heisst durch 100000 Kilogramm, und nach unten durch eine gleiche Kraft, nicht augenblicklich zerrissen werden? Und man bemerke wohl, es handelt sich nicht nur um sehr kleine, sondern um unendlich kleine Elemente; man muss also die Existenz nicht nur von 100 Milliarden solcher Kräfte voraussetzen, sondern von einer unendlichen Zahl, und wie klein auch der Werth jeder einzelnen derselben wäre, der Faden müsste einen unendlich grossen Widerstand entwickeln können, um fest zu bleiben."

Im C. R. T. LXXVII p. 1050—1051, wo mich Herr *Bertrand* darüber tadelt, dass ich so entscheidender Auseinandersetzungen gar nicht Erwähnung gethan hätte, fasst er dies Beispiel noch einmal zusammen: „Betrachten wir einen geradlinigen Stab, der *an seinen Enden* von gleichen und entgegengesetzten Kräften von unendlicher Intensität gezogen wird" u. s. w. Hier sind die Kräfte, die ein Jahr früher wenigstens noch über den ganzen Stab vertheilt waren, jetzt ganz an die Enden verlegt.

Wenn Herr *Bertrand* Recht hat, so werden wir uns hüten müssen, einen stählernen Magnetstab je von Osten nach Westen zu richten, denn dann müsste derselbe in Staub zerfallen. An einem solchen können wir uns durch den Versuch überzeugen, dass jedes durch zwei zur magnetischen Axe senkrechte Querschnitte aus dem Stabe herausgetrennte Stück, so klein und kurz es auch sein mag, noch immer seine zwei Pole hat, und wenn die Magnetisirung des Stabes in seiner ganzen Länge gleichmässig gewesen ist, so ist die Anziehungskraft des Erdmagnetismus auf jeden Pol jedes kleinsten Stückes gleich gross. Jedes von ihnen wird also vor der Trennung, wie nach der Trennung, vom Erdmagnetismus gerichtet durch ein Kräftepaar, dessen zwei Kräfte endliche Grösse behalten, so klein auch die der magnetischen Axe parallele Länge des betreffenden Stücks sein mag. Nehmen wir an, diese Kraft sei gleich der Schwere von einem Milligramm. Theilen wir die Länge des Magnetstabes in 100 Milliarden Theile u. s. w., so ergiebt sich bei ostwestlicher Richtung des Stabes, dass 100000 Kilogramm den Magneten nach Norden reissen, andere 100000 Kilogramm nach Süden. Müssen wir nun wirklich mit Herrn *Bertrand* schliessen, dass der Magnet unter solchen Umständen zerrissen wird? Die Natur entscheidet gegen die Meinung des berühmten Akademikers, und Alle, die sich bisher mit mathematischer Mechanik beschäftigt haben, nicht blos ich allein, haben in diesem, wie allen ähnlichen Fällen geglaubt, die mechanische Theorie sei hier vollständig im Einklang mit dem, was in Wirklichkeit geschieht.

Man denke sich zwei Längenelemente eines Stabes *ab* und *bc* in Richtung der x. Es sei *ab* afficirt von den beiden, ein Paar bildenden, Kräften $-Y$ in a und $+Y$ in b. Ein gleiches Paar wirke auf *bc*, nämlich eine Kraft $-Y$ in b und $+Y$ in c. Die Summe der virtuellen Momente der beiden Kräfte $+Y$ und $-Y$, welche die beiden Seiten eines und desselben Querschnitts b des Stabes angreifen, bleibt Null bei allen Bewegungen aller Theile des Stabes, ausser bei solchen, welche den Stab im Querschnitt b zerreissen. Also auf Trennung der beiden Seiten eines Querschnitts wirken immer nur die beiden endlichen Kräfte hin, die ihn direct angreifen. Die Cohäsion des Leiters braucht folglich in jedem Querschnitte nur zwei endlichen Kräften zu widerstehen. Bei allen anderen Bewegungen werden die beiden Kräfte, welche jeden einzelnen Querschnitt angreifen, sich aufheben, und so bleibt schliesslich nichts von allen diesen Kräften übrig als die erste am Anfang des ersten und die letzte am Ende des letzten Längenelements dx, also zwei endliche Kräfte, welche ein endliches Moment hervorbringen.

Ich muss gestehen, Herrn *Bertrands* Rechnung scheint mir allen wohlbewährten Principien der Mechanik und der Differentialrechnung zu widersprechen; ich ziehe desshalb vor zu glauben, dass ich seine wahre Meinung nicht gefunden und nicht verstanden habe. Wenn er seine Ansicht darüber auseinandersetzen will, warum ein von Osten nach Westen gerichteter Magnetstab nicht zertrümmert wird, trotzdem er sich, so weit ich sehe, genau unter derselben Art von Kraftwirkung befindet, wie ein von einem elektrischen Strome durchflossener Draht nach den von mir aus dem Potentialgesetze gezogenen Folgerungen, so werde ich vielleicht verstehen können, welchen Sinn die von ihm angestellte Betrachtung haben soll.

§. 16. Die elektrodynamischen Kräfte in körperlichen Leitern.

Der von Herrn *F. E. Neumann* aufgestellte Werth des elektrodynamischen Potentials soll die durch die elektrodynamischen Kräfte bei Bewegungen der ponderablen Leiter zu leistende ponderomotorische Arbeit geben unter der Voraussetzung, dass die Intensität der Strömungen in jedem linearen Leiter während der Bewegung ungeändert bleibt. Die Aenderungen des Potentials, welche von Aenderungen in der Intensität der Strömungen abhängen, seien diese nun durch Aenderungen des Widerstandes oder der elektromotorischen Kräfte hervorgebracht, haben keinen Einfluss auf den ponderomotorischen Theil der geleisteten Arbeit.

Die ponderomotorischen Kräfte hängen eben nur ab von den Stromstärken, wie sie zur Zeit der Wirkung bestehen, nicht von deren Veränderungen. Die Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen für unverzweigte Leiter lassen sich ohne Schwierigkeit auf zwei beliebig verzweigte Systeme linearer Leiter übertragen. An jedem Verzweigungspunkte ist

$$\frac{de}{dt} = \Sigma[\pm i] = 0,$$

wenn man mit i die Intensitäten der Strömung in den einzelnen von dort ausgehenden Zweigen bezeichnet, und das $-$ Zeichen für die Strömungen benutzt, deren positive Richtung von dem genannten Punkte ausgeht, das $+$ Zeichen für die, deren positive Richtung auf den Punkt hingeht. Wenn aber $\frac{de}{dt} = 0$ ist, so ist auch die Summe der elektrodynamischen Wirkungen gleich Null, welche von dem besprochenen Verzweigungspunkte als Endpunkte mehrerer Strömungen ausgehen, oder auf ihn einwirken. Wenn durch die Bewegung einzelne Fäden des Netzes gedehnt, andere verkürzt werden, und die Stromvertheilung wegen veränderten Widerstandes solcher Zweige sich ändert, so wird dies ebenso wenig, wie bei einfachen unverzweigten Leitungen auf die ponderomotorischen Kräfte Einfluss haben.

Von dem Falle eines verzweigten Leiters kann man durch immer steigende Anzahl der Verzweigungspunkte übergehen zu einem im Raume ausgedehnten Leiter von drei Dimensionen. Wenn man sich einen solchen in Fäden abgetheilt denkt, welche überall den Stromlinien parallel gerichtet sind, so dass von keinem dieser Fäden zu seinen Nachbarn Elektricität bei der bestehenden Stromvertheilung überfliesst, so wird die elektrodynamische Wirkung dieselbe sein müssen, als wären dieselben Stromfäden als lineare Leiter

vorhanden und von einander durch nichtleitende Zwischenräume isolirt. *Will man den Neumannschen Begriff des elektrodynamischen Potentials auf körperlich ausgedehnte Leiter übertragen, so wird man bei der Variation des Potentials für die Berechnung der geleisteten mechanischen Arbeit die Stromstärke in jedem, aus denselben materiellen Theilen gebildeten Stromfaden als unveränderlich betrachten müssen.*

Wir wollen die Stromcomponenten der elektrischen Strömung im Punkte x, y, z mit u, v, w bezeichnen, die Componenten der Geschwindigkeit des materiellen Leiters dagegen mit α, β, γ. Das Linienelement Ds wird die Richtung der elektrischen Strömung haben, wenn

$$Dx : Dy : Dz : Ds = u : v : w : \sqrt{u^2+v^2+w^2}.$$

Wenn wir nun unter q den Querschnitt eines unendlich dünnen Stromfadens verstehen, dessen Axe ds ist, und von dem das unendlich kleine Stück ds als cylindrisch betrachtet werden kann, so ist $q\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ die Stromintensität in diesem Stromfaden, und $q\,ds$ sein Volumen, welches wir mit $D\omega$ bezeichnen wollen, also die Stromintensität

$$i = \frac{D\omega}{Ds}\sqrt{u^2+v^2+w^2} = \frac{u}{Dx}D\omega = \frac{v}{Dy}D\omega = \frac{w}{Dz}D\omega.$$

Wenn also für das betreffende Stück des Stromfadens bei der Variation der Grössen x, y, z das i unverändert bleiben soll, so haben wir:

$$0 = \delta\left[\frac{u}{Dx}D\omega\right] = \delta\left[\frac{v}{Dy}D\omega\right] = \delta\left[\frac{w}{Dz}D\omega\right].$$

Die erste dieser Gleichungen giebt:

$$0 = \frac{D\omega}{Dx}\delta u + \frac{u}{Dx}\delta D\omega - \frac{u}{Dx^2}D\omega\,.\,\delta Dx$$

oder

$$(3.)\qquad \delta u = u\frac{\delta Dx}{Dx} - u\frac{\delta D\omega}{D\omega}.$$

Das zweite Glied rechts in dieser Gleichung ist die relative Volumvergrösserung in der Umgebung des Punktes x, y, z, und diese ist nach bekannten Sätzen, wenn δx, δy, δz continuirliche Functionen der Coordinaten sind:

$$\frac{\delta D\omega}{D\omega} = \frac{d\,\delta x}{dx} + \frac{d\,\delta y}{dy} + \frac{d\,\delta z}{dz}.$$

Ferner ist

$$\delta Dx = \frac{d\,\delta x}{dx}\cdot Dx + \frac{d\,\delta x}{dy}\cdot Dy + \frac{d\,\delta x}{dz}\cdot Dz,$$

also

$$(3^a.) \qquad u\frac{\delta Dx}{Dx} = u\cdot\frac{d\delta x}{dx}+v\cdot\frac{d\delta x}{dy}+w\cdot\frac{d\delta x}{dz},$$

und die Gleichung für δu ergiebt:

$$(3^b.) \quad \begin{cases} \delta u = \left(v\cdot\dfrac{d\delta x}{dy}-u\cdot\dfrac{d\delta y}{dy}\right)+\left(w\cdot\dfrac{d\delta x}{dz}-u\cdot\dfrac{d\delta z}{dz}\right), \\ \text{dem entsprechend} \\ \delta v = \left(u\cdot\dfrac{d\delta y}{dx}-v\cdot\dfrac{d\delta x}{dx}\right)+\left(w\cdot\dfrac{d\delta y}{dz}-v\cdot\dfrac{d\delta z}{dz}\right), \\ \delta w = \left(u\cdot\dfrac{d\delta z}{dx}-w\cdot\dfrac{d\delta x}{dx}\right)+\left(v\cdot\dfrac{d\delta z}{dy}-w\cdot\dfrac{d\delta y}{dy}\right). \end{cases}$$

Der von den beiden Elementen Ds und Ds' abhängige Theil des *Neumann*schen Potentials P_0, wie es oben in $(1^c.)$ gegeben ist, erhält dann den Werth

$$DP_0 = -\frac{A^2 Ds.Ds'}{r}\cdot\sqrt{u^2+v^2+w^2}.\sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2}\left[\frac{Dx}{Ds}\cdot\frac{Dx'}{Ds'}+\frac{Dy}{Ds}\cdot\frac{Dy'}{Ds'}+\frac{Dz}{Ds}\cdot\frac{Dz'}{Ds'}\right]\cdot q\cdot q'$$

oder da

$$\frac{Dx}{Ds} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},$$

u. s. w.

$$DP_0 = -A^2\frac{D\omega.D\omega'}{r}\left[uu'+vv'+ww'\right].$$

Wenn man hier nach den Volumenelementen $D\omega$ und $D\omega'$ integrirt, erhält man

$$P_0 = -\tfrac{1}{2}A^2\iint D\omega.D\omega'\cdot\frac{uu'+vv'+ww'}{r}.$$

Der Factor $\frac{1}{2}$ ist hier eingetreten, da bei der Ausdehnung der sechs Integrationen über sämmtliche Punkte des gesammten Leitersystems jede Combination zweier Elemente $D\omega$ und $D\omega'$ zweimal vorkommt. Wären $D\omega$ und $D\omega'$ Volumenelemente zweier getrennter Leiter S und S' und die Integration über x, y, z nur auf S, die nach x', y', z' nur über S' auszudehnen, so würde der Factor $\frac{1}{2}$ wegzulassen sein. Dass diejenigen Elemente des Integrals P_0, welche wegen $r=0$ unendlich werden, das Integral nicht unendlich machen, so lange u, v, w daselbst endlich sind, ist aus der Theorie der Potentialfunctionen bekannt.

Beschränken wir uns zunächst darauf, den hier gegebenen Theil P_0 des Potentials zu variiren und die davon abhängigen Kräfte zu suchen, die wir mit X_0, Y_0, Z_0 bezeichnen wollen, so haben wir

$$(3^d.) \qquad \delta P_0 + \int (X_0 \delta x + Y_0 \delta y + Z_0 \delta z)\, D\omega = 0.$$

Wir setzen wieder die Theilchen des Körpers als frei verschieblich voraus, so dass δx, δy und δz von einander ganz unabhängige, aber continuirliche Functionen der Coordinaten sind. Beschränken wir uns zunächst auf Variation der x, so dass vorläufig $\delta y = \delta z = 0$ gesetzt wird, so erhalten wir

$$\delta P_0 = -A^2 \iint \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) \delta x\,(u u_1 + v v_1 + w w_1)\, D\omega . D\omega'$$
$$- A^2 \iint \frac{1}{r} [u_1 \delta(u D\omega) + v_1 \delta(v D\omega) + w_1 \delta(w D\omega)]\, D\omega'.$$

Setzt man nun, nach Gleichung (3.) und $(3^a.)$

$$\delta(u . D\omega) = u D\omega \cdot \frac{\delta Dx}{Dx}$$
$$= D\omega \cdot \left[u \frac{d\delta x}{dx} + v \frac{d\delta x}{dy} + w \frac{d\delta x}{dz}\right]$$

und entsprechende Werthe für $\delta(v . D\omega)$ und $\delta(w . D\omega)$, so wird:

$$\delta P_0 = -A^2 \iint \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) \delta x\,(u u_1 + v v_1 + w w_1) + \frac{u_1}{r}\left(u \frac{d\delta x}{dx} + v \frac{d\delta x}{dy} + w \frac{d\delta x}{dz}\right)\right] D\omega . D\omega'.$$

Setzt man nun statt $D\omega$ seinen Werth

$$D\omega = dx . dy . dz,$$

so kann man durch partielle Integration die Differentialquotienten von δx fortschaffen, vorausgesetzt, dass *δx eine continuirliche Function der Coordinaten ist*, oder dass keine Gleitstellen mit absoluter Discontinuität der Bewegung vorkommen. In dem resultirenden Ausdrucke ist die mit δx multiplicirte Grösse nach $(3^d.)$ gleich $-X_0 D\omega$ zu setzen. Führen wir die Grössen ein:

$$U' = \int \frac{u'}{r} D\omega',$$
$$V' = \int \frac{v'}{r} D\omega',$$
$$W' = \int \frac{w'}{r} D\omega',$$

und berücksichtigen wir die Gleichung

$$-\frac{de}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

worin e die Dichtigkeit der freien Elektricität ist, so erhalten wir

$$(3^e.) \qquad X_0 = A^2 \left[v\left(\frac{dV'}{dx} - \frac{dU'}{dy}\right) + w\left(\frac{dW'}{dx} - \frac{dU'}{dz}\right) + U' \frac{de}{dt}\right],$$

und für die auf die Flächeneinheit der Oberfläche des Leiters wirkende Kraft, wenn ε die Menge freier Elektricität an dieser Flächeneinheit ist:

$$(3^f.) \quad \overline{X}_0 = U' \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Dazu kommt nun noch die von dem Theile P_1 des Potentials herrührende Kraft. Ehe man hier variirt, kann man seine Integration vornehmen, wie in $(1^b.)$, und man erhält, wie dort

$$P_1 = -\frac{1-k}{4} A^2 \iint \frac{de}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} r \, D\omega \, . \, D\omega'.$$

Die Integrationen sind beide über die sämmtlichen vorhandenen Volumenelemente auszudehnen, und da sich dabei die Combination jeder zwei Elemente zweimal wiederholt, so ist vorn der Factor $\frac{1}{2}$ hinzugefügt. Dabei ist aber zu bemerken, dass unter diesem $\frac{de}{dt}$ und $\frac{d\varepsilon}{dt}$ auch die Werthe der frei werdenden elektrischen Massen an den vorhandenen Grenzflächen der Leiter mitzubefassen sind.

Da das P_1 eine ähnliche Form, wie die Potentiale anziehender Massen $\frac{de}{dt}$ und $\frac{d\varepsilon}{dt}$ hat, so ergiebt sich in bekannter Weise daraus die Kraft

$$(3^g.) \quad X_1 = \frac{1-k}{2} A^2 \frac{de}{dt} \int \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{x-\xi}{r} D\omega'.$$

Oder wenn man die in Gleichung $(2^c.)$ meiner ersten Abhandlung gebrauchte Bezeichnung*) beibehält

$$\Psi = \int r \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot D\omega',$$

so ist

$$(3^h.) \quad X_1 = \left(\frac{1-k}{2}\right) A^2 \frac{de}{dt} \frac{d\Psi}{dx}.$$

Führt man ferner die anderen ebenda gebrauchten Functionen ein, nämlich

$$U = U' + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dx},$$

$$V = V' + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dy},$$

$$W = W' + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dz},$$

---

*) In dieser Gleichung ist ein Druckfehler. Der Factor 4π im Nenner muss getilgt werden, da $\triangle \varphi = -4\pi\varepsilon$ ist. In den daraus abgeleiteten Gleichungen ist dieser Fehler nicht gemacht worden.

so werden die Ausdrücke der elektrodynamischen Bewegungskräfte einfach folgende:

$$(3^i.)\quad \begin{cases} X = A^2\left[v\left(\frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dy}\right)+w\left(\frac{dW}{dx}-\frac{dU}{dz}\right)+U\frac{de}{dt}\right], \\ Y = A^2\left[u\left(\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dx}\right)+w\left(\frac{dW}{dy}-\frac{dV}{dz}\right)+V\frac{de}{dt}\right], \\ Z = A^2\left[u\left(\frac{dU}{dz}-\frac{dW}{dx}\right)+v\left(\frac{dV}{dz}-\frac{dW}{dy}\right)+W\frac{de}{dt}\right]. \end{cases}$$

Dabei ist unter e alle an Flächen und in körperlichen Räumen angesammelte freie Elektricität zu verstehen, ebenso wie dies bei der Bildung der Function Ψ mit $\frac{d\varepsilon}{dt}$ geschehen ist. Dass die mit u, v, w multiplicirten Factoren den Componenten der magnetischen Kraft, welche durch die Ströme erzeugt wird, proportional sind, ist in Gleichung (19^b.) meiner ersten Abhandlung nachgewiesen.

Die in (3^i.) gegebenen Werthe der elektrodynamischen Kräfte haben die *Grassmann*sche Form, nur dass in dieser letztern die auf die freiwerdende Elektricität $\frac{de}{dt}$ wirkenden Kräfte fehlen. Es bleibt noch übrig den von $\frac{de}{dt}$ unabhängigen Theil auf die *Ampère*sche Form zu bringen.

Zu dem Ende führe man in dem Ausdrucke

$$(3^k.)\quad \begin{cases} K = u\frac{dU'}{dx}+v\frac{dU'}{dy}+w\frac{dU'}{dz} \\ \quad = -\iiint u'\frac{[u(x-\xi)+v(y-\eta)+w(z-\zeta)]}{r^3}\cdot d\xi\,.\,d\eta\,.\,d\zeta \end{cases}$$

eine partielle Integration nach ξ aus, welche ergiebt

$$K = +\int u_1(x-\xi)\frac{[u(x-\xi)+v(y-\eta)+w(z-\zeta)]}{r^3}\cos a\,.\,d\omega$$
$$+\iiint (x-\xi)\left[\frac{u_1 u}{r^3}-3\frac{(x-\xi)^2u+(y-\eta)(x-\xi)v+(z-\zeta)(x-\xi)w}{r^5}\right]d\xi.d\eta.d\zeta$$
$$-\iiint (x-\xi)\frac{du_1}{d\xi}\frac{[u(x-\xi)+v(y-\eta)+w(z-\zeta)]}{r^3}d\xi\,.\,d\eta\,.\,d\zeta.$$

Mittels der Gleichung

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{du'}{d\xi}+\frac{dv'}{d\eta}+\frac{dw'}{d\zeta}$$

lässt sich aus dem letzten Integral zuerst das $\frac{du'}{d\xi}$ und dann $\frac{dv'}{d\eta}$ und $\frac{dw'}{d\zeta}$ durch partielle Integration beseitigen. Das giebt

$$K = \iiint \frac{d\varepsilon}{dt}(x-\xi)\frac{[u(x-\xi)+v(y-\eta)+w(z-\zeta)]}{r^3}d\xi.d\eta.d\zeta$$
$$-u\frac{dU'}{dx}-v\frac{dV'}{dx}-w\frac{dW'}{dx}$$
$$-3\iiint\frac{(x-\xi)}{r^5}[(x-\xi)u+(y-\eta)v+(z-\zeta)w][(x-\xi)u'+(y-\eta)v'+(z-\zeta)w']d\xi.d\eta.d\zeta.$$

Wenn man nun zur ersten der Gleichungen (3^i.) hinzuaddirt die aus (3^k.) folgende Gleichung:

$$0 = A^2\left[-K+u\frac{dU'}{dx}+v\frac{dU'}{dy}+w\frac{dU'}{dz}\right],$$

so erhält man

$$(3^l.)\quad\begin{cases} X = A^2U\frac{de}{dt}-A^2\iiint\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{x-\xi}{r^3}[u(x-\xi)+v(y-\eta)+w(z-\zeta)]d\xi.d\eta.d\zeta \\ \qquad -A^2\iiint\frac{x-\xi}{r^3}[2\cos(i,j)-3\cos(i,r)\cos(j,r)]d\xi.d\eta.d\zeta. \end{cases}$$

Das letzte Glied dieses Ausdrucks ist die *Ampère*sche Kraft zwischen zwei Stromelementen. Das erste Glied rührt her von den Wirkungen auf die freiwerdende Elektricität in x, y, z. Das zweite giebt die Wirkung der anderwärts frei werdenden Elektricität auf die Strömung im Punkte x, y, z. Wird nirgend Elektricität frei, das heisst, sind alle Ströme, die auf einander wirken, geschlossene, so bleibt die *Ampère*sche Kraft allein übrig.

Dadurch ist auch für Leiter von drei Dimensionen, bei denen die Bewegungen der einzelnen Volumenelemente in ganz beliebiger Weise geschehen können, vorausgesetzt nur, dass sie continuirlich für benachbarte Theilchen geschehen und die Stromfäden nicht zerreissen, erwiesen, dass *für geschlossene Strömungen das Potentialgesetz genau dieselben elektrodynamischen Bewegungskräfte ergiebt, wie Ampères Gesetz.*

Der zweite Theil des Werthes von X in (3^l.) ist die x-Componente einer anziehenden Kraft

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}d\xi.d\eta.d\zeta\left[u\frac{x-\xi}{r}+v\frac{y-\eta}{r}+w\frac{z-\zeta}{r}\right],$$

welche die frei werdende Elektricität $\frac{d\varepsilon}{dt}$ im Volumenelemente $d\xi.d\eta.d\zeta$ auf die von ihr weg in Richtung von r fliessende elektrische Strömung im Punkte x, y, z ausübt.

Der erste Theil jenes Werthes von x endlich entspricht der auf die im Punkte x, y, z frei werdende Elektricität ausgeübten Kraft.

§. 17. Die Anwendung des Potentialgesetzes auf Gleitstellen.

Die in §. 15 angestellten Betrachtungen setzten voraus, dass entweder die Variationen δx, δy, δz continuirliche Functionen der Coordinaten sind, wobei dann die Continuität der Stromleitung erhalten bleibt, oder dass die Stromleitung abbricht, wo die Variationen discontinuirlich werden. Nun können aber auch Fälle vorkommen, in denen man die Bewegung der leitenden Metallstücke als discontinuirlich betrachten kann, und doch die Stromleitung erhalten bleibt. Ein solcher Fall wäre zunächst der, wo die zwei Metallstücke sich trennen, und der Strom zwischen ihnen einen leitenden Bogen von glühendem Metalldampf erzeugt. Hier besteht weiter keine analytische Schwierigkeit in der Anwendung unseres Gesetzes, da das materielle leitende Verbindungsglied sich durch Dehnung aus den vorher an der Berührungsstelle liegenden Metalltheilchen gebildet hat. Hier ist und bleibt das neue Leiterelement, welches die Lücke ausfüllt, für sich bestehend, so lange überhaupt Leitung besteht, und an diesen Fall kann sich also kein Zweifel anknüpfen.

Weniger augenfällig wird das Verhältniss, wenn der Draht, welcher sich von seiner bisherigen Berührungsstelle mit dem anderen Leiter trennt, sogleich wieder mit anderen Stellen des letzteren Leiters in Berührung kommt, so dass sich immer wieder neue Stromfäden anknüpfen, und deshalb der Funkenbogen zwischen beiden Leitern gar nicht oder nur in unterbrochener Weise zur Erscheinung kommt. Dieser Fall würde dem Bestehen einer Gleitstelle zwischen den beiden Leitern entsprechen.

Denkt man sich die Stromfäden construirt, welche durch die Gleitstelle hindurchgehen, und nehmen wir einen absoluten Sprung in den Werthen der Geschwindigkeiten diesseits und jenseits der Gleitfläche an, so würde aus einer solchen Annahme folgen, dass in der Gleitstelle jeder der zur Zeit bestehenden Stromfäden immer und immer wieder zerrissen wird. Die Berechnung der ponderomotorischen Kräfte aus dem Potentialgesetz kann aber nur unter der Voraussetzung geschehen, dass die Strömung in jedem aus denselben materiellen Theilen bestehenden Stromfaden ungeändert bleibt. Wie sich die materiellen Theile des Leiters dabei in dem Faden verschieben, hat keinen Einfluss auf die geleistete Arbeit, da nach der Länge des Leiters keine elektrodynamischen Bewegungskräfte wirken. Man würde also auch in diesem Falle bei der Berechnung der Variationen voraussetzen müssen, dass die abreissenden Stromfäden noch durch ein leitendes Linienelement für einen Augenblick verbunden bleiben. Diese Vorstellung kann unnatürlich oder willkürlich erscheinen, sie

ist es aber nicht, wenn wir beachten, dass bei wirklich ausführbaren Versuchen eine absolute Discontinuität der Bewegung gar nicht eintritt, und wenn man von den wirklich vorkommenden Verhältnissen den Uebergang zur Grenze einer theoretisch discontinuirlichen Bewegung der beiden Leiter macht.

Bei der Schwäche der elektrodynamischen Kräfte, welche auf einen einzelnen Leitungsdraht wirken, müssen wir den Draht sehr leicht beweglich machen und doch dafür sorgen, dass an der Gleitstelle sehr gute Leitung des Stromes stattfindet. Um beide Bedingungen gleichzeitig zu erfüllen, kennen wir bisher keine andere Methode, als die, an der Gleitstelle flüssige Leiter, entweder Quecksilber oder Elektrolyten, einzuschalten, deren Grenzschichten an den beiden metallischen Elektroden festhaften, und deren innere Schichten sich so bewegen, dass sie einen continuirlichen Uebergang von der Bewegung der einen zu der der anderen Elektrode herstellen. Hierbei ist von einer wirklichen Discontinuität der Bewegung also gar keine Rede, und auf dergleichen Versuche bleibt die bisher gegebene Beweisführung, dass für geschlossene Ströme das *Ampère*sche und *Neumann*sche Gesetz dieselben Resultate geben, vollkommen anwendbar.

Denkt man sich die flüssige Schicht immer dünner werdend, so kann man die besprochene continuirliche Bewegung einer discontinuirlichen bis zu jedem Grade der Annäherung ähnlicher machen, ohne dass die bisher angestellten Betrachtungen ihre Anwendbarkeit verlieren.

Solche Fälle treten ein, wenn wir zwei harte Metalle auf einander schleifen lassen. Es ist bekannt, dass dies unter ziemlich starkem Druck geschehen muss, wenn eine gute Stromleitung erreicht werden soll; dabei verändern sich die oberflächlichen Schichten der Metalle sehr merklich und reiben sich ab, woraus wir schliessen müssen, dass ihre oberflächlichen Schichten der Bewegung des andern Stücks zum Theile folgen. Bei leicht entzündlichen Metallen, wie Eisen, sprühen dabei Funken auf, welche zeigen, dass der Uebergang der Elektricität zum Theil auch durch kurze Dampfbögen unterhalten wird. Für dergleichen Fälle hat man die elektrodynamischen Bewegungskräfte der Gleitstelle allerdings noch nicht direct beobachtet, doch hat Herr *F. E. Neumann* durch den Versuch gezeigt, dass die inducirten elektromotorischen Kräfte auch in diesen Fällen seinem Potentialgesetze folgen, und daraus folgt nach dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft, dass es auch die elektrodynamischen Kräfte thun müssen (s. unten §. 20).

Die Annahme einer Gleitung mit discontinuirlicher Verschiebung ist

also den bisher beobachteten Thatsachen gegenüber nur eine Grenze, der die wirklichen Verhältnisse sehr nahe kommen können, und die deshalb analytisch als vereinfachende Darstellung derselben gebraucht werden mag, vorausgesetzt dass man in der Rechnung das richtige Annäherungsverfahren anwendet. Aehnliche Grenzbegriffe haben wir in der mathematischen Physik viele, wie den des absolut festen Körpers, der incompressiblen Flüssigkeit u. s. w., deren Eigenschaften sich aus den allgemeinen Principien der Mechanik (*Newtons* Axiomen) auch nur dann herleiten lassen, wenn man sie als die Grenze der elastischen Körper von grossem Elasticitätscoefficienten ansieht. Thut man dies nicht, so muss man bei ihrer Behandlung noch besondere Hypothesen zu Hilfe nehmen, welche die besondere Art und Weise definiren, wie Kräfte, gegen feste Körper wirkend, zu zerlegen sind.

In unserem Falle ergeben sich also richtige Folgerungen aus dem *Neumann*schen Gesetze, wenn man eine Gleitung mit discontinuirlicher Verschiebung als den Grenzfall continuirlicher Verschiebung ansieht, welche nur auf eine immer dünner werdende Schicht zusammengedrängt wird. Man kann nun entweder so verfahren, dass man aus dem Potentialausdrucke die *Ampère*schen Kräfte herleitet, ehe man die Uebergangsschicht als unendlich dünn gesetzt hat; oder wenn man auf diese unmittelbar den Potentialausdruck anwenden will, das Potential von verschwindend kleinen Stromfadenelementen mitberechnet, welche die gleitenden Flächen verbinden.

Nehmen wir an, dass an der negativen Seite der yz-Fläche die leitende Masse in Ruhe sei, dass zwischen $x = 0$ und $x = \lambda$ deren Geschwindigkeit in Richtung der y sei

$$\mathfrak{v} = \frac{x\beta}{\lambda};$$

dagegen für $x > \lambda$

$$\mathfrak{v} = \beta.$$

Die elektrische Strömung sei senkrecht zur Gleitfläche parallel x und von dem constanten Werthe u_0, so würden in den Schichten zwischen $x = 0$ und $x = \lambda$, wenn jeder materielle leitende Faden seine Stromintensität behielte, nach dem Zeittheilchen dt die Stromcomponenten sein

$$u = u_0,$$

$$v = u_0 \frac{\beta}{\lambda} dt,$$

$$w = 0.$$

Betrachten wir die Dicke λ als verschwindend klein und vernachlässigen wir die Glieder, welche λ in höherer als der ersten Potenz enthalten, so wird der Werth des elektrodynamischen Potentials für das Flächenstück Q dieser verschiebbaren Schicht sein

$$P = -\left(Uu_0 + Vu_0 \frac{\beta}{\lambda} dt\right) Q\lambda,$$

und wenn wir die gesammte Intensität des durch Q gehenden Stromes mit J bezeichnen,

$$J = Qu,$$

so ist

$$\frac{dP}{dt} dt = -VJ\beta dt,$$

also unabhängig von der Dicke λ der verschiebbaren Schicht. Eine Kraft Y, welche an der Ebene $x = \lambda$ angebracht dieselbe Arbeit leisten würde, müsste sein

$$Y\beta dt = -\frac{dP}{dt} \cdot dt,$$

woraus folgt

$$Y = JV.$$

Es ist dies einfach der Werth der Kraft, welche auf die Endfläche der verschiebbaren Schicht wirken würde, wenn sie eine Endfläche des Stromes wäre. Auf diese Endkraft reducirt sich die ganze elektrodynamische Wirkung, welche die übrigen vorhandenen Strömungen auf die verschiebbare Schicht ausüben, sobald diese verschwindend kleine Dicke hat.

Da aber die Fläche $x = \lambda$ in Wahrheit keine Endfläche des durchströmten Leiters ist, sondern an den gleitenden festen Leiter sich anschliesst, so begegnet die Endkraft der sich verschiebenden Schicht der entgegengesetzt gerichteten gleich grossen Endkraft an der Endfläche des festen Leiters, und beide heben sich gegenseitig auf.

Der ganze Einfluss einer solchen unendlich dünnen Uebergangsschicht, wie wir sie angenommen haben, besteht also darin, dass die beiden Endkräfte wegfallen, welche auf die Grenzfläche der beiden Leiter wirken würden, wenn statt der leitenden Uebergangsschicht eine isolirende Zwischenschicht bestände. Das heisst also, es wirken diesseits und jenseits der Gleitfläche nur die *Ampère*schen (oder *Grassmann*schen) Kräfte. Diejenigen Theile dieser Kräfte,

welche auf die leitenden Elemente der Uebergangsschicht selbst wirken, sind verschwindend klein, wenn die Dicke der Schicht verschwindend klein ist.

Will man also die elektrodynamische Arbeit direct aus dem Werthe des Potentials berechnen, und dabei die Existenz der Uebergangsschicht vernachlässigen, so muss man an Stelle dieser Schicht zwei Endkräfte an die Grenzflächen der gleitenden Leiter hinzugefügt denken, welche denjenigen gerade entgegengesetzt sind, die ebenda auf Endflächen der Strömung wirken würden. Denn die genannten Grenzflächen sind eben keine Endflächen der Strömung. Diese Art der Darstellung vereinfacht die Berechnung der Wirkung oft in hohem Grade. Nehmen wir zum Beispiel das von Herrn *Riecke* angeführte Beispiel, wo der bewegliche Theil des Leiters der Radius eines Kreises ist, der an der leitenden Peripherie des Kreises gleitet, und die Zuleitung des Stromes zum Centrum des Kreises, die Ableitung von der Peripherie symmetrisch zur Axe geschieht, während die elektrodynamische Wirkung von starken Kreisströmen ausgeht, die concentrisch mit dem Gleitkreise angebracht sind. In einem solchen Falle rotirt bekanntlich der Radius entgegengesetzt der positiven Elektricität in den Kreisströmen. Herr *Riecke* hat Recht, dass in diesem Falle das Potential, welches die Kreisströme auf den Radius ausüben, sich bei dessen Bewegung nicht ändert, weil er immerfort in symmetrischer Lage zu ihnen bleibt. Aber die Stromfäden in der Gleitstelle gehen fortdauernd aus der radialen in die tangentiale Richtung über, und deren Potential gegen die Kreisströme ist in erster Lage Null, in zweiter Lage hat es einen von Null verschiedenen Werth. Die Vorgänge in der Gleitstelle allein sind in diesem Falle das Treibende, und aus unserer Darstellung ergiebt sich, dass der Werth der drehenden Kraft einfach zu finden ist, indem man die Endkraft für die gleitende Spitze berechnet, und diese negativ nimmt.

An ähnlichen Beispielen hat Herr *C. Neumann* Anstoss genommen *) und leugnet deshalb die Anwendbarkeit des von seinem Vater aufgestellten Potentialgesetzes auf Stromelemente. Die absolute Discontinuität der Bewegung in der Gleitstelle, welche die Schwierigkeit (das Zerreissen der Stromfäden) herbeiführt, ist aber nur eine mathematische Fiction. Nimmt man sie streng, so giebt das Potentialgesetz, welches Fortdauer des Stroms in denselben materiellen Stromfäden voraussetzt, keine falsche, sondern überhaupt gar keine

*) Die elektrischen Kräfte. Leipzig 1873. S. 77—79.

Auskunft für die Stellen, wo die Fäden zerreissen. Den richtigen Werth findet man auf dem von uns eingeschlagenen Wege, welcher die den wirklichen Verhältnissen entsprechende Art der Annäherung an die Discontinuität analytisch ausdrückt.

§. 18. Die elektrodynamische Induction.

Herr *F. E. Neumann* hat das von ihm aufgestellte Gesetz der Induction im Anfange der oben citirten Abhandlung auch nur für geschlossene lineare Ströme erwiesen. In der ersten meiner elektrodynamischen Abhandlungen (Bd. 72 dieses Journals) habe ich seine Anwendung ausgedehnt auf die durch Aenderung der Stromstärke hervorgerufene Induction in ruhenden Leitern von drei Dimensionen mit ungeschlossenen Strömungen. Dasselbe ist hier noch zu thun für die allgemeinsten Fälle der Induction, bei denen gleichzeitig Aenderungen der Stromintensität und der Lage der Leiter vorkommen.

Die elektromotorische Kraft, welche auf das Element Ds eines Stromfadens einwirkt, ist, wenn wir die bisher gewählten Maasseinheiten beibehalten und die *Neumann*schen Sätze, welche zunächst nur für Leiter von endlicher Länge aufgestellt sind, auf deren einzelne Längenelemente übertragen, unabhängig von der Stromstärke in Ds selbst, und gleich der Geschwindigkeit der Aenderung des Potentials $\frac{dP}{dt}$, welches sämmtliche vorhandenen Ströme auf das von der Einheit der Stromstärke durchflossene materielle leitende Element Ds hervorbringen.

Für zwei lineare Stromelemente Ds und $D\sigma$ mit den Stromstärken i und j können wir setzen

$$(4.) \qquad DP = i\cdot j\cdot A^2\cdot\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{d\sigma}+\frac{1+k}{2}\cdot\frac{d^2r}{ds.d\sigma}\right]Ds\cdot D\sigma,$$

oder wie in (1.)

$$DP = -\tfrac{1}{2}A^2\cdot\frac{i.j}{r}\cdot[(1+k)\cos(Ds,D\sigma)+(1-k)\cos(r,Ds).\cos(r,D\sigma)].Ds.D\sigma.$$

Die inducirte Kraft $\mathfrak{R}$ für die Längeneinheit der Stromleiter s und σ wäre nach dem eben ausgesprochenen Principe durch folgende Beziehung gegeben

$$(4^a.) \qquad \mathfrak{R}.Ds.D\sigma = \frac{A^2}{\delta t}\cdot\delta\left\{j\cdot\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{d\sigma}+\frac{1+k}{2}\cdot\frac{d^2r}{ds.d\sigma}\right]\cdot Ds\cdot D\sigma\right\}$$

oder

$$\mathfrak{R}.Ds.D\sigma = -\frac{A^2}{2\delta t}\cdot\delta\left\{\frac{j}{r}\cdot[(1+k)\cos(Ds,D\sigma)+(1-k)\cos(r,Ds).\cos(r,D\sigma)].Ds.D\sigma\right\}\cdot$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_1$ die entsprechende inducirte Kraft, die im Stromleiter σ wirkt, so ist

$$\mathfrak{R}_1 . Ds . D\sigma = \frac{A^2}{\delta t} \cdot \delta \left\{ i \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1+k}{2} \cdot \frac{d^2 r}{ds . d\sigma} \right] \cdot Ds \cdot D\sigma \right\}$$

und die Arbeit $\delta\mathfrak{W}$, welche die ponderomotorischen Kräfte an den Längeneinheiten der Stromleiter verrichten,

$$(4^b.) \qquad \delta\mathfrak{W} . Ds . D\sigma = -A^2 . i . j \delta \left\{ \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1+k}{2} \cdot \frac{d^2 r}{ds . d\sigma} \right] \cdot Ds \cdot D\sigma \right\}.$$

Daraus folgt

$$(4^c.) \qquad \delta(DP) = [(\mathfrak{R} . i + \mathfrak{R}_1 . j)\delta t + \delta\mathfrak{W}] . Ds . D\sigma.$$

Diese letztere Gleichung ist, wie wir später sehen werden, der Ausdruck des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft.

Wenn wir diese Ausdrücke auf Leiter von drei Dimensionen übertragen wollen, so müssen wir die Aenderung des Potentials P suchen für ein Stück Ds eines aus denselben materiellen Theilchen bestehenden, und von der Stromstärke $J = 1$ durchströmten Stromfadens. Sind Dx, Dy, Dz die Projectionen von Ds auf die Coordinatenaxen, so ist der Theil von P, der sich auf Ds bezieht, mit Benutzung der schon früher gebrauchten Zeichen

$$(5.) \qquad PDs = -JA^2[U . Dx + V . Dy + W . Dz].$$

Dieser Ausdruck bleibt nach bekannten Sätzen endlich, auch wenn das Element Ds des Stromfadens innerhalb desselben Raumes liegt, der die Elemente für die Integrale U, V, W liefert. Ich werde im Folgenden diese Grössen als Functionen der Zeit und der Coordinaten x, y, z des im Raume festen Punktes betrachten, auf den sie sich beziehen. Die Variationen δU, δV, δW sollen also die Veränderungen bezeichnen, welche U, V, W in dem festen Raumpunkte x, y, z durch Aenderungen der Stromstärke und Bewegungen der übrigen Stromelemente erleiden. Dagegen wollen wir $\delta(U)$, $\delta(V)$, $\delta(W)$ gebrauchen, um die Aenderungen in dem bewegten materiellen Punkte zu bezeichnen, der zu Anfang der Zeit δt im Punkte x, y, z sich befindet. Es ist also

$$\delta(U) = \delta U + \frac{dU}{dx} \cdot \delta x + \frac{dU}{dy} \cdot \delta y + \frac{dU}{dz} \cdot \delta z,$$

wenn δx, δy und δz die Verschiebungen bezeichnen, welche jener materielle Punkt im Zeittheilchen δt erlitten hat. Die Veränderung von Dx ist, wie sich leicht ergiebt,

$$\delta Dx = \frac{d\delta\xi}{dx}\cdot Dx + \frac{d\delta\xi}{dy}\cdot Dy + \frac{d\delta\xi}{dz}\cdot Dz.$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe ergiebt Gleichung (5.), da $J = 1$,

$$(5^a.) \qquad \mathfrak{R}.Ds.\delta t = \delta(P.Ds) = (\mathfrak{X}.Dx + \mathfrak{Y}.Dy + \mathfrak{Z}.Dz)\delta t,$$

worin gesetzt ist

$$(5^b.) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}.\delta t = -A^2\left[\delta(U) + U\cdot\frac{d\delta x}{dx} + V\cdot\frac{d\delta y}{dx} + W\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right], \\ \mathfrak{Y}.\delta t = -A^2\left[\delta(V) + U\cdot\frac{d\delta x}{dy} + V\cdot\frac{d\delta y}{dy} + W\cdot\frac{d\delta z}{dy}\right], \\ \mathfrak{Z}.\delta t = -A^2\left[\delta(W) + U\cdot\frac{d\delta x}{dz} + V\cdot\frac{d\delta y}{dz} + W\cdot\frac{d\delta z}{dz}\right]. \end{cases}$$

Setzen wir statt der Verschiebungen δx, δy und δz die entsprechenden Componenten der Geschwindigkeit

$$\delta x = \alpha.\delta t,$$
$$\delta y = \beta.\delta t,$$
$$\delta z = \gamma.\delta t,$$

so ergeben sich die Werthe der Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, welche, wie Gleichung (5^a.) zeigt, die den Coordinatenaxen parallelen Componenten der inducirten elektromotorischen Kraft $\mathfrak{R}$ sind, wie folgt:

$$(5^c.) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = -A^2\left[\frac{\delta U}{\delta t} + \alpha\cdot\frac{dU}{dx} + \beta\cdot\frac{dU}{dy} + \gamma\cdot\frac{dU}{dz} + U\cdot\frac{d\alpha}{dx} + V\cdot\frac{d\beta}{dx} + W\cdot\frac{d\gamma}{dx}\right], \\ \mathfrak{Y} = -A^2\left[\frac{\delta V}{\delta t} + \alpha\cdot\frac{dV}{dx} + \beta\cdot\frac{dV}{dy} + \gamma\cdot\frac{dV}{dz} + U\cdot\frac{d\alpha}{dy} + V\cdot\frac{d\beta}{dy} + W\cdot\frac{d\gamma}{dy}\right], \\ \mathfrak{Z} = -A^2\left[\frac{\delta W}{\delta t} + \alpha\cdot\frac{dW}{dx} + \beta\cdot\frac{dW}{dy} + \gamma\cdot\frac{dW}{dz} + U\cdot\frac{d\alpha}{dz} + V\cdot\frac{d\beta}{dz} + W\cdot\frac{d\gamma}{dz}\right]. \end{cases}$$

Diese Werthe lassen sich auch schreiben:

$$(5^d.) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = -A^2\left[\frac{\delta U}{\delta t} + \beta\left(\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}\right) + \gamma\left(\frac{dU}{dz} - \frac{dW}{dx}\right) + \frac{d}{dx}(U\alpha + V\beta + W\gamma)\right], \\ \mathfrak{Y} = -A^2\left[\frac{\delta V}{\delta t} + \alpha\left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}\right) + \frac{d}{dy}(U\alpha + V\beta + W\gamma)\right], \\ \mathfrak{Z} = -A^2\left[\frac{\delta W}{\delta t} + \alpha\left(\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}\right) + \beta\left(\frac{dW}{dy} - \frac{dV}{dz}\right) + \frac{d}{dz}(U\alpha + V\beta + W\gamma)\right]. \end{cases}$$

Die ersten Theile dieser Ausdrücke $\frac{\delta U}{\delta t}$, $\frac{\delta V}{\delta t}$ und $\frac{\delta W}{\delta t}$ geben die inducirten Kräfte, denen das Leiterelement ausgesetzt sein würde, auch wenn es nicht selbst bewegt würde. Wenn wir die in Gleichung (19^b.) meiner Abhand-

lung im 72. Bande eingeführten Werthe der magnetischen Kraftcomponenten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ anwenden

$$(5^e.)\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = A\left[\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}\right], \\ \mathfrak{M} = A\left[\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}\right], \\ \mathfrak{N} = A\left[\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}\right], \end{cases}$$

so erhalten die zweiten in $(5^d.)$ mit α, β, γ multiplicirten Theile der obigen Kräfte, die wir mit $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ bezeichnen wollen, die Werthe

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= -A[\beta\mathfrak{N} - \gamma\mathfrak{M}], \\ \mathfrak{Y}_1 &= -A[\gamma\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{N}], \\ \mathfrak{Z}_1 &= -A[\alpha\mathfrak{M} - \beta\mathfrak{L}], \end{aligned}$$

woraus folgt

$$(5^f.)\ \mathfrak{X}_1 Dx + \mathfrak{Y}_1 Dy + \mathfrak{Z}_1 Dz = -A[\mathfrak{L}(\gamma Dy - \beta Dz) + \mathfrak{M}(\alpha Dz - \gamma Dx) + \mathfrak{N}(\beta Dx - \alpha Dy)].$$

Das ist die durch Bewegung des Leiterelements Ds quer durch die Richtung der magnetischen Kraftlinien erzeugte inducirende Kraft.

Endlich der letzte Theil der Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, der die Differentialquotienten von $(U\alpha + V\beta + W\gamma)$ enthält, und den wir beziehlich mit $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Z}_2$ bezeichnen wollen, giebt für einen linearen Leiter, dessen Längenelemente Ds sind,

$$(5^g.)\quad \int(\mathfrak{X}_2 Dx + \mathfrak{Y}_2 Dy + \mathfrak{Z}_2 Dz) = -\overline{(U\alpha + V\beta + W\gamma)},$$

wo der Ausdruck rechts die Differenz der den Grenzen der Integration angehörigen Werthe bezeichnet. Er wird gleich Null, wenn die Integration über eine geschlossene Curve ausgedehnt wird.

Ich will hier nur noch an die seit *Ampère* bekannten Beziehungen zwischen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und U, V, W erinnern. Es sei $d\omega$ das Flächenelement einer einfach zusammenhängenden Fläche, und es seien a, b, c die Winkel, welche die Normale dieses Elements mit den Coordinatenaxen macht, ds aber das Linienelement der Grenzcurve, so ergiebt sich mit Benutzung der in $(5^e.)$ gegebenen Werthe, wenn $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und U, V, W in der Fläche überall stetig und endlich sind,

$$\begin{aligned} i\iint(\mathfrak{L}.\cos a + \mathfrak{M}.\cos b + \mathfrak{N}.\cos c)\,d\omega &= i\iint(\mathfrak{L}.dy.dz + \mathfrak{M}.dx.dz + \mathfrak{N}.dx.dy) \\ &= i\int(U.dx + V.dy + W.dz) = \int(U.u + V.v + W.w)\,ds, \end{aligned}$$

worin die ersten beiden Integrale über die ganze Fläche, das letzte über die ganze Umfangslinie auszudehnen sind. Das elektrodynamische Potential für die vom Strome i durchflossene Umfangslinie findet sich gleich dem magnetischen Potential für die Fläche, wenn deren Flächeneinheit das magnetische Moment i in Richtung ihrer Normale hat. Es entspricht dies dem von *Ampère* aufgestellten Satze, wonach die ponderomotorische Einwirkung eines geschlossenen Stromes auf andere Ströme oder Magneten, gleich der magnetischen Einwirkung einer in der angegebenen Art magnetisirten und von der Stromlinie begrenzten Fläche ist.

Daraus ergiebt sich weiter, dass die inducirte elektromotorische Kraft in der ganzen Länge der Grenzcurve gleich ist der Grösse

$$\frac{d}{dt}\iint [L.\cos a + M.\cos b + N.\cos c]\, d\omega.$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Grösse ist die in Richtung der Normale von $d\omega$ wirkende magnetische Richtkraft, multiplicirt mit $d\omega$. Nennen wir diese R, und beschränkt sich die Fläche auf ihr eines Element $d\omega$, so ist die längs des ganzen Umfangs von $d\omega$ inducirte elektromotorische Kraft

$$\frac{d}{dt}(R.d\omega).$$

§. 19. Die Erhaltung der Energie.

Wir haben noch zu untersuchen, in wiefern die gefundenen ponderomotorischen Kräfte X, Y, Z der Gleichung (3′.) und die elektromotorischen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ der Gleichungen (5′.) die Forderungen des Gesetzes von der Erhaltung der Energie erfüllen. Wir wollen zunächst die Werthe beider Arten von Kräften als unbekannt betrachten und aus der Constanz der Energie den Zusammenhang herleiten, der zwischen beiden besteht.

Wenn wir den Leitungswiderstand der Volumeneinheit eines körperlich ausgedehnten Leiters, nach denselben Einheiten gemessen wie in den Gleichungen (3′.) meiner ersten Abhandlung, mit $\varkappa$ bezeichnen, so sind die Gleichungen der elektrischen Strömung:

$$(6.)\quad \begin{cases} \varkappa u = -\dfrac{d\varphi}{dx} + \mathfrak{X} + \mathfrak{A}, \\ \varkappa v = -\dfrac{d\varphi}{dy} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{B}, \\ \varkappa w = -\dfrac{d\varphi}{dz} + \mathfrak{Z} + \mathfrak{C}. \end{cases}$$

Darin ist φ die elektrostatische Potentialfunction, und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind die anderweitigen elektromotorischen Kräfte hydroelektrischen oder thermoelektrischen Ursprungs, welche etwa mitwirken.

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit $u\,dt$, die zweite mit $v\,dt$, die dritte mit $w\,dt$, addiren und integriren die ganze Summe über den ganzen Raum, so erhalten wir

$$(6^a.)\quad \begin{cases} \delta t\iiint z(u^2+v^2+w^2)\,dx.dy.dz = \delta t\iiint[\mathfrak{A}u+\mathfrak{B}v+\mathfrak{C}w]\,dx.dy.dz, \\ \qquad -\delta t\iiint\left[u\cdot\frac{d\varphi}{dx}+v\cdot\frac{d\varphi}{dy}+w\cdot\frac{d\varphi}{dz}\right]dx.dy.dz, \\ \qquad +\delta t\iiint[\mathfrak{X}u+\mathfrak{Y}v+\mathfrak{Z}w]\,dx.dy.dz. \end{cases}$$

Das Integral links ist das Arbeitsäquivalent der in den Stromleitern während des Zeittheilchens δt entwickelten Wärme. Das erste Integral rechts ist das Arbeitsäquivalent der bei der Strömung aufgebrauchten chemischen Kräfte in hydroelektrischen Erregern, beziehlich der durch das *Peltier*sche Phänomen aufgebrauchten Wärme in thermoelektrischen Erregern, wie ich dies schon in meinem Büchlein über die Erhaltung der Kraft entwickelt habe. Das zweite Integral links ist das durch die elektrischen Strömungen verloren gegangene Arbeitsäquivalent elektrostatischer Kräfte, wie die zur Gleichung (5^a.) meiner Abhandlung im 72. Bande dieses Journals gegebenen Erläuterungen mit Berücksichtigung von (4^b.) ebendaselbst zeigen.

Daraus folgt, dass das dritte Integral der rechten Seite, welches wir mit $Q\,\delta t$ bezeichnen wollen,

$$(6^b.)\qquad Q = \iiint(\mathfrak{X}u+\mathfrak{Y}v+\mathfrak{Z}w)\,dx.dy.dz$$

dasjenige Arbeitsäquivalent darstellt, welches die inducirten elektromotorischen Kräfte zur Wärmeentwickelung in der Leitung beigetragen haben. Ausserdem haben die ponderomotorischen Kräfte der elektrischen Ströme mechanische Arbeit erzeugt, deren Betrag $\mathfrak{W}\,\delta t$ ist,

$$(6^c.)\qquad \mathfrak{W} = \iiint(X\alpha+Y\beta+Z\gamma)\,dx.dy.dz,$$

worin α, β, γ, wie im vorigen Paragraphen, die Geschwindigkeitscomponenten des materiellen Volumenelements $dx.dy.dz$ in Richtung der x, y und z bezeichnen.

Diese letzten beiden Arbeitsäquivalente $Q\,\delta t$ und $\mathfrak{W}\,\delta t$ sind nun zu leisten auf Kosten des Arbeitswerthes der elektrischen Strömungen, den wir

in Gleichung (4ᵃ.) meiner ersten Abhandlung mit Φ_0 bezeichnet haben:

$$(6^d.) \qquad \Phi_0 = \tfrac{1}{2}A^2\iiint(U.u+V.v+W.w)\,dx.dy.dz;$$

und wir haben also

$$(6^e.) \qquad Q+\mathfrak{W} = -\frac{d\Phi_0}{dt},$$

als Ausdruck des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft.

Wenn wir in den Werth von $\mathfrak{W}$ der Gleichung (6ᵉ.) die von uns aus dem Potentialgesetz hergeleiteten Werthe der Kräfte X, Y, Z der Gleichung (3.) setzen, darin aber die Grösse $\frac{de}{dt}$ durch ihren Werth ersetzen, nämlich in Volumenelementen

$$\frac{de}{dt} = -\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz},$$

und in Flächenelementen an der Grenze der Leiter

$$\frac{de}{dt} = u.\cos a+v.\cos b+w.\cos c,$$

endlich die Differentialquotienten von u, v, w durch partielle Integration beseitigen, so erhalten wir einen Ausdruck von der Form

$$(6^f.) \qquad \mathfrak{W} = A^2\iiint[\mathfrak{P}.u+\mathfrak{Q}.v+\mathfrak{R}.w]\,dx.dy.dz,$$

worin

$$(6^g.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = \beta\left(\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dx}\right)+\gamma\left(\frac{dU}{dz}-\frac{dW}{dx}\right)+\frac{d}{dx}[U.\alpha+V.\beta+W.\gamma], \\ \mathfrak{Q} = \alpha\left(\frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dy}\right)+\gamma\left(\frac{dV}{dz}-\frac{dW}{dy}\right)+\frac{d}{dy}[U.\alpha+V.\beta+W.\gamma], \\ \mathfrak{R} = \alpha\left(\frac{dW}{dx}-\frac{dU}{dz}\right)+\beta\left(\frac{dW}{dy}-\frac{dV}{dz}\right)+\frac{d}{dz}[U.\alpha+V.\beta+W.\gamma]. \end{cases}$$

Damit die hier vorgenommene partielle Integration ausführbar sei, muss wieder vorausgesetzt werden, dass die Grössen $U\alpha$, $V\beta$ und $W\gamma$ continuirliche Functionen der Coordinaten seien. In dieser Beziehung müssen also Gleitstellen bei Berechnung der elektromotorischen Kräfte ebenso behandelt werden, wie bei Berechnung der ponderomotorischen Kräfte in §. 17 geschehen ist. Die Grösse Φ_0 ist (wie die in (1ᵃ.) und (1ᵇ.) des §. 2 meiner ersten Abhandlung für U, V, W gegebenen Ausdrücke zeigen,

$$U = \iiint\left\{\frac{u_1}{r}+\frac{1-k}{2}\cdot\left[u_1\cdot\frac{d^2r}{dx.d\xi}+v_1\cdot\frac{d^2r}{dx.d\eta}+w_1\cdot\frac{d^2r}{dx.d\zeta}\right]\right\}d\xi.d\eta.d\zeta,$$

wo u_1, v_1, w_1 die Werthe von u, v, w im Punkte ξ, η, ζ sind) eine voll-

kommen symmetrisch gebaute Function der Werthe u, v, w in x, y, z und der Werthe u_1, v_1, w_1 in ξ, η, ζ, und jedes Raumelement kommt darin einmal als influirtes in $dx.dy.dz$ und einmal als influirendes in $d\xi.d\eta.d\zeta$ vor; da demnach jedes Paar doppelt vorkommt, so ist der Factor $\frac{1}{2}$ vorgesetzt. Die Aenderung von Φ_0 wird also ganz gefunden, wenn wir jedes Leiterelement, sofern es als influirendes in ξ, η, ζ vorkommt, sich nach Lage und Stromintensität ändern, sofern es als influirtes in x, y, z vorkommt, unverändert beharren lassen und den Factor $\frac{1}{2}$ beseitigen. Dies giebt

$$(6^h.) \qquad \frac{d\Phi_0}{dt} = A^2 \iiint \left[u \cdot \frac{dU}{dt} + v \cdot \frac{dV}{dt} + w \cdot \frac{dW}{dt} \right] dx.dy.dz.$$

Setzt man in Gleichung $(6^e.)$ die Werthe aus $(6^b.)$, $(6^f.)$, $(6^g.)$ und $(6^h.)$, so erhält man

$$(6^i.) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 = \iiint \Big\{ & u \cdot \left[\mathfrak{X} + A^2 . \mathfrak{P} + A^2 \cdot \frac{dU}{dt} \right] + v \cdot \left[\mathfrak{Y} + A^2 . \mathfrak{Q} + A^2 \cdot \frac{dV}{dt} \right] \\ & + w \cdot \left[\mathfrak{Z} + A^2 . \mathfrak{R} + A^2 \cdot \frac{dW}{dt} \right] \Big\} \cdot dx.dy.dz. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung ist durch die oben in $(5^d.)$ gegebenen Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ wirklich erfüllt, und somit den Forderungen des Gesetzes von der Erhaltung der Energie Genüge geleistet.

Wir haben noch den Fall zu besprechen, dass ein Magnet sich relativ zum Strome bewege, sei es ein permanenter, sei es einer der durch die Einwirkung elektromagnetischer Kräfte aus einer magnetisirbaren Substanz erst gebildet wird. Wir wollen der einfacheren Darstellung wegen annehmen, die magnetische Substanz selbst sei nichtleitend für die Elektricität. Die Fälle der Anwendung werden dadurch nicht eingeschränkt. Denn in leitenden magnetischen Substanzen würde man sich die Elementarmagnete nur mit leitenden Hüllen umgeben zu denken und die in diesen inducirten Ströme dem System der übrigen vorhandenen elektrischen Ströme zuzurechnen brauchen. Nun ist bekannt, dass die ponderomotorischen und inducirenden Fernwirkungen eines jeden Elementarmagneten in der magnetisirten Masse genau dieselben sein würden, wenn an Stelle des kleinen Magneten ein elektrischer Kreisstrom gesetzt würde, dessen Intensität multiplicirt mit der Fläche, die er umfliesst, gleich dem magnetischen Momente des Elementarmagneten ist.

Nehmen wir an, dass diese Kreisströme existirten an Stelle der

Elementarmagneten, und dass in jedem von ihnen fortdauernd eine elektromotorische (etwa hydroelektrische) Kraft wirksam gehalten würde, welche genau der zu der betreffenden Zeit und an dem betreffenden Orte eintretenden Magnetisirung entspräche, so würden die sämmtlichen Theile der ponderomotorischen Arbeit genau dieselben sein, wie für die magnetische Substanz, und die inducirenden Wirkungen in den sämmtlichen elektrischen Leitern ebenfalls. Dagegen würde in den hypothetischen Kreisströmen noch hinzukommen die chemische und thermische Arbeit dieser Ströme selbst und die inducirten elektromotorischen Kräfte in ihren Bahnen; wegfallen würde die Arbeit der Magnetisirung der Elementarmagnete. In dem hypothetischen Systeme, welches statt der Magnete nur Ströme enthält, wäre nach dem von uns geführten Beweise das Gesetz von der Constanz der Energie gültig. Es fragt sich also nur, ob diejenigen Antheile der hier betrachteten Arbeitsgrössen, die auf die Kreisströme fallen, durch die auf die Elementarmagnete fallenden ersetzt werden können. Wenn in einem solchen Kreisstrom zur Zeit keine inducirte elektromotorische Kraft wirkt, so wird die in ihm geleistete thermische Arbeit ein genaues Aequivalent der in ihm verbrauchten chemischen Energie sein, und beide sich gegenseitig in der Berechnung aufheben. Wenn aber die elektromotorische Kraft $\mathfrak{R}$ inducirt wird, und die Stromstärke i herrscht, so wird die Wärmeentwickelung $i\mathfrak{R}dt$ während des Zeittheilchens dt stattfinden, welche nicht durch die in dem Kreisstrome selbst wirkenden Arbeitsäquivalente gedeckt wird. Nennen wir andererseits die zur entsprechenden Magnetisirung erforderliche Arbeit S, so würde $\frac{dS}{dt}\cdot dt$ die in demselben Theilchen aufgewendete Arbeit sein, wenn der Kreisstrom durch den Elementarmagneten ersetzt würde. Wir würden also für jeden einzelnen Kreisstrom haben müssen

$$\mathfrak{R}.i = \frac{dS}{dt},$$

da jeder einzelne Kreisstrom durch seinen Elementarmagneten müsste ersetzt werden können. Nun ist aber i dem magnetischen Momente proportional, und dieses ist eine Function der magnetisirenden Kraft, die wir mit σ bezeichnen wollen. Das magnetische Moment des betreffenden Elementarmagneten sei φ_σ, und $d\omega$ die Fläche des Kreisstroms, so ist

$$i.d\omega = \varphi_\sigma.$$

Andererseits ist die inducirte Kraft $\mathfrak{R}$ nach dem am Schluss von §. 18 ge-

gebenen Nachweise bestimmt durch die Gleichung

$$\Re = \frac{d\sigma}{dt} \cdot d\omega.$$

Die obige Bedingungsgleichung wird also

$$\varphi_\sigma \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dS}{dt}.$$

Da wir nun über S im Allgemeinen nichts weiter wissen, als dass es eine Function der Magnetisirungsstärke φ_σ, also auch eine Function von σ ist, so entspricht die letzte Gleichung dieser Anforderung, wenn wir setzen

$$S = \int_0^\sigma \varphi . d\sigma.$$

Bei permanenten Magneten würden S, σ und φ gleich Constanten zu setzen sein.

Bei magnetischen Substanzen mit Coërcitivkraft geht beim Magnetisiren und Entmagnetisiren Arbeit verloren, deren Aequivalent sich wahrscheinlich als neu entwickelte Wärme in den Magneten vorfinden wird.

§. 20. Das Inductionsgesetz unter Voraussetzung ausschliesslicher Gültigkeit des *Ampère*schen Gesetzes.

Es bleibt noch die Frage übrig, ob nicht noch andere Gesetze der ponderomotorischen und durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kräfte bestehen könnten, welche dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft genügen, ohne dass dabei die Wirkung geschlossener Ströme auf geschlossene, deren Uebereinstimmung mit dem Potentialgesetz durch die Versuche genügend festgestellt erscheint, verändert würde, und ohne dass die Analogie zwischen permanenten Magneten und geschlossenen Strömen in Bezug auf ihre elektrodynamische Wirkung dabei aufgehoben würde.

Die Gleichung (6^b.), welche das Gesetz von der Erhaltung der Kraft ausdrückt, reducirt sich für zwei lineare Leiterstücke offenbar auf die Gleichung (4^c.).

Bezeichnen wir also wie dort die inducirte elektromotorische Kraft, welche das Leiterstück $D\sigma$ in Ds hervorbringt, mit $\Re . Ds . D\sigma$, diejenige dagegen, welche Ds in $D\sigma$ hervorbringt, mit $\Re_1 . D\sigma . Ds$ und die Arbeit, welche bei der Bewegung beider geleistet wird, mit $\delta\mathfrak{W} . Ds . D\sigma$, die actuelle Energie der elektrischen Bewegungen mit $P . Ds . D\sigma$, so muss sein

$$(4^c.) \qquad \delta P = i.\mathfrak{R}.\delta t + j.\mathfrak{R}_1.\delta t + \delta\mathfrak{W}.$$

Der Werth von P ist bestimmt durch die Energie, welche die in Ds und $D\sigma$ bestehenden Stromstärken durch die beim Schwinden ihrer Strömungen inducirten Ströme bei gegenseitiger Einwirkung noch hervorbringen können. Die allgemeine Form von P ist schon in meinem ersten Aufsatze (Bd. 72) discutirt worden. Zu P haben wir also keine Zusätze mehr zu machen; es enthält schon die bis jetzt unbestimmte Constante k. Die Zusätze zu $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{W}$, wollen wir beziehlich mit $j\mathfrak{r}$, $i\mathfrak{r}_1$ und $ij.\mathfrak{w}$ bezeichnen. Unsere Gleichung (4^c.) ergiebt alsdann

$$(7.) \qquad 0 = \mathfrak{r}.\delta t + \mathfrak{r}_1.\delta t + \delta\mathfrak{w}.$$

Diese Gleichung muss ungestört bleiben, wenn der Leiter s eine geschlossene Curve bildet, und seine Fernwirkung durch einen permanenten Magneten ersetzt wird. In einem solchen fällt die elektromotorische Kraft $\mathfrak{r}$ fort, während $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{w}$ unverändert bleiben. Daraus ergiebt sich, dass

$$\int \mathfrak{r}_1.Ds = 0,$$

so oft es über einen geschlossenen Stromkreis genommen wird.

Einen solchen stellen wir her, wenn wir irgend zwei lineare Leiter s_1 und s_2 so zusammenlegen, dass ihre Endpunkte a und b zusammenfallen, und ein Strom von derselben Intensität i in s_1 von a nach b, in s_2 von b nach a fliesst.

Daraus folgt, dass die elektromotorische Zusatzkraft $\int_a^b \mathfrak{r}.Ds$ in der Richtung von a nach b wirkend für beide die gleiche sein muss, wenn ihre Endpunkte zusammenfallen, wie auch übrigens der Verlauf der beiden Curven s_1 und s_2 sein mag, und dass also die Grösse dieser Zusatzkraft in einem ungeschlossenen linearen Leiter allein von der Lage und den Bewegungen seiner Endpunkte abhängt. Ferner, dass sie gleich Null ist, wenn diese Endpunkte unveränderte relative Lage gegen alle Theile des Leiters σ behalten, weil dann auch der Leiter s_2 als vollkommen ruhend gegen σ gewählt werden könnte, und unter diesen Umständen in ihm keine Induction vorginge.

Da nun der Werth der gesammten elektromotorischen Kraft in s durch eine Integration über die Längenelemente Ds gefunden wird, so muss der Werth dieses Integrals nur von der Lage der Endpunkte von s abhängen, nicht von dem Verlauf der Curve zwischen diesen Endpunkten, das heisst die

zu integrirende Function muss der nach s genommene Differentialquotient einer Function Φ sein, die nur von der relativen Lage der einzelnen Punkte von s gegen die Elemente $d\sigma$ abhängt. Da bei der Lagenänderung Aenderungen in der Länge von σ vorkommen können, so ist es zweckmässiger, wie in §. 15, die einzelnen Punkte von s und σ wieder durch zwei bei der Bewegung unverändert bleibende Parameter p und ϖ zu bestimmen. Wir werden dann zu setzen haben

$$(7^a.) \qquad \mathfrak{r}.Ds.D\sigma = \mathfrak{r}\cdot\frac{ds}{dp}\cdot\frac{d\sigma}{d\varpi}\cdot Dp.D\varpi = \frac{d\Phi}{dp}\cdot Dp.D\varpi.$$

Die relative Lage von $D\sigma$ gegen einen Punkt von s ist gegeben, wenn die drei Seiten des Dreiecks zwischen diesem Punkte und den Endpunkten von $D\sigma$ gegeben sind. Diese sind:

$$r, \quad r+\frac{dr}{d\varpi}\cdot D\varpi, \quad \frac{d\sigma}{d\varpi}\cdot D\varpi.$$

Es muss also $\Phi.D\varpi$ eine Function dieser Grössen und ihrer Aenderungen sein, und zwar linear nach den letzteren, und selbst proportional $D\varpi$; es wird also von der Form sein:

$$(7^b.) \qquad \Phi.D\varpi = \varphi\cdot\frac{d\sigma}{d\varpi}\cdot\delta r\cdot D\varpi+\psi\cdot\delta\left(\frac{dr}{d\varpi}\right)\cdot D\varpi+\chi\cdot\delta\left(\frac{d\sigma}{d\varpi}\right)\cdot D\varpi.$$

Hierin können φ, ψ, χ Functionen sein von r und $\frac{dr}{d\sigma}$, da nur noch solche Verbindungen der Seiten des oben genannten Dreiecks vorkommen dürfen, deren Werthe frei von $D\varpi$ sind.

Wenn ψ nur von r abhängig ist, nicht von $\frac{dr}{d\sigma}$, wenn ferner f und g Functionen von r bezeichnen und

$$(7^c.) \qquad \begin{cases} \varphi = f(r)\cdot\dfrac{dr}{d\sigma}, \\ \chi = g(r)\cdot\dfrac{dr}{d\sigma}, \end{cases}$$

so hätte jedes Glied in dem Werthe von $j.\Phi$ entweder den Factor

$$j\cdot\frac{dr}{d\sigma} = -j.\cos[r, D\sigma]$$

oder

$$j.\delta\left(\frac{dr}{d\sigma}\right) = -j.\delta\cos[r, D\sigma].$$

Es käme also von der Strömung j, die nach $D\sigma$ gerichtet ist, nur die in Richtung von r fallende Componente in Betracht. Da nun diese Projection gleich der Summe der Projectionen der nach beliebigen Richtungen genommenen Componenten von j ist, so kann in diesem Falle j in dem Leiterelement ersetzt werden durch eine beliebige Anzahl beliebig gerichteter Componenten, deren Resultante gleich j ist. Dies kann aber nicht geschehen, wenn φ, ψ und χ eine andere Art der Abhängigkeit von $\frac{dr}{d\sigma}$ hätten. Unter der genannten Annahme, deren Wahrscheinlichkeit wohl als sehr gross bezeichnet werden kann, und die auch von Herrn *C. Neumann* seinen Deductionen zu Grunde gelegt wurde, würden also die Gleichungen (7^a.) bis (7^c.) die allgemeinste Form des Werthes von $\mathfrak{r}$ geben *).

Für die speciellere Aufgabe jedoch eine Form des Inductionsgesetzes zu finden, welche unter Voraussetzung des *Ampère*schen Gesetzes für die ponderomotorischen Kräfte, mit Ausschluss der auf die Enden der Leiter wirkenden Kräfte, giltig ist, genügt die Form (7^b.). Zunächst werden wir aus denselben Grünnden für die in dem Leiter σ inducirte elektromotorische Kraft $\mathfrak{r}_1$ analoge Ausdrücke aufstellen dürfen

$$(7^d.) \qquad \mathfrak{r}_1 . Ds . D\sigma = \frac{d\Phi_1}{d\varpi} \cdot Dp . D\varpi$$

und

$$(7^e.) \qquad \Phi_1 = \varphi_1 \cdot \frac{ds}{dp} \cdot \delta r + \psi_1 . \delta\left(\frac{dr}{dp}\right) + \chi_1 . \delta\left(\frac{ds}{dp}\right),$$

worin φ_1, ψ_1 und χ_1 Functionen von r und $\frac{dr}{ds}$ sein müssen. Benutzen wir dann die Gleichung (7.)

$$(7.) \qquad \delta\mathfrak{w} = -(\mathfrak{r}+\mathfrak{r}_1)\,\delta t,$$

so erhalten wir durch Integration über die Längen der beiden Leiter s und σ

---

*) Die hier gemachte Annahme verbunden mit der, dass das Potential zweier Leiter mit der Formel von Herrn *Neumann* senior übereinstimmen müsse, wenn *beide* geschlossen sind, genügt die im 72. Bde. dieses Journals in §. 1 meiner Arbeit ausgeführte Verallgemeinerung der Potentialformel zu rechtfertigen, an Stelle der dort gemachten Voraussetzung, dass die Uebereinstimmung stattfinden müsse, wenn auch nur *einer von beiden Leitern* geschlossen sei, deren experimentelle Begründung zur Zeit vielleicht zu mangelhaft erscheinen könnte.

mit ähnlicher Bezeichnung, wie in §. 15:

$$(7'.)\quad \begin{cases} i.j.\iint \delta w\,.\,Ds\,.\,D\sigma \;=\; -\Sigma\Sigma\Big[\frac{de}{dt}\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot(\psi+\psi_1)\,\delta r\Big] \\ \qquad\qquad -\Sigma\int\Big[j\cdot\frac{de}{dt}\cdot\Big(\varphi-\frac{d\psi}{d\varpi}\Big)\delta r\,.\,D\varpi\Big] \\ \qquad\qquad -\Sigma\int\Big[i\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot\Big(\varphi_1-\frac{d\psi_1}{dp}\Big)\delta r.\,Dp\Big] \\ \qquad\qquad -\Sigma\int\Big[j\cdot\frac{de}{dt}\cdot\chi\cdot\frac{d\delta\sigma}{d\varpi}\cdot D\varpi\Big] \\ \qquad\qquad -\Sigma\int\Big[i\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot\chi_1\cdot\frac{d\delta s}{dp}\cdot Dp\Big]. \end{cases}$$

Die Summen sind hier für die einzelnen Stromenden zu nehmen. Die drei ersten Glieder dieses Ausdrucks entsprechen anziehenden oder abstossenden Kräften zwischen je zwei Stromenden, oder zwischen Stromenden und Stromelementen, wie wir dergleichen ähnlich aus dem Potentialgesetze hergeleitet haben. Die beiden letzten Glieder geben Kräftepaare, welche die Stromelemente zu dehnen und zu verkürzen streben, und in den Kräften des Potentialgesetzes kein Analogon finden. Es lassen sich daher die sechs noch unbekannten Functionen φ, ψ, χ, φ_1, ψ_1, χ_1 so bestimmen, dass die Kräfte, welche von den Stromenden ausgehen, gleich Null werden. Zu dem Ende müssen wir setzen

$$(8.)\quad \begin{cases} \chi=\chi_1=0, \\ \psi+\psi_1=-\frac{1+k}{2}\cdot A^2, \\ \varphi=-\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\varpi}\cdot A^2, \\ \varphi_1=-\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{dp}\cdot A^2. \end{cases}$$

Die obige Gleichung $(4^a.)$ für den Werth der nach dem Potentialgesetz inducirten Kraft lässt sich schreiben

$$\Re\cdot\frac{ds}{dp}\cdot\frac{d\sigma}{d\varpi}\cdot\delta t \;=\; A^2\delta\Big\{j\cdot\Big(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{dp}\cdot\frac{dr}{d\varpi}+\frac{1+k}{2}\cdot\frac{d^2r}{dp\,.\,d\varpi}\Big)\Big\},$$

und es wird also die gesammte Inductionskraft, welche das Element $D\sigma$ auf Ds ausübt, *wenn nur die Ampèreschen Kräfte als ponderomotorische existiren:*

$$(8^a.)\quad \begin{cases} (\Re+j.\mathfrak{x})\,Ds.D\sigma.\delta t = A^2\Big(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{dp}\cdot\frac{dr}{d\varpi}+\frac{1+k}{2}\cdot\frac{d^2r}{dp\,.\,d\varpi}\Big)\cdot\delta j\,.\,Dp\,.\,D\varpi \\ \qquad\qquad +A^2.j\cdot\Big[\frac{1+k}{4}\cdot\frac{d^2(\delta r)}{dp.d\varpi}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{dp}\cdot\frac{d(\delta r)}{d\varpi}-\frac{\delta r}{r}\cdot\frac{d^2r}{dp.d\varpi}\Big]\,Dp.D\varpi. \end{cases}$$

Der erste mit δj multiplicirte Theil dieses Ausdrucks giebt die von der Stromesschwankung herrührende Induction, der zweite Theil dagegen die von der Bewegung herrührende. Wenn wir berücksichtigen, dass

$$Dp.D\varpi.\delta\left[\frac{d^2r}{dp.d\varpi}\right] = \delta\left[\frac{d^2r}{ds.d\sigma}\cdot Ds.D\sigma\right],$$

$$\frac{dr}{dp}\cdot Dp.D\varpi.\delta\left[\frac{dr}{d\varpi}\right] = \frac{dr}{ds}\cdot\delta\left[\frac{dr}{d\sigma}\cdot D\sigma\right].Ds,$$

so ergiebt sich der Werth der durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kraft P im Elemente Ds gleich

$$(8^b.)\quad \left\{\begin{aligned} P.Ds.D\sigma.\delta t = A^2.j\Big\{ & -\frac{1}{r}\cdot\cos\vartheta.\delta[\cos\vartheta_1.D\sigma]Ds \\ & -\frac{\delta r}{r^2}[\cos\vartheta.\cos\vartheta_1-\cos\varepsilon]Ds.D\sigma \\ & +\frac{1+k}{4}\delta\left[\frac{1}{r}\cdot(\cos\vartheta.\cos\vartheta_1-\cos\varepsilon)Ds.D\sigma\right]\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Dieser Ausdruck verwandelt sich in den von Herrn *C. Neumann* gefundenen, wenn man $k=-1$ setzt, welche Annahme übrigens nach den in meinem früheren Aufsatze im 72. Bande gemachten Auseinandersetzungen unzulässig ist, da die Stabilität des Gleichgewichts der ruhenden Elektricität fordert, dass k keinen negativen Werth habe. Der hier gefundene Werth der inducirten elektromotorischen Kraft genügt übrigens, wie ich schon in der Einleitung bemerkt habe, den sämmtlichen von Herrn *C. Neumann* an die Spitze seiner Deduction (Abh. der Kön. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. X. S. 419 u. 420, sowie S. 468—470) gestellten Forderungen. Er genügt aber nicht der Annahme, die derselbe auf Seite 481 und 482 seiner Arbeit eingeführt hat, wonach die Verlängerung eines Stromelements in der Weise inducirend wirken soll, als wenn in dem hinzukommenden Theile seiner Länge der Strom neu einsetzte, und die Induction nach dem Gesetze der durch Aenderungen der Intensität inducirten Ströme geschähe.

Ich habe in der vorliegenden Entwickelung keine einschränkende Hypothese über die Art, wie Verlängerung der Stromelemente wirkt, gemacht. Deshalb ist die Constante k mit unbestimmtem Werthe stehen geblieben, und es geht daher aus dieser Untersuchung hervor, dass das *Ampère*sche Gesetz der ponderomotorischen Kräfte in der That mit dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft, wie mit der Stabilität des elektrischen Gleichgewichts vereinbar wäre. Aber freilich wird eine solche elektrodynamische Theorie viel com-

plicirter, als die auf das einfache Potentialgesetz gegründete. Die Entscheidung kann also nur durch Versuche, nicht durch theoretische Betrachtungen gewonnen werden.

Der erwähnte Unterschied zwischen der Induction durch Stromsteigerung und der durch Bewegung bei Verlängerung eines Elementes hängt in dem von uns gegebenen Ausdrucke davon ab, dass das mit $1+k$ multiplicirte Glied im ersteren Fall die Factoren $\frac{1}{2}.Ds.D\sigma.\delta j$, im letzteren aber $\frac{1}{4}j\delta(Ds.D\sigma)$ enthält.

Zu bemerken ist noch, dass, wenn wir $k=-1$ setzen, nach den hier entwickelten Formeln sich ergiebt

$$(\Re+\mathfrak{r})\,Ds.D\sigma.\delta t = -A^2\cdot\frac{\cos\vartheta}{r^2}\cdot Ds.\delta[j.r\cos\vartheta_1.D\sigma]$$
$$+A^2.j.\cos\varepsilon\cdot\frac{\delta r}{r^2}\cdot Ds.D\sigma,$$

während nach der von Herrn *C. Neumann* l. c. auf S. 503, Gleichung (132.) gegebenen Formulirung das $D\sigma$ aus der mit δ behafteten Parenthese herausbleiben würde. Die letztere Formulirung nimmt keine Rücksicht auf Induction durch Verlängerung der Leiterelemente. Wenn sie diese nähme, so würde der letzterwähnte Unterschied verschwinden, falls ich den Sinn der *Neumann*schen Deduction richtig verstehe.

Endlich ist hier noch zu bemerken, dass in dem mit dem Factor $1-k$ behafteten Gliede bei allen diesen Entwickelungen statt $\frac{d^2r}{ds.d\sigma}$ auch $\frac{d^2\varphi(r)}{ds.d\sigma}$ gesetzt werden könnte, worin φ irgend eine eindeutige und continuirliche Function von r bedeutet. Diese ist in meinem Aufsatze im 72. Bande dieses Journals nur deshalb gleich r gesetzt worden, weil es wahrscheinlich erschien, dass die noch unbekannten Theile der Wirkung eines Stromelements dasselbe Gesetz der Wirkung in die Ferne zeigen würden, wie die bekannten. Dabei wäre aber noch besonders zu untersuchen, ob ein solches φ geeignet wäre, den Bedingungen der Stabilität des Gleichgewichts zu genügen.

Was die möglicher Weise experimentell zu beobachtenden Unterschiede zwischen den beiden Inductionsgesetzen betrifft, die aus dem Potentialgesetze einerseits und aus dem *Ampère*schen andererseits folgen, so zeigt unsere Darstellung, dass die in geschlossenen Kreisen inducirten Kräfte überhaupt keinen Unterschied zeigen werden, sondern nur die in geöffneten Kreisen. In letzteren werden verhältnissmässig die stärksten Wirkungen hervorzubringen sein, wenn

der inducirende Kreis σ geschlossen ist. Er kann dann viele Windungen haben, oder durch starke Magnete ersetzt werden. In diesem Falle fällt das mit dem Factor $1+k$ behaftete Glied durch die Integration über den Leiter σ aus, und der Unterschied zwischen beiden Gesetzen reducirt sich auf das Glied

$$j\mathfrak{x}\,.\,\delta t = -A^2.j\cdot\frac{d}{ds}\left[\delta r\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\sigma}\right].$$

Bezeichnen wir die Längenelemente der Linien, in denen sich die Endpunkte des Leiters s bewegen, für den höchsten und niedersten Werth von s beziehlich mit $d\varrho_1$ und $d\varrho_2$, so können wir setzen

$$\delta r = \frac{dr}{d\varrho_1}\cdot\delta\varrho_1, \qquad \text{beziehlich} \qquad \delta r = \frac{dr}{d\varrho_2}\cdot\delta\varrho_2.$$

Dann wird

$$\delta t\int j\mathfrak{x}\,.\,ds = A^2.j\left[\delta\varrho_2\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\sigma}\cdot\frac{dr}{d\varrho_2} - \delta\varrho_1\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\sigma}\cdot\frac{dr}{d\varrho_1}\right],$$

worin für r und $\frac{dr}{d\sigma}$ die den entsprechenden Endpunkten des Leiters zugehörigen Werthe zu nehmen sind.

Die nach dem Potentialgesetz stattfindende elektrodynamische Kraft reducirt sich dagegen bei geschlossenem σ auf

$$\delta t\int\mathfrak{R}\,.\,ds = A^2.j.\delta\int\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{d\sigma}\right]ds.$$

Denken wir uns also einen Stromkreis ϱ zusammengesetzt aus

1) der zweiten Lage von s, positiv durchlaufen,

2) der Bahn $d\varrho_1$ des oberen Endpunktes von s, gegen die Richtung der Bewegung durchlaufen,

3) der ersten Lage von s, negativ durchlaufen,

4) der Bahn $d\varrho_2$ des unteren Endpunktes von s, in Richtung der Bewegung durchlaufen,

so würde die vom Element $j\,.\,d\sigma$ inducirte Kraft nach dem *Ampère*schen Gesetze sein müssen

$$\delta t\int(\mathfrak{R}+\mathfrak{r})\,ds = A^2.j\int\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\sigma}\cdot\frac{dr}{d\varrho}\,d\varrho.$$

Das wäre gleich der elektromotorischen Kraft, die der Strom j beim Entstehen in dem ganzen beschriebenen Umkreise ϱ erzeugen würde.

Diese Formulirung hatte Herr *Neumann* senior*) *vor* der Aufstellung des Potentialgesetzes aus dem *Ampère*schen Gesetze abgeleitet.

Wenn das Potentialgesetz gilt, fallen dagegen diejenigen Theile des letzten Integrals fort, welche sich nicht auf die beiden Lagen des Leiters s, sondern auf die Bahn seiner Endpunkte beziehen.

Denken wir uns eine drehrunde Metallscheibe, schnell um ihre Axe rotirend, und von magnetischen Kraftlinien durchzogen, die der Axe parallel, und rings um die Axe symmetrisch vertheilt sind, so wird der Rand der Scheibe nach dem *Ampère*schen Gesetze elektrisch werden, nach dem Potentialgesetze nicht.

---

*) Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Abhandl. d. Berliner Akademie d. Wiss. 1845.

Berlin, im April 1874.

Extrait d'une lettre de M. *Ch. Hermite* à M. *Borchardt* sur la transformation des formes quadratiques ternaires en elles-mêmes.

. . . Permettez-moi de répondre à une objection très-fondée qui a été faite par M. *P. Bachmann*, à mes formules pour la transformation des formes quadratiques ternaires en elles-mêmes, dans son travail intitulé: „Untersuchungen über quadratische Formen," tome 76 de votre journal p. 331. L'analyse indirecte dont j'ai fait usage ne prouve pas en effet qu'elles comprennent, sans aucune exception, toutes les substitutions qui reproduisent une forme donnée; or un point aussi essentiel demande à être complètement éclairci et c'est ce que je vais essayer de faire. Désignant la forme proposée par $f(x, y, z)$, et posant la condition

$$f(x, y, z) = f(X, Y, Z),$$

je l'écris de la manière suivante:

$$x\frac{df}{dx}+y\frac{df}{dy}+z\frac{df}{dz} = X\frac{df}{dX}+Y\frac{df}{dY}+Z\frac{df}{dZ},$$

ou pour abréger:

$$\Sigma x\frac{df}{dx} = \Sigma X\frac{df}{dX}.$$

Cela posé, je joins à cette condition, la relation identique:

$$\Sigma x\frac{df}{dX} = \Sigma X\frac{df}{dx},$$

et j'ajoute les deux égalités membre à membre, ce qui donnera:

$$\Sigma x\left[\frac{df}{dx}+\frac{df}{dX}\right] = \Sigma X\left[\frac{df}{dx}+\frac{df}{dX}\right],$$

ou bien:

$$\Sigma(x-X)\left[\frac{df}{dx}+\frac{df}{dX}\right] = 0.$$

Soit maintenant:

$$U = x - X, \quad U' = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dX},$$
$$V = y - Y, \quad V' = \frac{df}{dy} + \frac{df}{dY},$$
$$W = z - Z, \quad W' = \frac{df}{dz} + \frac{df}{dZ}.$$

Vous voyez que des expressions de x, y, z en X, Y, Z résulteront pour ces diverses quantités des fonctions linéaires de ces trois indéterminées, telles qu'on ait identiquement:

$$UU' + VV' + WW' = 0.$$

Cherchons ces fonctions, et pour cela considérons un premier cas dans lequel nous supposerons qu'il soit possible d'obtenir inversement X, Y, Z en U, V, W. Il est clair que U', V', W' seront alors des quantités linéaires en U, V, W, et un calcul facile donne sur le champ pour la solution de l'équation proposée, les formules:

$$(1.) \quad \begin{cases} U' = \nu V - \mu W, \\ V' = \lambda W - \nu U, \\ W' = \mu U - \lambda V, \end{cases}$$

où λ, μ, ν sont des constantes. Or on en tire les relations suivantes:

$$(\mathrm{I.}) \quad \begin{cases} \mu z - \nu y + \dfrac{df}{dx} = \mu Z - \nu Y - \dfrac{df}{dX}, \\ \nu x - \lambda z + \dfrac{df}{dy} = \nu X - \lambda Z - \dfrac{df}{dY}, \\ \lambda y - \mu x + \dfrac{df}{dz} = \lambda Y - \mu X - \dfrac{df}{dZ}, \end{cases}$$

d'une forme bien différente de celles que j'avais d'abord obtenues, à savoir:

$$(\mathrm{II.}) \quad \begin{cases} x - \nu \dfrac{df}{dy} + \mu \dfrac{df}{dz} = X + \nu \dfrac{df}{dY} - \mu \dfrac{df}{dZ}, \\ y - \lambda \dfrac{df}{dz} + \nu \dfrac{df}{dx} = Y + \lambda \dfrac{df}{dZ} - \nu \dfrac{df}{dX}, \\ z - \mu \dfrac{df}{dx} + \lambda \dfrac{df}{dy} = Z + \mu \dfrac{df}{dX} - \lambda \dfrac{df}{dY}, \end{cases}$$

et qui résulteraient des équations:

$$U = \nu V' - \mu W',$$
$$V = \lambda W' - \nu U',$$
$$W = \mu U' - \lambda V'.$$

Mais un de mes élèves, M. *Tannery*, agrégé de l'université, a fait la remarque ingénieuse qu'en remplaçant λ, μ, ν par $\frac{1}{D}\frac{dg}{d\lambda}$, $\frac{1}{D}\frac{dg}{d\mu}$, $\frac{1}{D}\frac{dg}{d\nu}$, où $g(\lambda,\mu,\nu)$ désigne la forme adjointe de $f(\lambda,\mu,\nu)$, D son déterminant, et changeant X, Y, Z en $-X$, $-Y$, $-Z$, les équations (I.) donnent les relations (II.).

Supposons en second lieu, qu'il ne soit pas possible d'exprimer X, Y, Z, en U, V, W; en désignant alors par θ, θ', θ'', trois indéterminées, je poserai d'une part:

$$U=\theta, \quad V=\theta', \quad W=a\theta-b\theta'$$

et de l'autre:

$$\begin{aligned} U' &= A\theta+A'\theta'+A''\theta'', \\ V' &= B\theta+B'\theta'+B''\theta'', \\ W' &= C\theta+C'\theta'+C''\theta''. \end{aligned}$$

Cela étant, la condition proposée: $UU'+VV'+WW'=0$ donne les relations:

$$\begin{aligned} A+aC &=0, \quad B'-bC'=0, \\ A''+aC'' &=0, \quad B''-bC''=0, \end{aligned}$$

et:

$$A'+B+aC'-bC=0.$$

En remplaçant cette dernière par les deux suivantes où c est une indéterminée:

$$A'+aC'=c, \quad B-bC=-c,$$

on en conclura:

$$\begin{aligned} A &=-aC, & B &=bC+c, \\ A' &=-aC'+c, & B' &=bC', \\ A'' &=-aC'', & B'' &=bC'' \end{aligned}$$

et il en résulte que:

$$\begin{aligned} U' &=-a(C\theta+C'\theta'+C''\theta'')+c\theta'=cV-aW', \\ V' &= \quad b(C\theta+C'\theta'+C''\theta'')-c\theta=bW'-cU. \end{aligned}$$

Ayant d'ailleurs: $W=aU-bV$, il est clair que la nouvelle solution obtenue se déduit des équations (1.) en permutant W et W'. Or les relations auxquelles elle conduit entre x, y, z et X, Y, Z, à savoir:

$$cx+\frac{df}{dy}-b\frac{df}{dz}=cX-\frac{df}{dY}+b\frac{df}{dZ},$$

$$cy-a\frac{df}{dz}-\frac{df}{dx}=cY+a\frac{df}{dZ}+\frac{df}{dX},$$

$$ax-by-z=aX-bY-Z$$

se ramènent au type (II.) si l'on fait:

$$a = -\frac{\lambda}{\nu}, \quad b = \frac{\mu}{\nu}, \quad c = -\frac{1}{\nu},$$

car l'équation

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \lambda X + \mu Y + \nu Z$$

s'en déduit comme conséquence.

Il ne me reste plus qu'à examiner un dernier cas dans lequel U, V, W dépendraient d'une seule indéterminée au lieu de deux, de sorte qu'on aurait: $U = \alpha W$, $V = \beta W$, et par conséquent: $\alpha U' + \beta V' + W' = 0$. Nous aurons alors les relations:

$$x - \alpha z = X - \alpha Z,$$

$$y - \beta z = Y - \beta Z,$$

$$\alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} = -\alpha \frac{df}{dX} - \beta \frac{df}{dY} - \frac{df}{dZ}$$

qui en remplaçant α et β par $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ donnent les formules

$$x = X - \frac{\alpha}{f(\alpha, \beta, \gamma)} \left[\alpha \frac{df}{dX} + \beta \frac{df}{dY} + \gamma \frac{df}{dZ} \right],$$

$$y = Y - \frac{\beta}{f(\alpha, \beta, \gamma)} \left[\alpha \frac{df}{dX} + \beta \frac{df}{dY} + \gamma \frac{df}{dZ} \right],$$

$$z = Z - \frac{\gamma}{f(\alpha, \beta, \gamma)} \left[\alpha \frac{df}{dX} + \beta \frac{df}{dY} + \gamma \frac{df}{dZ} \right].$$

Je m'y arrête un moment pour observer qu'en désignant la substitution ainsi obtenue par S, on aura: $S^{-1} = S$ d'où $S^2 = 1$. Cette circonstance m'avait fait penser un instant, qu'elles constitueraient une exception au type général, mais j'ai ensuite remarqué que les relations (I.) donnant la suivante:

$$\lambda \frac{df}{dx} + \mu \frac{df}{dy} + \nu \frac{df}{dz} = -\lambda \frac{df}{dX} - \mu \frac{df}{dY} - \nu \frac{df}{dZ},$$

il suffisait pour les obtenir de poser: $\lambda = \alpha \nu$, $\mu = \beta \nu$, puis de faire ν infini. Je pense, mon cher ami, avoir ainsi rempli la lacune que présentaient mes anciennes recherches.

Paris, 23 mai 1874.

Beweis eines Satzes der Elasticitätslehre.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn a. Rh.)

Die Bewegung der Theile eines elastischen festen Körpers, auf den keine äusseren Kräfte wirken, wird durch die Gleichung bestimmt

$$(1.)\qquad \iiint \varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u+\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right)dx\,dy\,dz+\iiint \delta F\,dx\,dy\,dz = 0,$$

welche *Green* in den Abhandlungen *on the laws of the reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media*, und *on the propagation of light in crystallized media*, transactions of the Cambridge philosophical society, Vol. VII, part I, pag. 1 und pag. 113, part II, pag. 121, entwickelt hat. Hier sind x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Elements des elastischen Mediums im Zustande des Gleichgewichts, $x+u$, $y+v$, $z+w$ die Coordinaten desselben Elements im Zustande der Bewegung, ϱ ist die ursprüngliche überall endliche und positive Dichtigkeit, t die Zeit, die Incremente u, v, w gelten als von den Coordinaten x, y, z und der Zeit t abhängige kleine Grössen, F ist eine homogene Function des zweiten Grades von den Verbindungen

$$(2.)\qquad \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},$$

bei der die Coefficienten von den Coordinaten x, y, z abhängen, für ein homogenes Medium aber constant sind, durch das Zeichen δ wird die Variation der Grössen u, v, w angedeutet, die dreifachen Integrationen beziehen sich auf den von dem elastischen Medium ursprünglich eingenommenen endlichen Raum. In Betreff der Function F, deren Product in das Volumen $dx\,dy\,dz$ als das Maass der Arbeit betrachtet werden kann, welches bei der Gestaltänderung dieses Volumens zu leisten ist, hat Herr *Kirchhoff* in dem Aufsatze *über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes*, dieses Journal Bd. 56, pag. 291, die Annahme ausgesprochen, dass diese Function bei allen in der Natur vorkommenden Körpern nie negativ sei und nur mit den sechs Argumenten (2.) zusammen verschwinde. Dieselbe Annahme findet sich auch in dem *Treatise on natural philosophy* der Herren

W. Thomson und *G. Tait,* Vol. I, pag. 706 erwähnt. Es ist aber, so viel ich weiss, noch nicht gezeigt worden, dass, wofern man die allgemein zugestandene Annahme macht, dass die Theile eines elastischen festen Körpers, auf den keine äusseren Kräfte wirken, bei jeder Störung des Gleichgewichts in eine Bewegung gerathen, welche den Charakter der Stabilität besitzt, die Function F die angegebene Beschaffenheit haben muss; daher erlaube ich mir einen Beweis dieses Satzes mitzutheilen.

Die Voraussetzung, dass F eine homogene Function des zweiten Grades von den sechs Verbindungen (2.) ist, kann auch so ausgedrückt werden, dass F eine homogene Function des zweiten Grades von den neun partiellen Differentialquotienten

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=u_1, & \dfrac{\partial u}{\partial y}=u_2, & \dfrac{\partial u}{\partial z}=u_3, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=v_1, & \dfrac{\partial v}{\partial y}=v_2, & \dfrac{\partial v}{\partial z}=v_3, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}=w_1, & \dfrac{\partial w}{\partial y}=w_2, & \dfrac{\partial w}{\partial z}=w_3 \end{cases}$$

ist, und den drei Bedingungen genügt

$$(4.)\quad \frac{\partial F}{\partial v_3}=\frac{\partial F}{\partial w_2}, \quad \frac{\partial F}{\partial w_1}=\frac{\partial F}{\partial u_3}, \quad \frac{\partial F}{\partial u_2}=\frac{\partial F}{\partial v_1}.$$

Alsdann ist die vollständige Variation δF so darzustellen

$$(5.)\quad \begin{aligned} \delta F = {} & \frac{\partial F}{\partial u_1}\delta u_1+\frac{\partial F}{\partial u_2}\delta u_2+\frac{\partial F}{\partial u_3}\delta u_3 \\ & +\frac{\partial F}{\partial v_1}\delta v_1+\frac{\partial F}{\partial v_2}\delta v_2+\frac{\partial F}{\partial v_3}\delta v_3 \\ & +\frac{\partial F}{\partial w_1}\delta w_1+\frac{\partial F}{\partial w_2}\delta w_2+\frac{\partial F}{\partial w_3}\delta w_3. \end{aligned}$$

Indem nun das Integral $\iiint \delta F\,dx\,dy\,dz$ nach den allgemeinen Principien der Variationsrechnung in ein Volumenintegral und ein Oberflächenintegral zerlegt wird, deren jedes einen linearen Ausdruck der Variationen δu, δv, δw unter dem Integralzeichen enthält, so giebt die Substitution dieses Aggregats in die Gleichung (1.) vermöge der Forderung, dass sowohl bei dem resultirenden Volumenintegral wie auch bei dem Oberflächenintegral das Element unabhängig von den Variationen δu, δv, δw verschwinde, für das Innere des elastischen Mediums die Gleichungen

$$(6.)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial u_1}}{\partial x} + \dfrac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial u_2}}{\partial y} + \dfrac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial u_3}}{\partial z}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial v_1}}{\partial x} + \dfrac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial v_2}}{\partial y} + \dfrac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial v_3}}{\partial z}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial w_1}}{\partial x} + \dfrac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial w_2}}{\partial y} + \dfrac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial w_3}}{\partial z}, \end{cases}$$

und für die Oberfläche des Mediums, wo die von dem Medium nach aussen gerichtete Normale mit den Coordinatenaxen der x, y, z beziehungsweise die Winkel α, β, γ bilden möge, die Gleichungen

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u_1}\cos\alpha + \dfrac{\partial F}{\partial u_2}\cos\beta + \dfrac{\partial F}{\partial u_3}\cos\gamma = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial v_1}\cos\alpha + \dfrac{\partial F}{\partial v_2}\cos\beta + \dfrac{\partial F}{\partial v_3}\cos\gamma = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial w_1}\cos\alpha + \dfrac{\partial F}{\partial w_2}\cos\beta + \dfrac{\partial F}{\partial w_3}\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen ist die Bewegung der Theile des elastischen Mediums abzuleiten, während für einen Anfangszeitpunkt $t = t_0$ die Werthe der Coordinatenincremente u, v, w und der Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ als Functionen des Ortes (x, y, z) gegeben sind. Durch die Gleichungen (7.) werden die Anfangswerthe der Grössen u, v, w, welche sich auf die Oberfläche des Mediums beziehen, einer Beschränkung unterworfen, deren mechanische Bedeutung ich hier nicht näher erläutern werde; die Anfangswerthe der Grössen $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ bleiben unbeschränkt. Bei der anzustellenden Betrachtung ist es zweckmässig, statt der Systeme (6.) und (7.) die Gleichung (1.) anzuwenden, aus welcher jene gefolgert sind.

Wenn man in der Gleichung (1.) die Variationen δu, δv, δw erstens durch die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ und hierauf zweitens durch die Grössen u, v, w ersetzt, so verwandelt sich δF bei der ersten Substitution in den Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial t}$, und bei der zweiten Substitution nach der Grundeigenschaft der homogenen Functionen zweiten Grades in den Werth $2F$. Mittelst des in Rede stehenden Verfahrens entsteht daher aus (1.) die Gleichung

$$(8.)\quad \iiint \varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx\,dy\,dz+\iiint\frac{\partial F}{\partial t}dx\,dy\,dz=0,$$

und die Gleichung

$$(9.)\quad \iiint \varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}u+\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}v+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}w\right)dx\,dy\,dz+2\iiint F\,dx\,dy\,dz=0.$$

Nunmehr sei die halbe Summe der in dem Medium vorhandenen lebendigen Kräfte

$$(10.)\quad \tfrac{1}{2}\iiint \varrho\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right)dx\,dy\,dz=T,$$

die negativ genommene Summe der bei der Gestaltänderung der Elemente geleisteten Arbeit

$$(11.)\quad -\iiint F\,dx\,dy\,dz=U,$$

die halbe Summe der Producte jedes Massenelements in das Quadrat seiner Ortsverschiebung

$$(12.)\quad \tfrac{1}{2}\iiint \varrho\,(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz=G,$$

dann können die Gleichungen (8.) und (9.) folgendermassen dargestellt werden

$$(13.)\quad \frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial U}{\partial t}=0,$$

$$(14.)\quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}-2T-2U=0.$$

Die Gleichung (13.) erlaubt die Ausführung einer Integration, und liefert, wenn das Einsetzen der Anfangswerthe durch Anhängung des Zeichens (0) angedeutet wird, das Integral der lebendigen Kraft

$$(15.)\quad T-U=T(0)-U(0).$$

Die Function G hat für die Theile des elastischen Mediums dieselbe Bedeutung, welche in dem Aufsatze: *über einen algebraischen Typus der Bedingungen eines bewegten Massensystems,* dieses Journal Bd. 66, pag. 363, der mit demselben Buchstaben bezeichneten Function für ein System discreter Massenpunkte zukommt. Mit Hülfe dieser Function habe ich dort die Bedingungen für die Stabilität der Bewegung bei zwei Gattungen von Problemen untersucht; in der einen Gattung sind die kleinen Schwingungen eines Systems von materiellen Punkten, in der anderen Gattung ist die Bewegung eines materiellen Punktes, der nach einem festen Centrum proportional einer negativen Potenz der Entfernung angezogen wird, mit enthalten. Die so eben

aufgestellten Gleichungen (14.) und (15.) entsprechen genau den Gleichungen (6*.) und (7.) jener Abhandlung, welche in correspondirenden Bezeichnungen ausgedrückt sind, und die gegenwärtig anzuwendende Schlussweise stimmt mit der dort gebrauchten bis auf einen später zu erörternden Punkt überein.

Die Elimination der Function U aus den Gleichungen (14.) und (15.) ergiebt die Gleichung

$$(16.) \qquad 4T = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2(T(0) - U(0)).$$

Diese Gleichung werde mit dem Element dt multiplicirt, und von einem beliebigen Werthe $t = \sigma$ bis zu einem grösseren Werthe $t = \tau$ integrirt, so entsteht die Gleichung

$$(17.) \qquad 4\int_\sigma^\tau T dt = \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_\sigma^\tau + 2(T(0) - U(0))(\tau - \sigma).$$

Hier stellt das Integral $\int_\sigma^\tau 2T dt$ nach dem von *Hamilton* eingeführten Sprachgebrauche *die angehäufte lebendige Kraft* des gesammten Mediums dar; die Function $\frac{\partial G}{\partial t}$, von deren zu $t = \sigma$ und $t = \tau$ gehörigen Werthen die Differenz durch $\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_\sigma^\tau$ angedeutet ist, hat nach (12.) den Ausdruck

$$(18.) \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = \iiint \varrho \left(u \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial t}\right) dx\, dy\, dz.$$

Für die Theile des elastischen Mediums wird vorausgesetzt, dass jedes System von Anfangswerthen, bei welchem nicht die sechs Argumente (2.) und die Geschwindigkeitscomponenten überall gleich Null sind, eine Störung des Gleichgewichts nach sich zieht, und dass die erfolgende Bewegung stabil ist. Unter einer stabilen Bewegung verstehe ich eine solche, bei der die Ortsverschiebungen und die Geschwindigkeiten für alle Zeit unter gewissen festen Grenzen bleiben, und bei der die angehäufte lebendige Kraft des gesammten Mediums mit wachsender Zeit über jedes Maass hinauswächst. Es ist nicht gewöhnlich, bei der Definition einer stabilen Bewegung die letzte Bestimmung hinzuzufügen, doch glaube ich dies thun zu dürfen, da diese Bestimmung unausgesprochen in der Vorstellung liegt, die man mit einer stabilen Bewegung verbindet. Da nach der getroffenen Annahme das Element des Integrals (18.) stets unter einer festen Grenze bleibt und der Raum der Integration ein endlicher ist, so bleibt der Werth $\frac{\partial G}{\partial t}$ und in Folge dessen auch die Differenz

$\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_\sigma^\tau$ immer endlich. Wenn man daher die Gleichung (17.) durch die Grösse $2(\tau-\sigma)$ dividirt, den Werth σ festhält und den Werth τ über jede Grenze hinaus wachsen lässt, so nähert sich der Bruch $\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_\sigma^\tau}{2(\tau-\sigma)}$ der Null, und der Ausdruck $\frac{1}{\tau-\sigma}\int_\sigma^\tau 2T dt$ convergirt gegen einen festen Werth, der durch die Gleichung

$$(19.)\qquad \lim \frac{1}{\tau-\sigma}\int_\sigma^\tau 2T dt = T(0)-U(0)$$

angegeben wird. Die Summe der lebendigen Kräfte $2T$ ist niemals negativ, mithin gilt von der angehäuften lebendigen Kraft $\int_\sigma^\tau 2T dt$ das gleiche, und daher kann der Ausdruck $\frac{1}{\tau-\sigma}\int_\sigma^\tau 2T dt$ nur gegen eine positive Grösse oder gegen die Null convergiren. Also ist nach (19.) die Verbindung $T(0)-U(0)$ entweder positiv oder gleich Null. Dass dieselbe gleich Null sei, wird durch die geltenden Voraussetzungen ausgeschlossen. Denn wäre $T(0)-U(0)=0$, so würde aus (17.) der Widerspruch folgen, dass die angehäufte lebendige Kraft $\int_\sigma^\tau 2T dt$, welche mit wachsender Zeit über jedes Maass hinaus wachsen soll, dem Ausdruck $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_\sigma^\tau$ gleich sein müsste, welcher zu keiner Zeit feste Grenzen überschreiten darf. Deshalb muss die Verbindung $T(0)-U(0)$ einen positiven Werth haben. Weil ferner nach der bestehenden Annahme jedes System von Anfangswerthen, bei welchem nicht die sechs Argumente (2.) und die Geschwindigkeiten überall gleich Null sind, eine Bewegung von der angegebenen Beschaffenheit veranlasst, so muss die Natur der Function U ein Hinderniss bilden, dass nicht durch eine Verfügung über die Anfangsgeschwindigkeiten, von denen $T(0)$ allein abhängt, die Verbindung $T(0)-U(0)$ einen negativen oder verschwindenden Werth erhalten kann. Es ist daher nothwendig, dass die Function U unfähig sei, positiv zu werden, und dass sie nur verschwinde, sobald die sechs Argumente (2.) überall den Werth Null erhalten.

Man kann auch die Voraussetzung erwägen, dass eine solche Bewegung der Theile des elastischen Mediums möglich sei, bei welcher die Ortsverschiebungen und die Geschwindigkeiten stets unter gewissen endlichen Grenzen bleiben, jedoch die angehäufte lebendige Kraft des ganzen Mediums mit wach-

sender Zeit *nicht* über jedes Maass hinauswächst. Unter dieser Voraussetzung folgt aus der Gleichung (17.) unmittelbar, dass die Verbindung $T(0)-U(0)$ gleich Null sein muss, und es ergiebt sich ferner, dass der Differentialquotient $\frac{\partial G}{\partial t}$ nur negative Werthe annehmen darf. Sobald nämlich $\frac{\partial G}{\partial t}$ für einen Werth $t=\sigma$ positiv ist oder verschwindet, so wird für den Werth $t=\tau$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_\tau = \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_\sigma + \int_\sigma^\tau 4T\,dt,$$

also immer gleich einer positiven Grösse, und daher muss die Function G mit wachsendem t über jedes Maass hinaus wachsen, was vermöge ihrer in (12.) gegebenen Definition der bestehenden Voraussetzung zuwiderläuft. Also muss der Differentialquotient $\frac{\partial G}{\partial t}$ auch für den Anfangszeitpunkt $t=t_0$ negativ sein. Dann dürfen aber die Anfangsgeschwindigkeiten nicht überall verschwinden, und daher muss $T(0)$ einen von Null verschiedenen positiven Werth haben. Also hat wegen der geltenden Gleichung $T(0)-U(0)=0$ für die in Rede stehende Annahme $U(0)$ nothwendig einen positiven Werth. Ferner leuchtet es ein, dass, wenn für $t=t_0$ die Grössen u, v, w bestimmt werden, wie eben geschehen ist, dagegen die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ die entgegengesetzten Werthe erhalten, der Ausdruck $\frac{\partial G}{\partial t}$ für $t=t_0$ den entgegengesetzten Werth, also einen positiven Werth annimmt. Bei einer solchen Bewegung muss aber nach den gegebenen Auseinandersetzungen die Function G im Laufe der Zeit jedes Maass überschreiten. Eine Bewegung, bei der die Ortsverschiebungen und die Geschwindigkeiten stets unter endlichen festen Grenzen bleiben, die angehäufte lebendige Kraft des gesammten Mediums mit wachsender Zeit aber nicht über jedes Maass hinaus wächst, ist demnach nur mit einem positiven Werthe von $U(0)$ vereinbar, und hat die Möglichkeit zur Folge, dass aus einer anderen Wahl der Anfangsgeschwindigkeiten eine Bewegung hervorgeht, bei der die Ortsverschiebungen und Geschwindigkeiten nicht für alle Zeit unter endlichen Grenzen bleiben. Aus diesen Gründen erscheint die betreffende Voraussetzung für die Theile eines elastischen Mediums als unzulässig.

Im Vorstehenden habe ich unter die Erfordernisse einer stabilen Bewegung die Eigenschaft aufgenommen, dass die angehäufte lebendige Kraft des ganzen Massensystems mit wachsender Zeit über jede Grenze hinaus

wachse, und ich möchte bei den mechanischen Problemen, die in der vorhin angeführten Abhandlung betrachtet worden sind, die gleiche Bestimmung hinzufügen. Vermöge dieser Bestimmung kann aus der dortigen Gleichung (10.) mit Sicherheit der Schluss gezogen werden, welcher an jener Stelle nicht ausreichend begründet ist, dass für eine stabile Bewegung der Werth $\frac{1}{\tau-\sigma}\int_\sigma^\tau 2T dt$ bei wachsendem $\tau-\sigma$ gegen einen von Null verschiedenen positiven Grenzwerth convergirt. Hieraus folgt dann sogleich, dass die dortige Verbindung $T(0)-U(0)$ für die in Art. 2 behandelte Gattung von Problemen eine positive Grösse, und für die in Art. 3 behandelte Gattung von Problemen eine negative Grösse sein muss. Bei der ersten Gattung von Problemen lässt sich ferner auf eine ähnliche Art, wie so eben geschehen ist, zeigen, dass eine Bewegung, für deren Dauer die Ortsveränderungen und Geschwindigkeiten innerhalb endlicher Grenzen bleiben, die angehäufte lebendige Kraft des ganzen Massensystems mit wachsender Zeit aber nicht über jedes Maass wächst, den dortigen Werth $U(0)$ positiv haben muss, und dass alsdann durch eine andere Wahl der Anfangsgeschwindigkeiten eine Bewegung möglich wird, für welche die Ortsveränderungen und die Geschwindigkeiten nicht innerhalb endlicher Grenzen eingeschlossen sind. Ein einfaches Beispiel liefert ein einzelner Punkt von der Masse m und den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, der sich frei unter dem Einflusse einer Kraft bewegt, deren Kräftefunction U den Ausdruck hat $\frac{1}{2}(Ax^2+By^2+Cz^2)$; hier bedeuten A, B, C positive Constanten. Wenn man nun für die Anfangszeit $t=t_0$ den Coordinaten x, y, z respective die beliebigen Werthe $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$ beilegt, dagegen den Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ein erstes Mal die mit positiven Quadratwurzelgrössen zu verstehenden Werthe $-x(0)\sqrt{\frac{A}{m}}$, $-y(0)\sqrt{\frac{B}{m}}$, $-z(0)\sqrt{\frac{C}{m}}$, ein zweites Mal die entgegengesetzten Werthe $x(0)\sqrt{\frac{A}{m}}$, $y(0)\sqrt{\frac{B}{m}}$, $z(0)\sqrt{\frac{C}{m}}$ vorschreibt, so werden die Coordinaten des betreffenden Punktes in dem ersten Falle durch die Gleichungen

$$x=x(0)e^{-\sqrt{\frac{A}{m}}(t-t_0)},\quad y=y(0)e^{-\sqrt{\frac{B}{m}}(t-t_0)},\quad z=z(0)e^{-\sqrt{\frac{C}{m}}(t-t_0)},$$

in dem zweiten Falle durch die Gleichungen

$$x=x(0)e^{\sqrt{\frac{A}{m}}(t-t_0)},\quad y=y(0)e^{\sqrt{\frac{B}{m}}(t-t_0)},\quad z=z(0)e^{\sqrt{\frac{C}{m}}(t-t_0)}$$

dargestellt. In dem ersten Falle bleiben die Coordinaten und die Componenten der Geschwindigkeit immer endlich, und die angehäufte lebendige Kraft wächst bei wachsender Zeit nicht über jedes Maass hinaus; in dem zweiten Falle überschreiten die Coordinaten und die Componenten der Geschwindigkeit bei wachsender Zeit jede Grenze.

Nachdem für die Bewegung der Theile eines elastischen Mediums aus der Forderung der Stabilität der Bewegung die Nothwendigkeit abgeleitet ist, dass die Function U wesentlich negativ sei und nur verschwinde, wofern die sechs Argumente (2.) für das ganze Medium gleich Null sind, so führt die Gleichung (11.) zu dem Schlusse, dass die Function F für alle Theile des elastischen Mediums positiv sein muss und nur verschwinden darf, sobald die sechs Argumente (2.) den Werth Null erhalten. Hiermit ist aber der aufgestellte Satz der Elasticitätslehre bewiesen.

Green macht in der ersten der angeführten Abhandlungen die Bemerkung, jedoch ohne eine Begründung hinzuzufügen, dass für ein homogenes unkrystallinisches elastisches Medium, wo die Function F den Ausdruck hat

$$F = \tfrac{1}{2}A(u_1+v_2+w_3)^2 - 2B(v_2w_3+w_3u_1+u_1v_2)^2 + \tfrac{1}{2}B\big((v_3+w_2)^2+(w_1+u_2)^2+(u_2+v_1)^2\big),$$

das Gleichgewicht ein nicht stabiles sein würde, wenn das Verhältniss der beiden positiven Constanten $\frac{A}{B}$ nicht grösser wäre, als der Werth $\frac{4}{3}$. Diese Aussage steht mit dem so eben bewiesenen Satze in vollständiger Uebereinstimmung. Denn nach demselben muss F eine wesentlich positive quadratische Form der sechs Argumente (12.) sein, und die hierzu nothwendige und hinreichende Bedingung ist nach bekannten Grundsätzen die, dass die Constanten A und B positiv sind und die von *Green* erwähnte Ungleichheit erfüllen. Die Constanten A und B hängen mit denjenigen, welche Herr *Kirchhoff* am angeführten Orte braucht, durch die Gleichungen $2K\theta+2K=A$, $K=B$ zusammen.

Bonn, den 25. Mai 1874.

Ueber die Abbildung durch algebraische Functionen.

Anhang zur Abhandlung Bd. 77, S. 339 ff. dieses Journals.

(Von Herrn *L. Fuchs* in Göttingen.)

In meiner Arbeit (Bd. 77 dieses Journals S. 339 ff.) ist der Nachweis geliefert worden, dass unter den rationalen Functionen z von w die vom zweiten Grade allein die ganze z-Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie auf die Fläche eines Kreises in der w-Ebene eindeutig abzubilden vermögen.

In derselben Arbeit ist der Grund angegeben, warum unter den *algebraischen* Functionen z von w die *rationalen* allein in Bezug auf die Möglichkeit der Leistung einer solchen Abbildung durch dieselben untersucht worden (ebendaselbst S. 340, No. 1). Um Missverständnissen vorzubeugen, scheint es nöthig, diesen Grund etwas näher zu erörtern.

Die Abbildung der ganzen z-Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie Γ auf eine Kreisfläche K in der w-Ebene vermittelst einer algebraischen Function z von w kann in einem doppelten Sinne geschehen:

Erstlich könnte die Abbildung durch den gesammten Werthvorrath der algebraischen Function z von w erfolgen,

Zweitens könnte dieselbe durch einzelne Zweige derselben Function geleistet werden.

Ich habe daselbst die Abbildung im *ersten* Sinne genommen, und mich daher aus dem (S. 340 No. 1 daselbst) angegebenen Grunde auf die *rationalen* Functionen z von w beschränkt, während ich die Möglichkeit der Abbildung im *zweiten* Sinne unerörtert liess, weil dieselbe unserem Zwecke nicht entspricht. Es sei mir gestattet, dieses hier etwas näher zu beleuchten.

Ist z eine m-werthige Function von w, so entsprechen jedem Werthe w aus dem gesammten Werthvorrathe der Function z m Punkte $z_1, z_2, \ldots z_m$ in der z-Ebene. Es sei daher ζ ein Zweig der Function z, welcher die ganze z-Ebene mit Ausschluss der Linie Γ auf die Kreisfläche K eindeutig abbildet, und w ein Punkt innerhalb K, welchem der Punkt z_1 des Zweiges ζ zugeordnet ist, so muss, da jedem nicht auf Γ befindlichen Punkte der

z-Ebene ein Punkt im Inneren von K entspricht, auch dem Punkte z_2 ein Punkt w' im Inneren von K zugehören. Es ist aber w' von w verschieden, da einem Punkte innerhalb K nur ein Punkt in der z-Ebene vermittelst des Zweiges ζ entsprechen darf. Es ergiebt sich hieraus, dass jedem nicht auf I' befindlichen Punkte z in dem Gesammtwerthvorrath der algebraischen Function w von z mindestens zwei Punkte w und w' innerhalb K entsprechen.

Unsere Untersuchung zielt auf solche Abbildungen ab, durch welche in der ganzen z-Ebene gültige Darstellungen einer Function $f(z)$ ermöglicht werden (s. meine obengenannte Arbeit S. 339, Einleitung). Ist nun nach den Principien meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 75, S. 203) $f(z)$ als Function von w betrachtet innerhalb K definirt, so erforderte — bei einer Abbildung der z-Ebene auf K durch den Zweig ζ — die Determination von $f(z)$ als Function des Ortes in der z-Ebene, dass für *jeden einzelnen* Punkt der z-Ebene ermittelt werde, welcher von den Werthen w, w', ... innerhalb K ihm entspricht, oder mit anderen Worten, da der Zweig schon durch die Zuordnung zweier entsprechenden Punkte w und z fixirt ist, sie erforderte die Kenntniss des Verlaufes des durch die Fläche K repräsentirten Zweiges der algebraischen Function w von z.

Diese Kenntniss wird überflüssig, wenn überhaupt jedem z nur ein Werth w innerhalb K entspricht. Dieses habe ich in meiner Notiz (dieses Journal Bd. 76, S. 175 ff.) in Bezug auf die in meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 75, S. 186 ff.) geleistete Darstellung der Function $f(z)$ innerhalb der Fläche G_1 in der z-Ebene vermittelst der Abbildung von G_1 auf eine Kreisfläche E in der w-Ebene hervorgehoben. Da es nun unsere Absicht war, die Möglichkeit einer für die *ganze* z-Ebene gültigen Darstellung der Function $f(z)$ zu eruiren, unter Beibehaltung *derselben* Bedingung, nicht den Verlauf eines Zweiges einer algebraischen Function kennen zu müssen, so war die Auffassung der Abbildung im ersten Sinn für *unseren Zweck* geboten.

Göttingen, im Juni 1874.

Ueber den Werth einiger Integrale.

(Von Herrn *Stern* in Göttingen.)

In dem Cours d'Analyse de l'école polytechnique par M. *Ch. Hermite* première partie pag. 260 findet sich folgende Bemerkung:

„En posant

$$u = x\sin x + \cos x, \qquad v = \sin x - x\cos x,$$

on n'a aucun procédé pour trouver directement

$$\int \frac{x^2\,dx}{u^2} = \frac{v}{u},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{v^2} = -\frac{u}{v},$$

$$\int \frac{bx^2\,dx}{(au+bv)^2} = -\frac{u}{au+bv}.$$

Nous pourrions encore citer, en désignant toujours par a et b des constantes, cette intégrale

$$\int \frac{a\,dx}{[a+(ax+b)\operatorname{tang} x]^2} = \frac{\operatorname{tang} x}{a+(ax+b)\operatorname{tang} x},$$

dont on ne peut vérifier la valeur que par la différentiation.“

Es wird daher nicht unangemessen sein zu zeigen, wie man den Werth dieser Integrale auf eine einfache Weise finden kann.

Aus $u = x\sin x + \cos x$ folgt $du = x\cos x\,dx$ und aus $v = \sin x - x\cos x$ folgt $dv = x\sin x\,dx$. Man hat daher

$$\int \frac{x^2\,dx}{u^2} = \int \frac{x\,du}{\cos x\,.\,u^2},$$

und dies giebt durch theilweise Integration

$$-\frac{x}{\cos x\,.\,u} + \int \frac{dx}{(\cos x)^2} = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{x}{\cos x\,.\,u} = \frac{v}{u}.$$

Ebenso findet man

$$\int \frac{x^2\,dx}{v^2} = \int \frac{x\,dv}{\sin x\,.\,v^2}$$

und durch theilweise Integration

$$= -\frac{x}{\sin x . v} + \int \frac{dx}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{\sin x}\left(\frac{x}{v} + \cos x\right) = -\frac{u}{v}.$$

Man hat ferner

$$d(au + bv) = x(a\cos x + b\sin x)\,dx,$$

also

$$\int \frac{bx^2\,dx}{(au+bv)^2} = \int \frac{bx\,d(au+bv)}{(a\cos x + b\sin x)(au+bv)^2};$$

durch theilweise Integration verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$-\frac{1}{au+bv}\cdot\frac{bx}{a\cos x + b\sin x} + \int \frac{1}{au+bv}\,d\left(\frac{bx}{a\cos x + b\sin x}\right).$$

Das letztere Integral geht, wenn man die Differentiation ausführt, in

$$\int \frac{b\,dx}{(a\cos x + b\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}$$

über, also

$$\int \frac{bx^2\,dx}{(au+bv)^2} = -\frac{1}{a\cos x + b\sin x}\left(\frac{bx}{au+bv} + \cos x\right),$$

woraus man durch eine einfache Reduction den Werth $\frac{-u}{au+bv}$ findet.

Das Integral

$$\int \frac{a\,dx}{[a + (ax+b)\operatorname{tg} x]^2}$$

verwandele man in

$$\int \frac{a\cos^2 x\,dx}{[a\cos x + (ax+b)\sin x]^2}$$

und setze $a\cos x + (ax+b)\sin x = u$, so folgt $du = (ax+b)\cos x\,dx$. Das Integral geht daher in

$$\int \frac{a\cos x\,du}{(ax+b)u^2}$$

über, woraus man durch theilweise Integration den Werth

$$-\frac{a}{u}\,\frac{\cos x}{ax+b} + \int \frac{a}{u}\,d\left(\frac{\cos x}{ax+b}\right) = \frac{1}{ax+b}\left(1 - \frac{a\cos x}{u}\right) = \frac{\operatorname{tg} x}{a + (ax+b)\operatorname{tg} x}$$

erhält.

Bei allen diesen Beispielen ist u in der Form $(ax+b)f'x - afx$ enthalten und daher $du = (ax+b)f''x\,dx$; in den zwei ersten Beispielen ist $a = 1$, $b = 0$ und $u = xf'x - fx$. Stellt man sich daher die Frage, wie in

dem Integrale

$$\int \frac{\varphi x\, dx}{[xf'x - fx]^2}$$

die Function φx beschaffen sein muss, damit die Integration auf dem eben angegebenen Wege ausgeführt werden kann, so findet man

$$\int \frac{\varphi x\, dx}{u^2} = \int \frac{\varphi x\, du}{xf''x.u^2} = -\frac{1}{u}\,\frac{\varphi x}{xf''x} + \int \frac{1}{u}\, d\left(\frac{\varphi x}{xf''x}\right).$$

Soll u aus dem Ausdrucke $\frac{1}{u}\, d\left(\frac{\varphi x}{xf''x}\right)$ verschwinden, so muss mithin der Zähler des Ausdrucks $d\left(\frac{\varphi x}{xf''x}\right)$ die Form ku haben, also

$$(\mathbf{A.}) \qquad xf''x\varphi' x - x\varphi x.f'''x - \varphi x f''x = k(xf'x - fx).$$

Setzt man nun

$$f''x\varphi' x - \varphi x f'''x = kf'x,$$
$$\varphi x f''x = kfx,$$

so folgt

$$\frac{f'x}{fx} + \frac{f'''x}{f''x} = \frac{\varphi' x}{\varphi x},$$

also, wenn C eine willkürliche Constante bedeutet, $\varphi x = Cfxf''x$, oder wenn man $C = 1$ setzt, $\varphi x = fxf''x$. Man hat daher, *welche Function* fx auch sei,

$$\int \frac{fxf''x\, dx}{[xf'x - fx]^2} = -\frac{1}{xf'x - fx}\cdot\frac{fx}{x} - \frac{1}{x}.$$

Nimmt man aber an, dass $fx = -f''x$ und zugleich $f'x = -f'''x$, so kann man (A.) auch so zerlegen, dass

$$x\varphi' x - \varphi x = k \quad \text{und} \quad \varphi x = k,$$

woraus (wenn man wieder die willkürliche Constante $= 1$ setzt) $\varphi x = x^2$ folgt. Diese Annahme findet bei den Integralen

$$\int \frac{\varphi x\, dx}{x\sin x + \cos x} \quad \text{und} \quad \int \frac{\varphi x\, dx}{\sin x - x\cos x}$$

statt, und man sieht, dass hier, wenn die Integrationsmethode anwendbar sein soll, φx keine andere Function als x^2 sein kann, wie es auch wirklich bei den zwei ersten der oberen Beispiele der Fall ist. Dasselbe gilt auch für den Fall, wenn $fx = f''x$ und $f'x = f'''x$. So ergiebt sich z. B.

$$\int \frac{x^2\, dx}{[x(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})]^2} = -\frac{1}{x(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})}\cdot\frac{x}{e^x + e^{-x}} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Hätte man $fx = f'x = f''x = f'''x$, also $fx = e^x$, so könnte man (A.) auch so zerlegen, dass man $x\varphi'x - \varphi x = kx$ und $x\varphi x = k$ setzt, woraus $\varphi x = xe^{\frac{x^2}{2}}$ folgt. Man hat demnach

$$\int \frac{xe^{\frac{x^2}{2}}dx}{(xe^x - e^x)^2} = -\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{e^x(xe^x - e^x)} + \int \frac{e^{\frac{x^2}{2}}dx}{e^{2x}}.$$

Behandelt man auf dieselbe Weise den allgemeinen Fall, wo man

$$\int \frac{\varphi x\,dx}{[(ax+b)f'x - afx]^2}$$

hat, so ist zunächst, indem man wieder $(ax+b)f'x - afx = u$ setzt,

$$\int \frac{\varphi x\,du}{(ax+b)f''x.u^2} = -\frac{\varphi x}{(ax+b)f''x}\cdot\frac{1}{u} + \int \frac{1}{u}\,d\left(\frac{\varphi x}{(ax+b)f''x}\right).$$

Hier muss also, wenn das Integrationsverfahren gelingen soll,

(B.) $\quad (ax+b)f''x\varphi'x - a\varphi x.f''x - \varphi x(ax+b)f'''x = k[(ax+b)f'x - afx]$

sein. Zerlegt man (B.) so, dass $f''x\varphi'x - f'''x\varphi x = kf'x$ und $\varphi xf''x = kfx$, so findet man wieder $\varphi x = fx.f''x$ und demnach

$$\int \frac{\varphi x\,dx}{[(ax+b)f'x - afx]^2} = -\frac{fx}{ax+b}\cdot\frac{1}{u} + \int \frac{1}{u}\,d\left(\frac{fx}{ax+b}\right).$$

Setzt man hier $fx = -\cos x$, also $f''x = \cos x$, so muss man (abgesehen von einem constanten Factor) $\varphi x = \cos^2 x$ setzen und erhält so das oben betrachtete Integral

$$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{[a\cos x + (ax+b)\sin x]^2},$$

wo man also keine andere Function als $\cos^2 x$ für φx setzen dürfte, wenn die Integration gelingen soll.

Setzt man aber $f''x = -fx$, $f'''x = -f'x$ und zerlegt (B.) so, dass $(ax+b)\varphi'x - a\varphi x = ak$ und $\varphi x = k$, so folgt $\varphi x = (ax+b)^2$. So findet man z. B.

$$\int \frac{(ax+b)^2dx}{[(ax+b)\cos x - a\sin x]^2} = \frac{ax+b}{\sin x[(ax+b)\cos x - a\sin x]} - \operatorname{cotg} x.$$

Man kann auf demselben Wege auch das Integral viel complicirterer Differentiale finden, wovon ich nur ein Beispiel noch geben will.

Setzt man $x(f'x + f''x) - fx - f'x = u$, also $du = x(f''x + f'''x)\,dx$, so ist

$$\int \frac{\varphi x\,dx}{u^2} = \int \frac{\varphi x\,du}{x(f''x+f'''x)u^2} = -\frac{\varphi x}{x(f''x+f'''x)}\cdot\frac{1}{u} + \int \frac{1}{u}\,d\left(\frac{\varphi x}{x(f''x+f'''x)}\right).$$

Es muss also, wenn die Integrationsmethode anwendbar sein soll,

$$x(f''x+f'''x)\varphi'x-\varphi x(f''x+f'''x)-\varphi x.x(f'''x+f''x)=k[x(f'x+f''x)-fx-f'x]$$

sein. Zerlegt man diese Gleichung, so dass

$$(f''x+f'''x)\varphi'x-\varphi x(f'''x+f''x) = k(f'x+f''x),$$
$$\varphi x(f''x+f'''x) = k(fx+f'x),$$

so ergiebt sich

$$\varphi x = (fx+f'x)(f''x+f'''x);$$

es ist also

$$\int\frac{\varphi x\,dx}{u^2} = -\frac{(fx+f'x)}{xu}-\frac{1}{x},$$

und diese Formel gilt für jedes fx.

Ist z. B. $fx=\sin x$, mithin $\varphi x=-(\sin x+\cos x)^2$, so findet man

$$\int\frac{(\sin x+\cos x)^2\,dx}{[(x-1)\cos x-(x+1)\sin x]^2} = \frac{\cos x-\sin x}{(x-1)\cos x-(x+1)\sin x}.$$

Unter der Voraussetzung, dass $fx=-f''x$ und $f'x=-f'''x$, kann man die Gleichung auch so zerlegen, dass

$$x\varphi'x-\varphi x+x\varphi x = k(x+1),$$
$$x\varphi'x-\varphi x-x\varphi x = k(1-x),$$

woraus $\varphi x=x^2$ folgt (abgesehen von einem constanten Factor). Setzt man wieder $fx=\sin x$, so ergiebt sich hieraus nach einigen leichten Reductionen

$$\int\frac{x^2\,dx}{[(x-1)\cos x-(x+1)\sin x]^2} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)\cos x+(x-1)\sin x}{(x-1)\cos x-(x+1)\sin x}.$$

Vereinigt man diese zwei zuletzt gefundenen Integrale durch Subtraction, so ergiebt sich

$$\int\frac{x^2-(\sin x+\cos x)^2}{[(x-1)\cos x-(x+1)\sin x]^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)\cos x+(x+1)\sin x}{(x-1)\cos x-(x+1)\sin x}.$$

Göttingen, Mai 1874.

Ueber die Kugelflächen, welche den Poltetraëdern einer Fläche zweiten Grades umschrieben werden können.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i./E.)

Die Gleichung einer Fläche Φ^2 zweiter Classe kann auf unendlich viele Arten auf die Form:

$$\sum_{i=1}^{i=4} m_i(\alpha x_i+\beta y_i+\gamma z_i-p)^2 = 0$$

gebracht werden, sodass Φ^2 als die zweite Nullfläche eines vierpunktigen Massensystemes sich darstellt *). Und zwar sind in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem α, β, γ, p die homogenen Coordinaten einer beliebigen Berührungsebene der Φ^2, ferner x_i, y_i, z_i (für $i=1, 2, 3, 4$) die Coordinaten der Eckpunkte eines beliebigen Poltetraëders von Φ^2, und m_1, m_2, m_3, m_4 die vier diesen Eckpunkten beizulegenden Massen. Zu der Fläche Φ^2 ist nun eine Fläche F^2 zweiter Ordnung *apolar*, wenn die Coefficienten ihrer Gleichung $F^2(x, y, z)=0$ der Bedingung:

$$\sum_{i=1}^{i=4} m_i . F^2(x_i, y_i, z_i) = 0$$

Genüge leisten **). Diese Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn F^2 einem Poltetraëder von Φ^2 umschrieben ist; denn verlegen wir die vier Massen m_i in die Eckpunkte dieses Tetraëders, so verschwindet für jede derselben die Function $F^2(x_i, y_i, z_i)$.

Es gilt aber auch der umgekehrte Satz:

Einer zu Φ^2 apolaren Fläche F^2 können unendlich viele Poltetraëder von Φ^2 eingeschrieben werden.

Um ein solches Poltetraëder zu construiren, wähle man auf F^2 einen Punkt 1 beliebig, construire dessen Polarebene in Bezug auf Φ^2 und bringe sie mit F^2 zum Durchschnitt. Auf der Schnittlinie wähle man einen zweiten

*) Vgl. dieses Journal Bd. 72, S. 309.

**) Vgl. die Arbeit: „Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen;“ dieser Band, S. 104.

Punkt 2 beliebig, construire die Polare der Geraden $\overline{12}$ in Bezug auf Φ^2 und suche deren Schnittpunkte 3 und 4 mit F^2. Dann bilden die vier Punkte 1, 2, 3, 4 ein der F^2 eingeschriebenes (reelles oder imaginäres) Poltetraëder von Φ^2.

Nämlich die Punkte 1, 2, 3 und der Pol 4′ ihrer Ebene $\overline{123}$ bilden zusammen ein Poltetraëder der Φ^2, sodass wir ihnen vier solche Massen m_1, m , m_3, m_4' beilegen können, dass Φ^2 die zweite Nullfläche dieses vierpunktigen Massensystemes wird. Weil aber für jeden der ersteren drei Punkte $F^2(x_i, y_i, z_i) = 0$ ist in Folge der Construction, so geht die Bedingungsgleichung für die apolare F^2 über in:

$$m_4' . F^2(x_4', y_4', z_4') = 0 \quad \text{oder} \quad F^2(x_4', y_4', z_4') = 0.$$

Auch der Punkt 4′ liegt folglich auf F^2, und weil er zugleich auf der Polare von $\overline{12}$, das heisst auf der Geraden $\overline{34}$ enthalten sein muss, so fällt er mit 4 zusammen.

Die zu Φ^2 apolaren Flächen zweiter Ordnung sind demnach identisch mit denjenigen F^2, welche den Poltetraëdern von Φ^2 umschrieben werden können. Unter diesen F^2 aber giebt es unendlich viele Kugelflächen, und zwar erhalten wir für deren Radien r und Mittelpunkts-Coordinaten a, b, c die Bedingungsgleichung:

$$\Sigma m_i \{(x_i-a)^2+(y_i-b)^2+(z_i-c)^2-r^2\} = 0;$$

oder:

$$\Sigma m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-2a\Sigma m_i x_i-2b\Sigma m_i y_i-2c\Sigma m_i z_i+(a^2+b^2+c^2-r^2).\Sigma m_i = 0.$$

Die Fläche Φ^2 ist nun entweder ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid, oder sie hat einen Mittelpunkt und ist ein (reelles oder imaginäres) Ellipsoid oder Hyperboloid. Im letzteren Falle können wir Φ^2 auf ihre drei Hauptaxen beziehen, wodurch ihre Gleichung die einfache Form:

$$A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2-Dp^2 = 0$$

annimmt. Identificiren wir diese Gleichung mit der obigen:

$$\Sigma m_i(\alpha x_i+\beta y_i+\gamma z_i-p)^2 = 0,$$

so ergiebt sich:

$$\Sigma m_i x_i^2 = A,\ \Sigma m_i y_i^2 = B,\ \Sigma m_i z_i^2 = C,\ \Sigma m_i = -D,\ \Sigma m_i x_i = \Sigma m_i y_i = \Sigma m_i z_i = 0,$$

und die Bedingungsgleichung für die zu Φ^2 apolaren Kugelflächen geht über in:

$$a^2+b^2+c^2-r^2 = \frac{A+B+C}{D} \quad \text{oder} \quad s^2-r^2 = \frac{A+B+C}{D},$$

wenn $s = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ den Abstand des Kugelcentrums vom Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. vom Mittelpunkt der Fläche Φ^2 bezeichnet.

Nun ist aber s^2-r^2 oder $(s+r).(s-r)$ die Potenz der apolaren Kugelfläche im Centrum der Φ^2, und wenn dieses Centrum ausserhalb der Kugel liegt, also $s > r$ ist, so repräsentirt $\sqrt{s^2-r^2}$ oder $\sqrt{\frac{A+B+C}{D}}$ die Länge der Tangente, welche von ihm an die Kugelfläche gezogen werden kann. Wir erhalten also den Satz:

Alle Kugelflächen, welche den Poltetraëdern eines Ellipsoides oder Hyperboloides umschrieben werden können, haben gleiche Potenz im Mittelpunkte dieser Fläche; sie werden sämmtlich von einer zu dem Ellipsoid oder Hyperboloid concentrischen Kugelfläche orthogonal geschnitten.

Diese Orthogonal-Kugel hat den Radius $\sqrt{s^2-r^2} = \sqrt{\frac{A+B+C}{D}}$ und kann im Fall des Hyperboloides imaginär werden; sie ist der Ort aller Punkte, in denen drei zu einander normale Berührungsebenen des Ellipsoides oder Hyperboloides sich schneiden. Diese Kugel reducirt sich auf den Mittelpunkt von Φ^2, wenn $A+B+C=0$ ist; die Fläche Φ^2 ist alsdann ein Hyperboloid, um dessen Asymptotenkegel rechtwinklige Dreikante beschrieben werden können, und alle den Poltetraëdern von Φ^2 umschriebenen Kugelflächen gehen durch das Centrum von Φ^2 (nämlich ihre Bedingungsgleichung geht in $s^2=r^2$ über). Ist $\frac{A+B+C}{D}$ negativ, so wird r reell für jeden Werth von s, und jeder Punkt des Raumes ist folglich Mittelpunkt einer reellen zu Φ^2 apolaren Kugelfläche.

Die Fläche Φ^2 ist ein Paraboloid, wenn in ihrer Tangentialgleichung

$$\Sigma m_i(\alpha x_i+\beta y_i+\gamma z_i-p)^2 = 0$$

der Coefficient Σm_i von p^2 den Werth Null hat. In diesem Falle geht die Bedingungsgleichung für die zu Φ^2 apolaren Kugelflächen über in:

$$\Sigma m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-2a\Sigma m_i x_i-2b\Sigma m_i y_i-2c\Sigma m_i z_i = 0,$$

sie wird also linear für die Coordinaten a, b, c der Kugelcentra, und alle diese Centra liegen folglich in einer Ebene. Beziehen wir das Paraboloid auf seine beiden Symmetrieebenen und auf die Berührungsebene seines Scheitelpunktes, so wird seine Gleichung:

$$B\beta^2+C\gamma^2+2k.ap = 0;$$

wir haben also zu setzen:

$$\Sigma m_i x_i^2 = 0, \quad \Sigma m_i y_i^2 = B, \quad \Sigma m_i z_i^2 = C, \quad \Sigma m_i x_i = -k, \quad \Sigma m_i y_i = \Sigma m_i z_i = 0,$$

wodurch die Bedingungsgleichung für die apolaren Kugelflächen übergeht in:

$$B + C + 2a.k = 0, \quad \text{oder} \quad a = -\frac{B+C}{2k}.$$

Also:

Die Mittelpunkte aller Kugelflächen, welche den Poltetraëdern eines Paraboloides umschrieben werden können, liegen in einer zur Hauptaxe normalen Ebene; und jeder Kugelfläche, deren Centrum in dieser Ebene liegt, können unendlich viele Poltetraëder des Paraboloides eingeschrieben werden.

Diese Ebene ist der Ort aller Punkte, in denen je drei zu einander rechtwinklige Berührungsebenen des Paraboloides sich schneiden.

Strassburg i. E., 2. Juni 1874.